Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 20 (1965)
Heft: 3

Artikel: Packing of 18 equal circles on a sphere
Autor: Goldberg, Michael
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-23926

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 28.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Schlussbemerkung (gemeinsam mit S. CHOWLA). Beachtet man, dass die Zähler rechts in den Abschätzungen aus den Sätzen 2a, b, c jeweils asymptotisch gleich $\log\sqrt{D}$ sind, so erhält man aus jenen *präzisen* unteren Abschätzungen die *asymptotischen* unteren Abschätzungen

$$\liminf_{D\to\infty} \frac{h(D)}{\log\sqrt{D}} \geqq \frac{1}{\log m},$$

gültig in den betrachteten Diskriminantenfolgen, sofern diese nicht abbrechen, das heisst sofern es unendlich viele Primzahlen p bzw. Primzahlpaare q, q' des betr. Typus gibt. In dieser asymptotischen Form besagen die in Rede stehenden Abschätzungen nichts Neues. Vielmehr hat ja SIEGEL ganz allgemein die asymptotische untere Abschätzung

$$h(D)\log\varepsilon = \frac{1}{2}\sum_{n=1} \frac{1}{n}\left(\frac{D}{n}\right) > D^{(1/2)-\theta} \quad \text{für} \quad D > D_0(\theta)$$

bei beliebigem $\theta > 0$ bewiesen [5], und in den hier betrachteten Richaud-Degertschen Fällen ist die Grundeinheit $\varepsilon < 2\sqrt{D}$ (bzw. sogar $< \sqrt{D}$), also $\log\varepsilon = O(\log\sqrt{D}) = O(D^{\theta})$ für beliebiges $\theta > 0$, so dass in diesen Fällen $h(D)$ mindestens von der Ordnung $O(D^{(1/2)-\theta})$ (statt nur $O(\log\sqrt{D})$) unendlich wird. Während aber bei SIEGEL die Schranke $D_0(\theta)$, oberhalb derer die asymptotische Abschätzung gilt, nicht effektiv angegeben wird, sind die präzisen Abschätzungen aus den Sätzen 2a, b, c von dieser Unbestimmtheit frei, geben also über das Siegelsche Ergebnis hinausgehende Informationen.

HELMUT HASSE, Hamburg

LITERATURVERZEICHNIS

[1] N. C. ANKENY, S. CHOWLA und H. HASSE, *On the class-number of the real subfield of a cyclotomic field.* J. reine angew. Math. *217*, 217–220 (1965).

[2] C. RICHAUD, *Sur la résolution des équations* $x^2 - A\,y^2 = \pm 1$. Atti Accad. pontif. Nuovi Lincei *1866*, 177–182.

[3] G. DEGERT, *Über die Bestimmung der Grundeinheit gewisser reell-quadratischer Zahlkörper.* Abh. math. Sem. Univ. Hamburg *22*, 92–97 (1958).

[4] K. SCHAFFSTEIN, *Tafel der Klassenzahlen der reellen quadratischen Zahlkörper mit Primzahldiskriminante unter 12000 und zwischen 100000–101000 und 1000000–1001000.* Math. Ann. *99*, 745–748 (1928).

[5] C. L. SIEGEL, *Über die Classenzahl quadratischer Zahlkörper.* Acta arithmetica *1*, 83–86 (1935).

Packing of 18 Equal Circles on a Sphere

The largest possible angular diameter of 18 (or 19) equal circles which can be packed on the surface of a sphere has not yet been determined. Suggested values for 17 and 20 circles have been published [1] [2] [1]). These values serve as bounds for the possible values to be derived for 18 and 19 circles.

The best known arrangement for 20 circles is shown in Figure 1. If the circles at the poles are removed, then the remaining 18 circles are still locked in static equilibrium. If, in addition, the adjacent rings of 3 circles are removed, then 6 circles can be replaced to form the stable arrangement shown in Figure 2. Surprisingly, the

[1]) Numbers in brackets refer to References, page 61.

maximum angular diameter of these 18 circles is the same as in the arrangement for 20 circles.

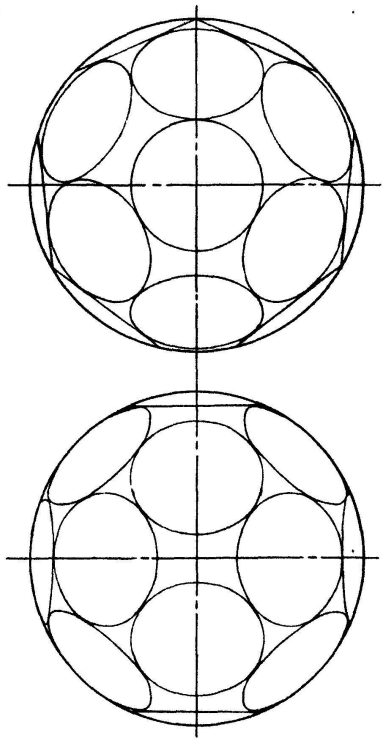

Figure 1
20 Circles, Arrangement [1,3,3,(6),3,3,1]

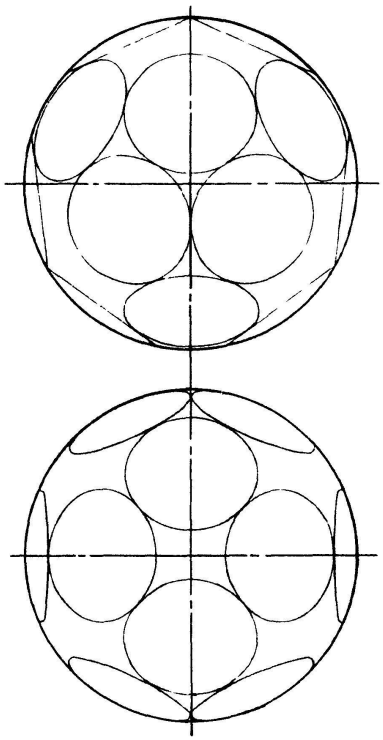

Figure 2
18 Circles, Arrangement [3,3,(6),3,3]

