Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 20 (1965)
Heft: 3

Artikel: Packing of 18 equal circles on a sphere
Autor: Goldberg, Michael
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-23926

Schlussbemerkung (gemeinsam mit S. CHOWLA). Beachtet man, dass die Zähler rechts in den Abschätzungen aus den Sätzen 2a, b, c jeweils asymptotisch gleich $\log\sqrt{D}$ sind, so erhält man aus jenen *präzisen* unteren Abschätzungen die *asymptotischen* unteren Abschätzungen

$$\liminf_{D\to\infty} \frac{h(D)}{\log\sqrt{D}} \geqq \frac{1}{\log m},$$

gültig in den betrachteten Diskriminantenfolgen, sofern diese nicht abbrechen, das heisst sofern es unendlich viele Primzahlen p bzw. Primzahlpaare q, q' des betr. Typus gibt. In dieser asymptotischen Form besagen die in Rede stehenden Abschätzungen nichts Neues. Vielmehr hat ja SIEGEL ganz allgemein die asymptotische untere Abschätzung

$$h(D) \log\varepsilon = \frac{1}{2}\sum_{n=1} \frac{1}{n}\left(\frac{D}{n}\right) > D^{(1/2)-\theta} \quad \text{für} \quad D > D_0(\theta)$$

bei beliebigem $\theta > 0$ bewiesen [5], und in den hier betrachteten Richaud-Degertschen Fällen ist die Grundeinheit $\varepsilon < 2\sqrt{D}$ (bzw. sogar $< \sqrt{D}$), also $\log\varepsilon = O(\log\sqrt{D}) = O(D^{\theta})$ für beliebiges $\theta > 0$, so dass in diesen Fällen $h(D)$ mindestens von der Ordnung $O(D^{(1/2)-\theta})$ (statt nur $O(\log\sqrt{D})$) unendlich wird. Während aber bei SIEGEL die Schranke $D_0(\theta)$, oberhalb derer die asymptotische Abschätzung gilt, nicht effektiv angegeben wird, sind die präzisen Abschätzungen aus den Sätzen 2a, b, c von dieser Unbestimmtheit frei, geben also über das Siegelsche Ergebnis hinausgehende Informationen.

HELMUT HASSE, Hamburg

LITERATURVERZEICHNIS

[1] N. C. ANKENY, S. CHOWLA und H. HASSE, *On the class-number of the real subfield of a cyclotomic field.* J. reine angew. Math. *217*, 217–220 (1965).

[2] C. RICHAUD, *Sur la résolution des équations* $x^2 - A y^2 = \pm 1$. Atti Accad. pontif. Nuovi Lincei *1866*, 177–182.

[3] G. DEGERT, *Über die Bestimmung der Grundeinheit gewisser reell-quadratischer Zahlkörper.* Abh. math. Sem. Univ. Hamburg *22*, 92–97 (1958).

[4] K. SCHAFFSTEIN, *Tafel der Klassenzahlen der reellen quadratischen Zahlkörper mit Primzahldiskriminante unter 12000 und zwischen 100000–101000 und 1000000–1001000.* Math. Ann. *99*, 745–748 (1928).

[5] C. L. SIEGEL, *Über die Classenzahl quadratischer Zahlkörper.* Acta arithmetica *1*, 83–86 (1935).

Packing of 18 Equal Circles on a Sphere

The largest possible angular diameter of 18 (or 19) equal circles which can be packed on the surface of a sphere has not yet been determined. Suggested values for 17 and 20 circles have been published [1] [2][1]. These values serve as bounds for the possible values to be derived for 18 and 19 circles.

The best known arrangement for 20 circles is shown in Figure 1. If the circles at the poles are removed, then the remaining 18 circles are still locked in static equilibrium. If, in addition, the adjacent rings of 3 circles are removed, then 6 circles can be replaced to form the stable arrangement shown in Figure 2. Surprisingly, the

[1]) Numbers in brackets refer to References, page 61.

maximum angular diameter of these 18 circles is the same as in the arrangement for 20 circles.

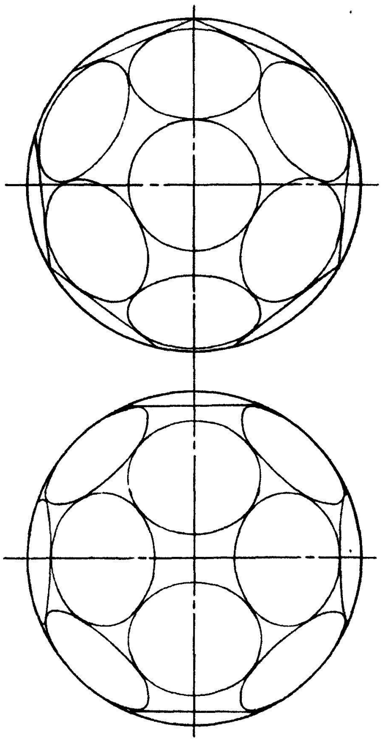

Figure 1
20 Circles, Arrangement [1,3,3,(6),3,3,1]

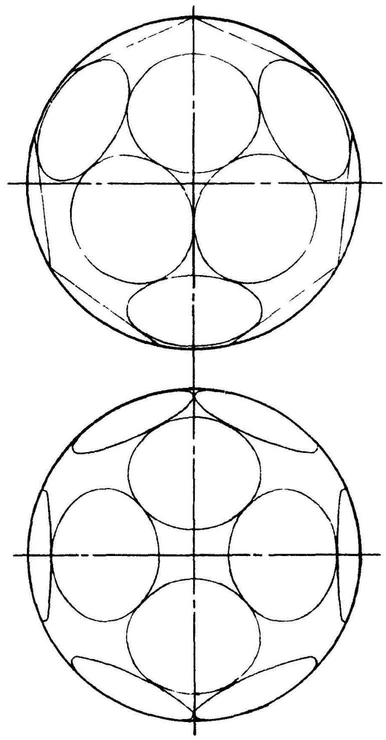

Figure 2
18 Circles, Arrangement [3,3,(6),3,3]

