

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 20 (1965)  
**Heft:** 3  
  
**Rubrik:** Ungelöste Probleme

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 28.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

two rings of 3 equally spaced circles each, then a ring of 6 unequally spaced circles, a ring of 4 unequally spaced circles and completed by a single circle. The angular diameter of the circles in this arrangement is approximately  $48^{\circ}38'$ .

The most efficient arrangement found to-date is the one shown in Figure 4. It is symbolized by 1, 4, 4, 4, 4, 1. This signifies that a circle is centered on a pole, surrounded by four consecutive rings of 4 equally spaced circles each, and that a circle is then placed at the opposite pole.

The angular diameter of these circles is  $49^{\circ}33'$ . The value is verified by the following computation. If the zenith distance  $PA = 2u$ , then  $u$  is obtained from the equation

$$\tan u = \cos 45^{\circ} \tan 49^{\circ}33' = 0.70711 \times 1.1729 = 0.82937,$$

$$u = 39^{\circ}40', \quad 2u = 79^{\circ}20' = PA.$$

The distance  $PB = 180^{\circ} - 79^{\circ}20' = 100^{\circ}40'$ , and the distance  $v = AB$  is given by

$$\cos v = -\cos^2 79^{\circ}30' + \sin^2 79^{\circ}20' \cos 45^{\circ}$$

$$= -0.18509^2 + 0.98272^2 \times 0.70711 = 0.64862,$$

$$v = 49^{\circ}33'.$$

The results are summarized in the following table.

Number of circles	Symbolic arrangement	Angular diameter of circles
20	1, 3, 3, (6), 3, 3, 1	$47^{\circ}26'$
18	3, 3, (6), 3, 3	$47^{\circ}26'$
18	1, 3, 3, (6), (4), 1	$48^{\circ}38'$
18	1, 4, 4, 4, 4, 1	$49^{\circ}33'$
17	1, 5, 5, 5, 1	$51^{\circ}02'$

A similar investigation of two stable arrangements of 33 equal circles on a sphere was recently made by the author [3]. MICHAEL GOLDBERG, Washington D. C., USA

#### BIBLIOGRAPHY

- [1] E. JUCOVIČ, *Lagerung von 17, 25 und 33 Punkten auf der Kugel* (Slovak; Russian and German summaries) Mat.-Fyz. Časopis. Slovensk Akad. Vied. 9, 173–176 (1959); Math. Rev. 23, 533 (1962).
- [2] B. L. VAN DER WAERDEN, *Punkte auf der Kugel, Drei Zusätze*, Math. Ann. 125, 213–222 (1952).
- [3] M. GOLDBERG, *Packing of 33 Equal Circles on a Sphere*, El. Math. 18, 99–100 (1963).

## Ungelöste Probleme

Nr. 48. Unter einer *Scheibe* wird eine offene, zentralsymmetrische, konvexe Punktmenge der euklidischen Ebene verstanden. Wir sagen, dass eine Menge von Scheiben eine *Minkowskische Verteilung* bildet, wenn keine Scheibe den Mittelpunkt einer anderen enthält.

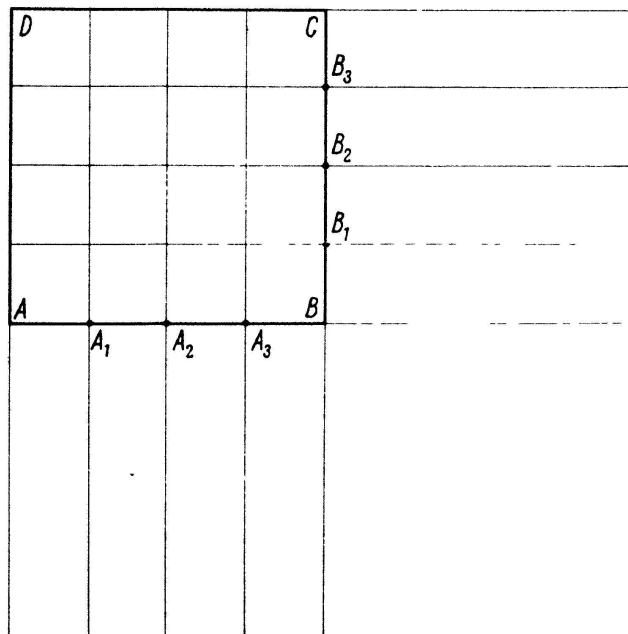
Sind in einer Minkowskischen Verteilung die Scheiben homothetisch, so ist die Scheibendichte  $\leq 4$ . Ziehen wir nämlich jede Scheibe auf eine mit der ursprünglichen

konzentrische, homothetische Scheibe mit halb so grossen linearen Dimensionen zusammen, so erhalten wir eine Menge von nicht übereinandergreifenden Scheiben. Die Dichte dieser Scheibenpackung ist einerseits  $\leq 1$ , andererseits ein Viertel der ursprünglichen Dichte.

Bilden in einer Minkowskischen Scheibenverteilung die Mittelpunkte der sonst beliebigen, im allgemeinen inkongruenten Scheiben ein Gitter, so ist die Scheibendichte wiederum  $\leq 4$ . Betrachten wir nämlich ein Scheibengitter, das aus einer beliebig ausgewählten Scheibe durch Anwendung der Gittertranslationen entsteht. Da die Dichte dieses Scheibengitters nach der obigen Bemerkung  $\leq 4$  ist, kann der Flächeninhalt der Scheibe nicht den vierfachen Flächeninhalt eines Grundparallelogramms übertreffen (Minkowskischer Satz).

