

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 20 (1965)
Heft: 2

Rubrik: Aufgaben

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 29.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

On sait (voir [1]) que les seuls nombres premiers $p < 10^6$ pour lesquels $p^2 | 2^{p-1} - 1$ sont $p = 1093$ et $p = 3511$. Donc, si le nombre pseudopremier n^2 a un diviseur premier p autre que 1093 et 3511, alors, d'après le lemme on a $p^2 | 2^{p-1} - 1$ et $p > 10^6$, d'où $n^2 > 10^{12}$. Donc un nombre pseudopremier $n^2 \leq 10^{12}$ peut avoir comme diviseurs premiers seulement les nombres 1093 et 3511. Comme $1093^2 \cdot 3511^2 > 10^{12}$, notre théorème est démontré (On peut d'ailleurs démontrer que le nombre $1093^2 \cdot 3511^2$ n'est pas pseudopremier).

Les nombres premiers p , pour lesquels $p^2 | 2^{p-1} - 1$ sont liés avec l'équation

$$x^2 - y^p = 1. \quad (1)$$

Comme on sait (voir [3]), si les entiers positifs x et y et le nombre premier p satisfont à l'équation (1) et si l'on n'a pas $x = 3$, $y = 2$, $p = 3$, alors on a

$$2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2} \quad \text{et} \quad 3^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2} \quad (2)$$

et, comme l'ont démontré K. INKERI et S. HYYRÖ (voir [2])

$$x > 2^{p(p-2)}, \quad y > 4^{p-2}. \quad (3)$$

Comme $p^2 \nmid 3^{p-1} - 1$ pour p égal à 1093 ou à 3511, on a $p > 10^6$ et, d'après (3) on a $x > 10^{3 \cdot 10^{11}}$ et $y > 10^{6 \cdot 10^6}$. Donc, si les nombres naturels x , y , n autres que le système $x = 3$, $y = 2$, $n = 3$, satisfont à l'équation $x^2 - y^n = 1$, on a $x > 10^{3 \cdot 10^{11}}$, $y > 10^{6 \cdot 10^6}$ et $n > 10^6$.

A. ROTKIEWICZ (Varsovie)

TRAVAUX CITÉS

- [1] M. HAUSNER and D. SACHS, *On the Congruence* $2^p \equiv 2 \pmod{p^2}$, Amer. Math. Monthly 70, 996 (1963).
- [2] K. INKERI and S. HYYRÖ, *On the Congruence* $3^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2}$ and the Diophantine Equation $x^2 - 1 = y^p$, Ann. Univ. Turkuensis Sci. An. 50 (1961).
- [3] R. OBLÁTH, *Über die Zahl* $x^2 - 1$, Mathematica B, Zutphen 8, 161-172 (1940).
- [4] A. ROTKIEWICZ, *Sur les nombres pseudopremiers triangulaires*, El. Math. 19, 82 (1964).
- [5] W. J. LEVEQUE, *Topics in Number Theory*, vol. I, Reading 1956.

Aufgaben

Aufgabe 473. Einem Kreis vom Radius r sind drei kongruente Ellipsen einzubeschreiben, die sich paarweise so berühren, dass sie eine Figur mit drei Symmetrieachsen bilden. Welche numerische Exzentrizität müssen die Ellipsen haben, damit sie den grösstmöglichen Teil der Kreisfläche bedecken, und wie gross wird dieser Bruchteil?

