

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 20 (1965)  
**Heft:** 2

**Artikel:** Eine ordnungstheoretische Charakterisierung des elementaren Flächeninhalts  
**Autor:** Kirsch, Arnold  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-23922>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

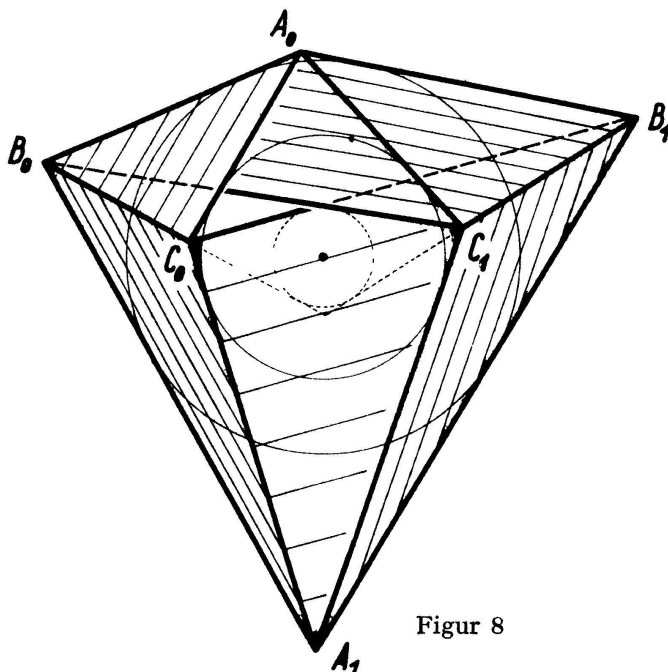
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 02.05.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

*wackeliges Achteck*. Auch mit einem Gelenkkoktaeder sind aber jedenfalls in jeder nicht ausgearteten Lage vier Paare von Möbiustetraedern verbunden.

Während sich die Betrachtungen über kippende oder wackelige Achtecke un-  
schwer auf andere Polyeder ausdehnen lassen, scheint über sonstige Vielfläche mit  
paradoxe Beweglichkeit nichts bekannt zu sein. W. WUNDERLICH, Wien



Figur 8

## LITERATURVERZEICHNIS

- [1] A. L. CAUCHY, *Ille mémoire sur les polygones et les polyèdres*, J. Fc. polyt. 9, 87–98 (1813).
- [2] E. ŠTEINITZ, H. RADEMACHER, *Vorlesungen über die Theorie der Polyeder*, Grundlehren math. Wiss. 41, 57 ff (Berlin 1934).
- [3] W. BLASCHKE, *Wackelige Achtecke*, Math. Z. 6, 85–93 (1920).
- [4] A. REUSCHEL, *Konstruktion zweier gleich grosser regulärer Tetraeder, die einander zugleich ein- und umgeschrieben sind*. El. Math. 4, 7–11 und 25–30 (1949).
- [5] R. BRICARD, *Mémoire sur la théorie de l'octaèdre articulé*, J. math. pur. appl. 3, 113–148 (1897). – *Leçons de cinématique, II*, 318–332 (Paris 1927).
- [6] W. BLASCHKE, *Analytische Geometrie*, 60 (Wolfenbüttel 1948).

## Eine ordnungstheoretische Charakterisierung des elementaren Flächeninhalts

Es sei  $V$  ein verallgemeinerter Boolescher Verband mit Nullelement  $0^1$ ) und  $\mu$  eine (einfach additive) Massfunktion auf  $V$ , das heisst eine Abbildung von  $V$  in die Menge  $R^+$  der nichtnegativen reellen Zahlen, welche die Eigenschaft

$$A \cap B = 0 \Rightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) \quad (\text{I})$$

<sup>1)</sup> Das heisst  $V$  sei ein abschnittskomplementärer distributiver Verband; siehe hierzu etwa [5]<sup>2)</sup>, Seite 48f. Mit anderen Worten: In  $V$  gelten genau dieselben Rechengesetze wie in einem Mengensystem, das mit zwei Mengen  $A, B$  stets auch die Vereinigungsmenge  $A \cup B$  und (im Falle  $A \subseteq B$ ) die Differenz  $B - A$  enthält.