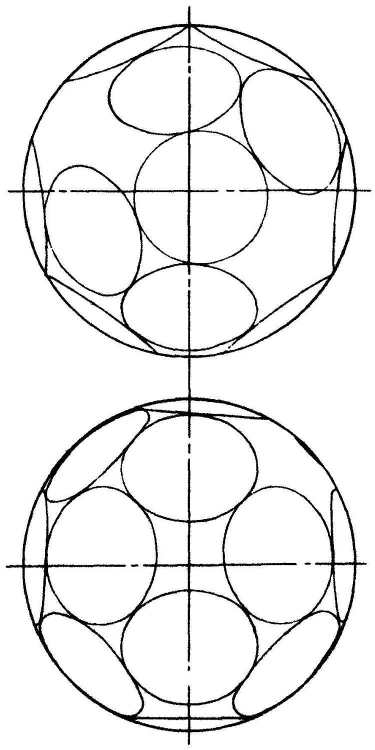

Figure 3
18 Circles, Arrangement [1,3,3,(6),(4),1]

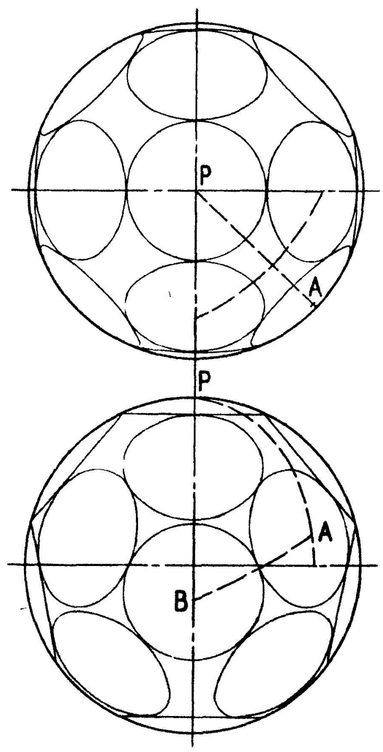

Figure 4
18 Circles, Arrangement [1,4,4,4,4,1]

In an attempt to find more efficient arrangements, the author investigated several alternative arrangements. One of these is shown in Figure 3. It is symbolized by 1,3,3,(6),(4),1. This signifies that a circle is centered at the south pole, surrounded by two rings of 3 equally spaced circles each, then a ring of 6 unequally spaced circles, a ring of 4 unequally spaced circles and completed by a single circle. The angular diameter of the circles in this arrangement is approximately 48°38′.

The most efficient arrangement found to-date is the one shown in Figure 4. It is symbolized by 1,4,4,4,4,1. This signifies that a circle is centered on a pole, surrounded by four consective rings of 4 equally spaced circles each, and that a circle is then placed at the opposite pole.

The angular diameter of these circles is 49°33′. The value is verified by the following computation. If the zenith distance $PA = 2\,u$, then u is obtained from the equation

$$\tan u = \cos 45^\circ \tan 49^\circ 33' = 0.70711 \times 1.1729 = 0.82937\,,$$

$$u = 39^\circ 40'\,,\quad 2\,u = 79^\circ 20' = PA\,.$$

The distance $PB = 180^\circ - 79^\circ 20' = 100^\circ 40'$, and the distance $v = AB$ is given by

$$\cos v = -\cos^2 79^\circ 30' + \sin^2 79^\circ 20' \cos 45^\circ$$

$$= -0.18509^2 + 0.98272^2 \times 0.70711 = 0.64862\,,$$

$$v = 49^\circ 33'\,.$$

The results are summarized in the following table.

Number of circles	Symbolic arrangement	Angular diameter of circles
20	1,3,3,(6),3,3,1	47°26′
18	3,3,(6),3,3	47°26′
18	1,3,3,(6),(4),1	48°38′
18	1,4,4,4,4,1	49°33′
17	1,5,5,5,1	51°02′

A similar investigation of two stable arrangements of 33 equal circles on a sphere was recently made by the author [3]. MICHAEL GOLDBERG, Washington D. C., USA

BIBLIOGRAPHY

[1] E. JUCOVIČ, *Lagerung von 17, 25 und 33 Punkten auf der Kugel* (Slovak; Russian and German summaries) Mat.-Fyz. Časopis. Slovensk Akad. Vied. *9*, 173–176 (1959); Math. Rev. *23*, 533 (1962).

[2] B. L. VAN DER WAERDEN, *Punkte auf der Kugel, Drei Zusätze*, Math. Ann. *125*, 213–222 (1952).

[3] M. GOLDBERG, *Packing of 33 Equal Circles on a Sphere*, El. Math. *18*, 99–100 (1963).

Ungelöste Probleme

Nr. 48. Unter einer *Scheibe* wird eine offene, zentralsymmetrische, konvexe Punktmenge der euklidischen Ebene verstanden. Wir sagen, dass eine Menge von Scheiben eine *Minkowskische Verteilung* bildet, wenn keine Scheibe den Mittelpunkt einer anderen enthält.

Sind in einer Minkowskischen Verteilung die Scheiben homothetisch, so ist die Scheibendichte $\leqslant 4$. Ziehen wir nämlich jede Scheibe auf eine mit der ursprünglichen