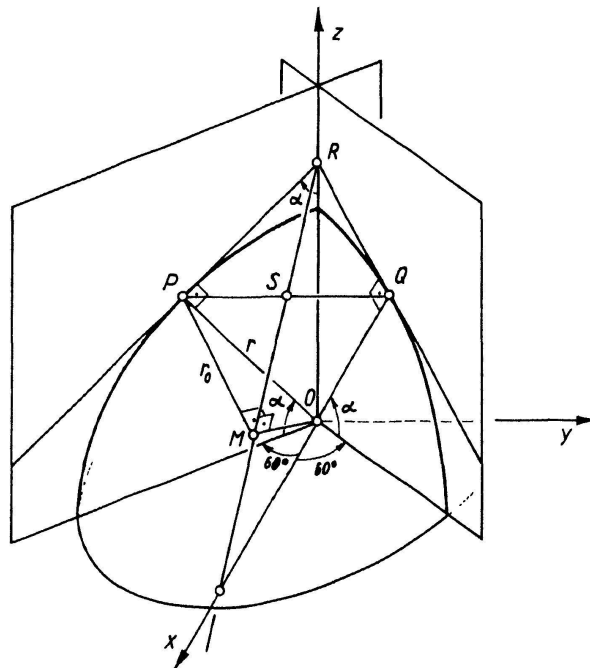
C. BINDSCHEDLER, Künsnacht

1. Lösung. Einem der drei Kreissektoren, die je eine Ellipse enthalten sollen, werde eine Raute umbeschrieben, von der zwei Seiten auf den (verlängerten) Begrenzungsradien des Sektors liegen. Die beiden andern Seiten berühren den Kreis in ihren Mittelpunkten. Die grösste der Raute einbeschriebene Ellipse berührt diese ebenfalls in den Seitenmitten, denn mit ihr zusammen ist die Raute affines Bild eines Quadrats mit Inkreis. Diese Ellipse ist aber zugleich dem Kreissektor einbeschrieben, da sie den Kreis in denselben beiden Punkten (je zweipunktig) berührt, ihn also nicht ausserdem noch durchsetzen kann. Jede andere dem Sektor einbeschriebene Ellipse ist nun kleiner als die zu ihr ähnliche, die der Raute

einbeschrieben ist. Erst recht ist sie also kleiner als die zuerst beschriebene, die sich damit als die gesuchte erweist. Ihr Achsenverhältnis ist $\sqrt{3}:1$ wie das der Rautendiagonalen, daraus die numerische Exzentrizität $\varepsilon = \sqrt{6}/3$. Die Ellipsenfläche ist $\pi/4$ der Rautenfläche, also $\pi r^2 \sqrt{3}/6$, wo r der Kreisradius ist. Daraus ergibt sich das maximale Flächenverhältnis zu $\sqrt{3}:2$.
 STEFAN LANGE, München

2. Lösung. Eine Möglichkeit, die Aufgabe auf anschaulichem Wege analytisch zu lösen, beruht auf folgendem bekannten Sachverhalt: Jede einem Kreis $K(O; r)$ einbeschriebene Ellipse kann als Normalprojektion zweier zur Kreisebene symmetrisch gelegener Kreise der Kugel $\mathfrak{R}(O; r)$ erhalten werden.

Die beschriebenen Ellipsen liegen in drei, den ganzen Kreis überdeckenden Sektoren mit dem Mittelpunktswinkel 120° , und die drei Geraden, die durch die geradlinigen Begrenzungen dieser Sektoren festgelegt sind, sind die Symmetrieachsen. Es genügt, einen dieser Sektoren und eine ihm und dem Kreis einbeschriebene Ellipse zu betrachten.



Im Raum mit kartesischem Koordinatensystem $(O; x, y, z)$ liege der Kreis $K(O; r)$ als Schnitt der $x y$ -Ebene mit der Kugel $\mathfrak{R}(O; r)$. Die Halbgeraden $y = \pm x \tan 60^\circ$ ($x \geq 0, z = 0$) mögen den betrachteten Kreissektor einschließen. Es ist dann anschaulich klar (siehe Figur), dass die einbeschriebene Ellipse Normalprojektion des Kreises ist, der aus der Kugel von einer geeigneten Ebene $\varphi = PQR$ mit

$$\left. \begin{aligned} P & \left(\frac{1}{2} r \cos \alpha, -\frac{1}{2} r \sqrt{3} \cos \alpha, r \sin \alpha \right) \\ Q & \left(\frac{1}{2} r \cos \alpha, +\frac{1}{2} r \sqrt{3} \cos \alpha, r \sin \alpha \right) \\ R & (0, 0, r/\sin \alpha) \end{aligned} \right\} \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \right)$$

ausgeschnitten wird. Der Mittelpunkt S der Strecke PQ ergibt sich zu $S((1/2) r \cos \alpha, 0, r \sin \alpha)$, und um die Gleichung der Ebene φ zu bekommen, braucht man nur die Gleichung der Geraden RS in der xz -Ebene zu ermitteln. Man erhält

$$\varphi \dots 0 = 2x \cos \alpha + z \sin \alpha - r \quad \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \right).$$