besitzt. Dann hat die durch

$$A \lesssim B \stackrel{\text{def}}{\iff} \mu(A) \leq \mu(B) \tag{0}$$

definierte Relation  $\lesssim$  in  $\mathcal{V}$  die Eigenschaften (jeweils für alle  $A, B, C \in \mathcal{V}$ ):

$$0 \lesssim A, \tag{1}$$

$$A \lesssim B, B \lesssim C \Rightarrow A \lesssim C, \tag{2}$$

$$A \lesssim B \text{ oder } B \lesssim A, \tag{3}$$

$$A \cap C = 0 = B \cap C \Rightarrow (A \lesssim B \iff A \cup C \lesssim B \cup C). \tag{4}$$

Die naheliegende Frage, ob man umgekehrt jede Relation  $\lesssim$  in  $\mathcal{V}$  mit (1) bis (4) in dieser Weise erhalten kann, wird in [7]<sup>2)</sup> für den Fall untersucht, dass  $\mathcal{V}$  endlich, also ein Boolescher Verband von einer Ordnung  $2^n$  ist<sup>3)</sup>. Die Frage erweist sich als äquivalent mit einem auch an sich interessanten, aber bis jetzt nicht allgemein gelösten Separationsproblem für endliche Punktmenge; für  $n \leq 3$  ist sie zu bejahen.

Wir wählen jetzt für  $\mathcal{V}$  den Verband  $\mathbf{P}$  der (beschränkten, als elementargeometrische Figuren<sup>4)</sup> aufgefassten) *Polygone* und modifizieren das Problem wie folgt: Es werden nur Relationen  $\lesssim$  in  $\mathbf{P}$  betrachtet, die ausser (1) bis (4) noch die Invarianzeigenschaft

$$A \lesssim B \Rightarrow A^\sigma \lesssim B^\sigma \text{ für alle Punktspiegelungen } \sigma \tag{5}$$

haben; gefragt ist, ob jede solche Relation mittels (0) aus einer Massfunktion  $\mu$  mit der Invarianzeigenschaft

$$\mu(A^\sigma) = \mu(A) \text{ für alle Punktspiegelungen } \sigma \text{ (und alle } A) \tag{II}$$

abgeleitet werden kann. Wenn man von einer Massfunktion mit (II) ausgeht, ist natürlich (5) erfüllt.

Bekanntlich ist jede nicht identisch verschwindende Abbildung von  $\mathbf{P}$  in  $R^+$  mit den Eigenschaften (I), (II) eine elementare Flächeninhaltsfunktion, und dies gilt sogar schon, wenn (II) durch die schwächere Forderung

$$\mu(A^\tau) = \mu(A) \text{ für alle Translationen } \tau \tag{II'}$$

ersetzt wird<sup>5)</sup>. Indessen verträgt (5) für eine positive Beantwortung unserer Frage keine derartige Abschwächung zu

$$A \lesssim B \Rightarrow A^\tau \lesssim B^\tau \text{ für alle Translationen } \tau. \tag{5'}$$

Eine Relation mit (1) bis (4) und (5') braucht nämlich nicht aus einer invarianten Massfunktion ableitbar zu sein, wie die durch

$$A \lesssim B \stackrel{\text{def}}{\iff} \iint_A e^{x+y} dx dy \leq \iint_B e^{x+y} dx dy$$

definierte Relation  $\lesssim$  zeigt.

<sup>2)</sup> Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 35.

<sup>3)</sup> Die Relationen mit (1) bis (4) sind genau diejenigen, die in [7] als reduzierbare Reihungen bezeichnet werden.

<sup>4)</sup> Siehe hierzu [1] und [6].

<sup>5)</sup> Siehe hierzu [3], S. 34f.