Es ist nicht schwer zu zeigen (s. L. FEJES TÓTH, *Minkowskian distribution of discs*, Proceedings Amer. Math. Soc., im Druck), dass es Minkowskische Scheibenverteilungen mit beliebig grosser Dichte gibt. Deshalb erhebt sich die Frage: *Gibt es eine universale Dichteschranke für sämtliche Minkowskische Verteilungen kongruenter Scheiben?*

Dieses Problem scheint recht schwierig zu sein. Wir beantworten hier eine einfachere Frage: Gibt es eine Minkowskische Verteilung kongruenter Scheiben mit einer Dichte  $> 4$ ? Die Antwort ist: ja. Zuerst hat M. N. BLEICHER ein Beispiel mit einer Dichte 6 angegeben. Das folgende Beispiel, das von J. MARSHALL OSBORN herrührt, zeigt, dass die Dichte einer Minkowskischen Verteilung aus kongruenten Scheiben beliebig nahe an 8 heranrücken kann.



Wir betrachten das Quadrat  $ABCD$  mit der Seitenlänge 1, zerlegen die Strecke  $AB$  in  $n$  kongruente Teilstrecken  $AA_1, A_1A_2, \dots, A_{n-1}B$  und legen um die Punkte  $A_1, \dots, A_{n-1}$  als Mittelpunkte offene Rechtecke mit den Seitenlängen  $2/n$  und 2, so dass die längeren Seiten zu der Geraden  $AD$  parallel liegen. In gleicher Weise zerlegen wir die Strecke  $BC$  durch die Punkte  $B_1, \dots, B_{n-1}$  in  $n$  kongruente Teilstrecken und legen um diese Punkte zu den obigen kongruente Rechtecke, deren

längere Seiten zu  $AB$  parallel liegen. Die Dichte dieser  $2(n-1)$  Rechtecke im Quadrat  $ABCD$  beträgt  $2(n-1) \cdot 2/n = 4(n-1)/n$ . Wenden wir nun auf diese Rechtecke alle möglichen Translationen  $r\mathbf{AB} + s\mathbf{AD}$  mit ganzzahligen Werten von  $r$  und  $s$  an, so erhalten wir eine Minkowskische Verteilung von kongruenten Rechtecken. Da aber jetzt in das Quadrat  $ABCD$  ausser den ursprünglichen Rechtecken auch diejenigen hineingreifen, deren Mittelpunkte auf den Seiten  $CD$  und  $DA$  liegen, ist die Rechtecksdichte im Quadrat, und zugleich in der ganzen Ebene,  $8(n-1)/n$ .

Eine Minkowskische Verteilung kongruenter Scheiben mit einer Dichte  $\geq 8$  ist nicht bekannt.

L. FEJES TÓTH

## Kleine Mitteilungen

### A Note on Sequences and Subsequences

In this note we communicate a simple observation concerning finite sequences in which each term of the sequence is one of a finite set of distinct objects. Repetitions are allowed, but not immediate repetitions; in other words two consecutive terms are never equal. The observation is as follows.

*Any finite sequence of  $N$  terms without immediate repetition, formed from  $n$  distinct objects, contains for each  $m < n$  a sequence of  $M$  terms without immediate repetition, formed from  $m$  distinct objects, such that*

$$\frac{N}{n(n-1)} \leq \frac{M}{m(m-1)}. \quad (1)$$

*Proof.* We can take the  $n$  objects to be the integers  $1, 2, \dots, n$ , and we can suppose without loss of generality that  $n$  occurs a minimal number of times, say  $k$  times. Then  $N \geq nk$ .

We first delete any occurrence of  $n$  in the given sequence  $S$  which has different immediate neighbours to the left and right. This gives a subsequence of  $S$  without immediate repetition, and whenever  $n$  occurs in it, it is as one of a set of consecutive terms

$$\dots b a n a c \dots,$$

or more generally

$$\dots b a n a n a n a c \dots$$

Now we delete each remaining occurrence of  $n$ , together with one of its neighbours; thus each of the above sets of consecutive terms becomes  $\dots b a c \dots$ . In the new sequence there is no immediate repetition, since  $b \neq a$  and  $c \neq a$ .

We obtain a subsequence  $S_1$ , of  $S$ , without immediate repetition, formed from the integers  $1, 2, \dots, n-1$ , and the number  $N_1$ , of terms in  $S_1$ , is at least  $N - 2k$ . It follows that

$$N_1 \geq N - 2k \geq (1 - 2/n) N.$$

Repetition of the argument gives a subsequence  $S_r$  of  $N_r$  terms, without immediate repetition, formed from the integers  $1, 2, \dots, n-r$ , and satisfying

$$N_r \geq \frac{n-2}{n} \frac{n-3}{n-1} \dots \frac{n-r-1}{n-r+1} N = \frac{(n-r)(n-r-1)}{n(n-1)} N,$$

and this gives (1) with  $m = n - r$ .

The inequality is of some interest in connection with sequences which, in addition to having no immediate repetition, satisfy some prescribed "hereditary" condition, that is, some condition which if valid for a sequence is necessarily valid for every subsequence.