Hieraus erhält man den Abstand d des Punktes O von φ und damit für den Radius r_0 des ausgeschnittenen Kreises die Beziehung

$$r_0^2 = r^2 - d^2 = r^2 \frac{3 \cos^2 \alpha}{1 + 3 \cos^2 \alpha}.$$

Ferner entnimmt man der Gleichung für den Neigungswinkel γ der Ebene φ gegen die $x y$ -Ebene die Größen

$$\cos \gamma = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 + 3 \cos^2 \alpha}}, \quad \sin \gamma = \frac{2 \cos \alpha}{\sqrt{1 + 3 \cos^2 \alpha}}.$$

Die Achsenlängen der fraglichen Ellipse sind somit $a = r_0$ und $b = r_0 \cos \gamma$, so dass sich für ihre numerische Exzentrizität $\varepsilon = \sin \gamma$ und für ihren Flächeninhalt $F = \pi r_0^2 \cos \gamma$ ergibt. Dieser Flächeninhalt F ist zu einem Maximum zu machen. Nach bekanntem Verfahren erhält man die Bedingung $\cos \alpha = \sqrt{3}/3$ und damit $F = \pi r^2 \sqrt{3}/6$, folglich für den Bruchteil der von den drei Ellipsen bedeckten Kreisfläche $3 F/\pi r^2 = \sqrt{3}/2$ und für die numerische Exzentrizität $\varepsilon = \sqrt{6}/3$.

G. GEISE, Dresden

3. *Lösung* (Lösung des Aufgabenstellers). Die Gleichung der einem Sektor einbeschriebenen Ellipse lässt sich in der Form

$$x^2 + y^2 - r^2 + \lambda (y - c)^2 = 0$$

schreiben, wobei c der Abstand der Berührungssehne vom Kreiszentrum ist. Die Bedingung, dass die Geraden $y = \pm x/\sqrt{3}$ die Kurve berühren, lautet $\lambda c^2 = r^2 (4 + \lambda)/4$ und für die Halbachsen der Ellipse findet man nach Elimination von c die Werte $a^2 = 3 \lambda r^2/4(1 + \lambda)$, $b^2 = 3 \lambda r^2/4(1 + \lambda)^2$. Das Maximum der Fläche wird erreicht für $\lambda = 2$, $a^2 = r^2/2$, $b^2 = r^2/6$, $\varepsilon = \sqrt{6}/3$. Die Fläche einer Ellipse wird also $\pi r^2 \sqrt{3}/6$, und die relative Bedeckung des Kreises ist $\sqrt{3}/2 = 0,866\dots$. Da man $c = r \sqrt{3}/2$ erhält, zerlegen die sechs Berührungspunkte der drei Ellipsen den Kreisumfang in sechs gleiche Teile.

Weitere Lösungen sandten H. FRISCHKNECHT (Berneck) und L. KIEFFER (Luxemburg).

Aufgabe 474. Sind a_1, \dots, a_n ($n \geq 2$) die aufeinanderfolgenden Seiten eines ebenen, geschlossenen Polygons und α_k ($k = 1, 2, \dots, n$) die gleichsinnig orientierten Aussenwinkel zwischen den Seiten a_k und a_{k+1} , dann gilt die Ungleichung

$$\sum_{k=1}^n a_k a_{k+1} \cos \alpha_k \leq \cos \frac{2\pi}{n} \sum_{k=1}^n a_k^2,$$

in welcher Gleichheit dann und nur dann besteht, wenn das Polygon affin-regulär ist.