Die obige Frage ist jedoch zu bejahen, das heisst es gilt der

**Satz.** *Ist  $\lesssim$  eine Relation in  $\mathbf{P}$  mit den Eigenschaften (1) bis (5), so gibt es eine Abbildung  $\mu$  von  $\mathbf{P}$  in  $R^+$  mit (I) und (II), derart dass*

$$A \lesssim B \iff \mu(A) \leq \mu(B).$$

Dem Beweis schicken wir einige Folgerungen aus (1) bis (4) voraus (die somit für beliebige  $\mathbf{V}$  statt  $\mathbf{P}$  gelten). Zunächst liefert (1) und (4), wenn man in (4)  $A, B, C$  durch  $0, B - A, A$  ersetzt:

$$A \subseteq B \Rightarrow A \lesssim B. \quad (6)$$

Sodann ist die durch

$$A \sim B \stackrel{\text{def}}{\iff} A \lesssim B \quad \text{und} \quad B \lesssim A$$

definierte Relation  $\sim$  wegen (2) und (3) eine Äquivalenzrelation. Die wichtigste Folgerung formulieren wir als

*Lemma.* *Ist  $\lesssim$  eine Relation mit den Eigenschaften (2) und*

$$A \cap C = 0 = B \cap C, A \lesssim B \Rightarrow A \cup C \lesssim B \cup C, \quad (4a)$$

so gilt auch

$$A \cap C = 0 = B \cap D, A \lesssim B, C \lesssim D \Rightarrow A \cup C \lesssim B \cup D. \quad (7)$$

Zum Beweis von (7) setzen wir  $B \cap C = R$ ; dann ist  $B \cap (C - R) = 0$  und wegen  $A \cap C = 0$  auch  $A \cap (C - R) = 0$ . Somit sind die Voraussetzungen von (4a) mit  $C - R$  statt  $C$  erfüllt, und es folgt

$$A \cup (C - R) \lesssim B \cup (C - R) = B \cup C.$$

Nach Definition von  $R$  ist weiter  $C \cap (B - R) = 0$  und wegen  $B \cap D = 0$  auch  $D \cap (B - R) = 0$ . Somit folgt aus  $C \lesssim D$ , wieder nach (4a):

$$C \cup B = C \cup (B - R) \lesssim D \cup (B - R).$$

Nach (2) ergibt sich jetzt  $A \cup (C - R) \lesssim D \cup (B - R)$ , das heisst wegen  $A \cap C = 0 = B \cap D$  und  $R \subseteq C, R \subseteq B$ :

$$(A \cup C) - R \lesssim (B \cup D) - R.$$

Nochmalige Anwendung von (4a) liefert schliesslich  $A \cup C \lesssim B \cup D$ .

Damit lässt sich nun unser Satz auf wohlbekanntere Tatsachen der elementaren Inhaltslehre (wie sie etwa in [6] zusammengestellt sind) zurückführen. Nach dem Lemma hat die Äquivalenzrelation  $\sim$  die Eigenschaft

$$A \cap C = 0 = B \cap D, A \sim B, C \sim D \Rightarrow A \cup C \sim B \cup D. \quad (8)$$

Nach (3) gilt  $A \lesssim A^\sigma$  oder  $A^\sigma \lesssim A$  für jede Punktspiegelung  $\sigma$ ; nach (5) folgt daraus (wegen  $\sigma^2 = 1$ )  $A \sim A^\sigma$  und mit (2) weiter

$$A \sim A^\xi \quad \text{für alle} \quad \xi \in S, \quad (9)$$

wobei  $S$  die von den Punktspiegelungen erzeugte Gruppe<sup>6)</sup> ist. Nun sind zwei Fälle zu unterscheiden: *Fall 1.* Es gibt  $A, B \in \mathbf{P}$  mit  $A \subset B$  und  $B \lesssim A$ .

*Fall 2.* Für alle  $A, B \in \mathbf{P}$  gilt:  $A \subset B \Rightarrow$  (nicht  $B \lesssim A$ ).