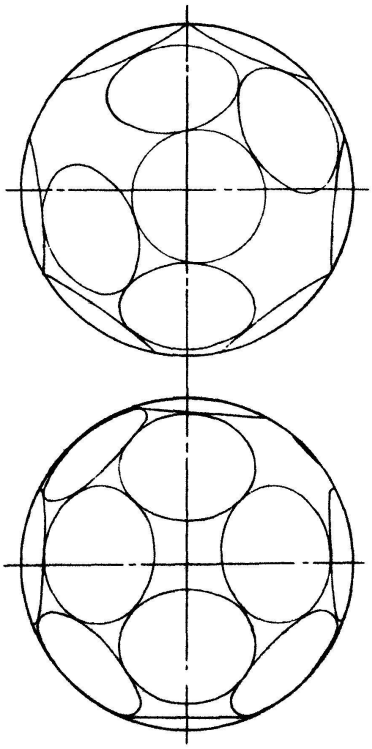

Figure 3
18 Circles, Arrangement [1,3,3,(6),(4),1]

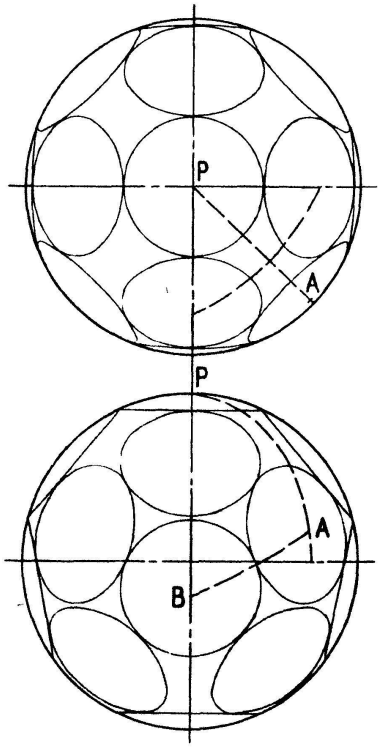

Figure 4
18 Circles, Arrangement [1,4,4,4,4,1]

In an attempt to find more efficient arrangements, the author investigated several alternative arrangements. One of these is shown in Figure 3. It is symbolized by 1,3,3,(6),(4),1. This signifies that a circle is centered at the south pole, surrounded by

two rings of 3 equally spaced circles each, then a ring of 6 unequally spaced circles, a ring of 4 unequally spaced circles and completed by a single circle. The angular diameter of the circles in this arrangement is approximately 48°38′.

The most efficient arrangement found to-date is the one shown in Figure 4. It is symbolized by 1,4,4,4,4,1. This signifies that a circle is centered on a pole, surrounded by four consective rings of 4 equally spaced circles each, and that a circle is then placed at the opposite pole.

The angular diameter of these circles is 49°33′. The value is verified by the following computation. If the zenith distance $PA = 2\,u$, then u is obtained from the equation

$$\tan u = \cos 45° \tan 49°33' = 0.70711 \times 1.1729 = 0.82937\,,$$

$$u = 39°40'\,,\ 2\,u = 79°20' = PA\,.$$

The distance $PB = 180° - 79°20' = 100°40'$, and the distance $v = AB$ is given by

$$\cos v = -\cos^2 79°30' + \sin^2 79°20' \cos 45°$$

$$= -0.18509^2 + 0.98272^2 \times 0.70711 = 0.64862\,,$$

$$v = 49°33'\,.$$

The results are summarized in the following table.

Number of circles	Symbolic arrangement	Angular diameter of circles
20	1,3,3,(6),3,3,1	47°26′
18	3,3,(6),3,3	47°26′
18	1,3,3,(6),(4),1	48°38′
18	1,4,4,4,4,1	49°33′
17	1,5,5,5,1	51°02′

A similar investigation of two stable arrangements of 33 equal circles on a sphere was recently made by the author [3]. MICHAEL GOLDBERG, Washington D. C., USA

BIBLIOGRAPHY

[1] E. JUCOVIČ, *Lagerung von 17, 25 und 33 Punkten auf der Kugel* (Slovak; Russian and German summaries) Mat.-Fyz. Časopis. Slovensk Akad. Vied. *9*, 173–176 (1959); Math. Rev. *23*, 533 (1962).

[2] B. L. VAN DER WAERDEN, *Punkte auf der Kugel, Drei Zusätze*, Math. Ann. *125*, 213–222 (1952).

[3] M. GOLDBERG, *Packing of 33 Equal Circles on a Sphere*, El. Math. *18*, 99–100 (1963).

Ungelöste Probleme

Nr. 48. Unter einer *Scheibe* wird eine offene, zentralsymmetrische, konvexe Punktmenge der euklidischen Ebene verstanden. Wir sagen, dass eine Menge von Scheiben eine *Minkowskische Verteilung* bildet, wenn keine Scheibe den Mittelpunkt einer anderen enthält.

Sind in einer Minkowskischen Verteilung die Scheiben homothetisch, so ist die Scheibendichte $\leqslant 4$. Ziehen wir nämlich jede Scheibe auf eine mit der ursprünglichen