O. REUTTER, Ochsenhausen

*Lösung des Aufgabenstellers*¹⁾: Fassen wir die Polygonseiten als gerichtete Strecken auf (das Polygon sei im positiven oder negativen Sinn durchlaufen), dann können wir der Seite a_k in der Gaußschen Zahlenebene eineindeutig eine komplexe Zahl x_k von gleichem Betrag und gleicher Richtung zuordnen, und es ist dann

$$\sum_{k=1}^n x_k = 0, \tag{1}$$

da das Polygon geschlossen ist. Ferner ist $a_k^2 = |x_k|^2$ und $a_k a_{k+1} \cos \alpha_k = \operatorname{Re}(x_k \overline{x_{k+1}})$; wir haben also das Bestehen der Ungleichung

$$\sum_{k=1}^n \operatorname{Re}(x_k \overline{x_{k+1}}) \leq \cos \frac{2\pi}{n} \sum_{k=1}^n |x_k|^2 \tag{2}$$

unter der Nebenbedingung (1) nachzuweisen.

¹⁾ Die Eigenwert-Theorie linearer Operatoren in linearen normierten Räumen wird als bekannt vorausgesetzt.

Zu diesem Zweck betrachten wir die Menge M aller n -tupel $x = (x_1, \dots, x_n)$ – wir schreiben kurz $x = (x_k)$ –, deren Komponenten x_k komplexe Zahlen sind, die der Bedingung (1) genügen. Jedes Element von M können wir im obigen Sinn als algebraischen Repräsentanten eines ebenen, geschlossenen Polygons ansehen. Definieren wir in M die Addition zweier Elemente durch $x + y = (x_k + y_k)$, die Multiplikation eines Elementes mit einer komplexen Zahl c durch $c x = (c x_k)$ und schliesslich das Skalarprodukt zweier Elemente durch

$$[x, y] = \sum_{k=1}^n x_k \overline{y_k} \quad \left(\text{insbesondere ist } [x, x] = \sum_{k=1}^n |x_k|^2 \geq 0 \right),$$

dann ist M ein linearer normierter Raum. Nun ordnen wir jedem Element $x = (x_k)$ das Element $A x = (x_{k+1})$ zu, das wegen

$$\sum_{k=1}^n x_{k+1} = 0$$

ebenfalls zu M gehört. Hierdurch ist in M ein Operator A definiert, der offensichtlich linear ist. Man prüft leicht nach, dass das Spektrum von A (das ist die Gesamtheit der Eigenwerte von A) durch die von 1 verschiedenen n -ten Einheitswurzeln $\varepsilon_k = e^{2\pi i k/n}$ ($k = 1, \dots, n-1$) gebildet wird und dass die Elemente $e_k = (1/\sqrt{n}) (1, \varepsilon_k, \varepsilon_k^2, \dots, \varepsilon_k^{n-1})$ ein zugehöriges System orthonormierter Eigenlösungen sind. Der Wertevorrat des Operators A (das ist die Gesamtheit der komplexen Zahlen $[x, A x]/[x, x]$) ist bekanntlich mit der konvexen Hülle des Spektrums von A identisch. Daraus folgt

$$\operatorname{Re} \frac{[x, A x]}{[x, x]} \leq \operatorname{Re} \varepsilon_1 = \cos \frac{2\pi}{n}, \quad \text{also} \quad \operatorname{Re} \sum_{k=1}^n x_k \overline{x_{k+1}} \leq \cos \frac{2\pi}{n} \sum_{k=1}^n |x_k|^2,$$

womit (2) nachgewiesen ist. In (2) besteht Gleichheit genau dann, wenn x eine Linearkombination der beiden Eigenlösungen e_1 und e_{n-1} , also $x = u e_1 + v e_{n-1}$ ist. $e_1(e_{n-1})$ ist der Repräsentant eines regulären n -Ecks mit positivem (negativem) Umlaufsinn; die Multiplikation mit der komplexen Zahl $u(v)$ entspricht einer Drehstreckung, also repräsentiert $u e_1(v e_{n-1})$ ebenfalls ein reguläres n -Eck. Die Addition $u e_1 + v e_{n-1}$ entspricht der geometrischen Superposition dieser beiden regulären n -Ecke, also ist x der Repräsentant eines affin-regulären Polygons.