Im ersten Fall folgt sofort  $0 \subset B - A$  und nach (4)  $B - A \lesssim 0$ . Die strikte Inklusion  $0 \subset B - A$  im Verband  $\mathbf{P}$  bedeutet, dass das Polygon  $B - A$  einen inneren Punkt hat und damit auch ein (nicht ausgeartetes) Parallelogramm  $Q$  enthält:  $Q \subset B - A$ . Nach (6) und (2) folgt  $Q \lesssim 0$  und nach (4) und (5) auch  $Q' \lesssim 0$  für jedes Parallelogramm  $Q'$ , das aus  $Q$  durch zentrische Streckung mit positiv ganzzahligem Streckungsfaktor  $k$  hervorgeht. (Ein solches  $Q'$  kann stets durch «Zusammensetzen» genügend vieler parallelkongruenter Exemplare von  $Q$  erhalten werden!) Für jedes  $X \in \mathbf{P}$  gilt dann  $X \subset Q'$  bei geeignetem  $k$  und damit  $X \lesssim Q'$  und  $X \lesssim 0$ . Somit hat man wegen (1) und (2) für alle  $X, Y \in \mathbf{P}$  schliesslich  $X \lesssim Y$ , das heisst die Relation  $\lesssim$  leitet sich aus der identisch verschwindenden Massfunktion ab.

Im zweiten Fall kann für  $A \subset B$  niemals  $A \sim B$  gelten. Daher darf man aus (8) und (9) folgern (vgl. [6], insbesondere Satz 5), dass die Relation  $\sim$  mit der elementaren Inhaltsgleichheit übereinstimmt:

$$A \sim B \iff \mu(A) = \mu(B) \tag{10}$$

( $\mu$  bezeichne eine elementare Inhaltsfunktion). Es bleibt zu zeigen, dass sogar

$$A \lesssim B \iff \mu(A) \leq \mu(B)$$

gilt. Zu beliebigen  $A, B \in \mathbf{P}$  gibt es stets Polygone  $A', B' \in \mathbf{P}$  mit der Eigenschaft  $\mu(A') = \mu(A), \mu(B') = \mu(B)$ , derart dass

$$\text{entweder } A' \subseteq B' \text{ oder } A' \supset B'$$

gilt. Es sei nun  $A \lesssim B$ . Wäre  $\mu(A) > \mu(B)$ , so hätte man auch  $\mu(A') > \mu(B')$ , und es müsste von den beiden genannten Möglichkeiten die zweite,  $A' \supset B'$ , vorliegen. Nach (6) würde dann  $B' \lesssim A'$ , also wegen (10)  $B \sim B' \lesssim A' \sim A, B \lesssim A$  und damit  $A \sim B$  folgen, im Widerspruch zu (10). Schliesslich sei  $\mu(A) \leq \mu(B)$ , das heisst  $\mu(A') \leq \mu(B')$ : dann muss  $A' \subseteq B'$  sein; denn die Annahme  $A' \supset B'$  führt, da  $\mu$  elementare Inhaltsfunktion in  $\mathbf{P}$  ist, zu  $\mu(A') > \mu(B')$ . Somit folgt  $A' \lesssim B'$ , also  $A \lesssim B$ .

ARNOLD KIRSCH, Giessen

LITERATURVERZEICHNIS

[1] G. AUMANN, *Sind die elementargeometrischen Figuren Mengen?* Elem. d. Math. 7, 25–28 (1952).  
 [2] W. BOLTJANSKI, *Zerlegungsgleichheit ebener Polygone.* Bul. Inst. Pol. Iași 4(8), 33–38 (1958).  
 [3] H. HADWIGER, *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie* (Berlin–Göttingen–Heidelberg 1957).  
 [4] H. HADWIGER und P. GLUR, *Zerlegungsgleichheit ebener Polygone.* Elem. d. Math. 6, 97–106 (1951).  
 [5] H. HERMES, *Einführung in die Verbandstheorie* (Berlin–Göttingen–Heidelberg 1955).  
 [6] A. KIRSCH, *Über die Bedeutung der Relation «zerlegungsgleich» in der elementaren Flächeninhaltslehre.* Math.-Phys. Sem.-Ber. 9, 190–206 (1963).  
 [7] A. KIRSCH, *Über Ordnungshomomorphismen endlicher Boolescher Verbände auf Ketten.* Arch. d. Math. 14, 84–94 (1963).

<sup>6)</sup> Auf die ausgezeichnete Rolle, welche die Gruppe  $S$  in der elementaren Inhaltslehre spielt, haben wohl zuerst H. HADWIGER und P. GLUR in [4] und dann W. BOLTJANSKI in [2] hingewiesen.