Eine ähnliche Lösung sandte K. ZACHARIAS (Berlin).

Aufgabe 475. Für $n, k = 0, 1, 2, \dots$ beweise man die Identität

$$\sum_{\nu=0}^n (-1)^\nu \binom{n}{\nu} \binom{z+k+\nu}{k+1}^{-1} = \frac{k+1}{z} \binom{z+k+n}{k+n}^{-1}.$$

I. PAASCHE, München

Lösung. Man überzeugt sich unschwer von der Richtigkeit der für $|x| < 1$ konvergenten Reihendarstellungen

$$s_1 = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{z+k+n}{\nu} x^\nu = (1+x)^{z+k+n} \tag{1}$$

$$s_2 = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \binom{z+\nu-1}{\nu} x^\nu = (1+x)^{-z} \tag{2}$$

(z beliebig reell; $n, k = 0, 1, 2, \dots$).

Hieraus folgt einmal

$$s_1 s_2 = (1+x)^{k+n} = \sum_{\mu=0}^{\infty} \binom{k+n}{\mu} x^\mu \tag{3}$$

und andererseits mittels Cauchyscher Multiplikation bei Doppelreihen

$$s_1 s_2 = \sum_{\mu=0}^{\infty} \left[\sum_{\nu=0}^{\mu} (-1)^{\nu} \binom{z+\nu-1}{\nu} \binom{z+k+n}{\mu-\nu} \right] x^{\mu}. \quad (3')$$

Nach Gleichsetzen von (3) und (3') bekommt man durch Koeffizientenvergleich

$$\sum_{\nu=0}^{\mu} (-1)^{\nu} \binom{z+\nu-1}{\nu} \binom{z+k+n}{\mu-\nu} = \binom{k+n}{\mu}, \quad \mu = 0, 1, 2, \dots$$

Insbesondere ist für $\mu = n$:

$$\sum_{\nu=0}^n (-1)^{\nu} \binom{z+\nu-1}{\nu} \binom{z+k+n}{n-\nu} = \binom{k+n}{n}. \quad (4)$$

Erweitert man die rechte Seite von

$$\binom{z+k+n}{n-\nu} \binom{z+\nu-1}{\nu} = \frac{(z+k+n) \dots (z+k+\nu+1) (z+\nu-1) \dots z}{(n-\nu)! \nu!}$$

mit $(k+1)! (k+n)! (z+k+\nu) \dots (z+\nu)$, so folgt

$$\begin{aligned} \binom{z+k+n}{n-\nu} \binom{z+\nu-1}{\nu} &= \binom{n}{\nu} \frac{z}{n!} \frac{(k+n)!}{(k+1)!} \frac{(z+k+n) \dots (z+1)}{(k+n)!} \frac{(k+1)!}{(z+k+\nu) \dots (z+\nu)} \\ &= \frac{z}{n!} \binom{n}{\nu} \binom{z+k+n}{k+n} \binom{z+k+\nu}{k+1}^{-1} \frac{(k+n)!}{(k+1)!}. \end{aligned}$$

Trägt man dies in (4) ein, so gibt eine leichte Umrechnung die zu beweisende Identität.

F. GÖTZE, Jena

Weitere Lösungen sandten G. BACH (Braunschweig), J. SPILKER (Freiburg/Br.), K. ZACHARIAS (Berlin).

Neue Aufgaben

Aufgabe 497. In einem Dreieck mit gegebenen Seiten a und b stehe die Verbindungsgerade von In- und Umkreismittelpunkt normal auf der Schwerlinie m_c . Man konstruiere das Dreieck.

F. LEUENBERGER, Küsnacht

Aufgabe 498. Es seien c_i ($i = 1, 2, 3, 4$) vier beliebige Kreislinien, die in dieser Reihenfolge durch einen gemeinsamen Punkt C gehen. Für die sechs Schnittwinkel φ_{ik} der Kreislinien c_i gilt dann

$$\sin \frac{1}{2} \varphi_{23} \sin \frac{1}{2} \varphi_{14} - \sin \frac{1}{2} \varphi_{13} \sin \frac{1}{2} \varphi_{24} + \sin \frac{1}{2} \varphi_{12} \sin \frac{1}{2} \varphi_{34} = 0.$$

(Sind O_i, O_k die Zentren der Kreise c_i, c_k und ist S_{ik} einer ihrer Schnittpunkte, so sei φ_{ik} der Gegenwinkel der Seite $O_i O_k$ im Dreieck $O_i O_k S_{ik}$.)

Die angegebene Beziehung gilt gleichzeitig für die sechs (geeignet gewählten) Schnittwinkel $\varphi_{ik} = \sphericalangle(g_i, g_k)$ von vier allgemeinen Geraden g_i ($i = 1, 2, 3, 4$) in einer Ebene.

H. FRISCHKNECHT, Berneck

Aufgabe 499. Trouver toutes les centaines de nombres naturels successifs qui contiennent au moins 25 nombres premiers.

W. SIERPIŃSKI, Varsovie

Aufgabe 500. Les pieds des bissectrices intérieures des angles de face d'un tétraèdre sont douze points d'une même quadrique.

NATHAN ALTSHILLER-COURT, University of Oklahoma/USA

Aufgaben für die Schule

Es wird kein Anspruch auf Originalität der Aufgaben erhoben; Autoren und Quellen werden im allgemeinen nicht genannt. Die Daten für Aufgaben aus der Darstellenden Geometrie sind durchweg so festgelegt, dass der Ursprung des Koordinatensystems in der Mitte des linken Randes eines Blattes vom Format A 4 gewählt werden soll, x -Achse nach rechts, y -Achse nach vorn, z -Achse nach oben, Einheit 1 cm. Anregungen und Beiträge sind zu senden an Prof. Dr. WILLI LÜSSY, Büelrainstrasse 51, Winterthur.

1. Man betrachtet ein beliebiges Dreieck ABC mit dem Umkreisradius r . Ein Kreis (ϱ_1) geht durch A und berührt BC in B , ein Kreis (ϱ_2) geht durch A und berührt BC in C .

Beweise:

$$\varrho_1 \varrho_2 = r^2 .$$

2. Für die Winkel eines Dreiecks gilt

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma .$$

Zeige, dass auch die Umkehrung richtig ist: Wenn für drei Zahlen u, v, w , von denen höchstens eine negativ sein soll, gilt

$$u + v + w = u v w ,$$

so handelt es sich um die Tangenswertes der Winkel eines Dreiecks.

► $w = -\frac{u+v}{1-uv}$, usw.

3. In jedem Dreieck gilt

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1 & \cos \gamma & \cos \beta \\ \cos \gamma & 1 & \cos \alpha \\ \cos \beta & \cos \alpha & 1 \end{vmatrix} = 4 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma , \quad \text{b) } \begin{vmatrix} -1 & \cos \gamma & \cos \beta \\ \cos \gamma & -1 & \cos \alpha \\ \cos \beta & \cos \alpha & -1 \end{vmatrix} = 0 .$$

4. Durch den Schwerpunkt S eines Dreiecks legt man eine beliebige *gerichtete* Gerade, die die Dreiecksseiten in den Punkten U, V und W schneidet. Es gilt

$$\frac{1}{SU} + \frac{1}{SV} + \frac{1}{SW} = 0 .$$

► Die Eigenschaft ist affin-invariant, es genügt, sie für das gleichseitige Dreieck nachzuweisen.

5. α und β sind zwei Lösungen der Gleichung

$$a \cos x + b \sin x = c ,$$

die zu verschiedenen Punkten des Einheitskreises gehören. Berechne die trigonometrischen Funktionen von $(\alpha + \beta)$.

► Führt man vermöge $b = a \operatorname{tg} \varphi$ den Hilfswinkel φ ein, so ergibt sich $\cos(x - \varphi) = A$; und hieraus

$$\alpha - \varphi = \vartheta + 2 n \pi$$

$$\beta - \varphi = -\vartheta + 2 m \pi$$

$$\alpha + \beta - 2 \varphi = 2 k \pi$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos 2 \varphi = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} , \quad \text{usw.}$$