# Starre, kippende, wackelige und bewegliche Achtflache

Autor(en): **Wunderlich, W.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **20 (1965)**

Heft 2

PDF erstellt am: **27.04.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-23921

**Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

**Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

**http://www.e-periodica.ch**

ELEMENTE DER MATHEMATIK
Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

*Zeitschrift zur Pflege der Mathematik*
*und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts*
*Organ für den Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrer*

Publiziert mit Unterstützung des Schweizerischen Nationalfonds
zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung

El. Math. Band XX Heft 2 Seiten 25–48 10. März 1965

# Starre, kippende, wackelige und bewegliche Achtflache

Ein von acht Dreiecken gebildetes *Achtflach* oder *Oktaeder* besitzt bekanntlich sechs Ecken und zwölf Kanten, von denen bei gleichartigem Bau je vier in einer Ecke zusammentreffen. Bezeichnet man die Gegeneckenpaare mit $A_0$, $A_1$, $B_0$, $B_1$ und $C_0$, $C_1$, so besteht das Kantensystem aus allen Verbindungsstrecken dieser Punkte mit Ausnahme der Diagonalen $A_0 A_1$, $B_0 B_1$ und $C_0 C_1$. Falls einander die Dreiecksflächen nicht durchsetzen, so lässt sich leicht ein Kartonmodell herstellen, das im allgemeinen starr sein wird, auch wenn die Verbindungen längs der Kanten flexibel sind. Finden gegenseitige Durchdringungen statt, so können im Modell bis zu vier Dreiecksflächen offen bleiben. In allen Fällen lässt sich durch Materialisierung der Kanten ein Stabmodell anfertigen, das ebenfalls im allgemeinen starr sein wird, selbst wenn die Stäbe in den Ecken gelenkig miteinander verbunden sind. Die gewohnte Starrheit ist jedoch keineswegs zwangsläufig bedingt, und die vorliegende Note[1]) soll die verschiedenartigen Möglichkeiten des Verhaltens solcher Oktaeder erörtern.

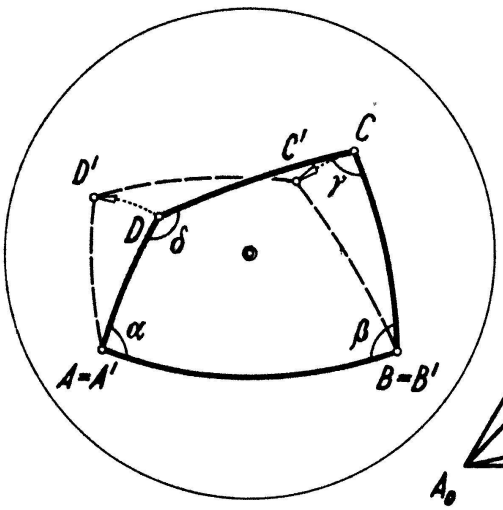
## I. Konvexe Oktaeder

Seit CAUCHY (1812) weiss man, dass jedes *konvexe Polyeder starr* ist [1][2]). Dies gilt im besonderen also auch für *konvexe Oktaeder*. Der Nachweis läuft auf die Behauptung hinaus, dass zwei *konvexe* Achtflache, die in den *Kantenlängen* und damit in den *Kantenwinkeln* übereinstimmen, auch paarweise gleiche *Flächenwinkel* aufweisen und daher *kongruent* sind.

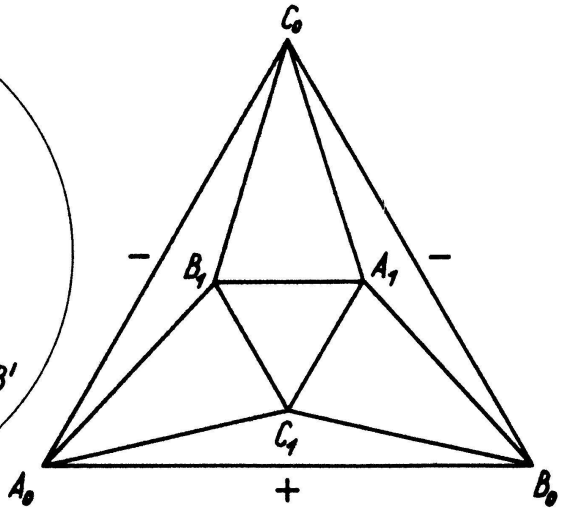
Zu diesem Zweck werden die von entsprechenden Ecken ausgehenden (konvexen) *Vierkante* verglichen. Die Deformationen eines solchen, längs der Kanten gelenkig beweglich zu denkenden Vierkants werden am besten überblickt, wenn man es mit einer Kugel schneidet, die ihren Mittelpunkt im Scheitel hat: man erhält so ein (konvexes) *sphärisches Gelenkviereck ABCD* mit starren Seiten (Figur 1). Wird es unter Erhaltung der Seitenlängen in eine wieder als konvex vorauszusetzende Form $A'B'C'D'$ deformiert, wobei etwa der Winkel $\alpha$ bei $A$ grösser geworden ist ($\alpha' > \alpha$), so wächst auf Grund des sphärischen Kosinussatzes die Diagonale $BD$ ($B'D' > BD$), und daher nimmt auch der gegenüberliegende Winkel $\gamma$ bei $C$ zu ($\gamma' > \gamma$). So einleuchtend es erscheint, dass dies zwangsläufig eine Verkleinerung der beiden anderen Winkel nach

[1]) Nach einem am 29. Mai 1963 in Zagreb gehaltenen Vortrag.
[2]) Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 32.

sich zieht ($\beta' < \beta$, $\delta' < \delta$), so ist der strenge Beweis dieser Tatsache auf der Kugel – wo man im Gegensatz zur Ebene nicht mit der Konstanz der Winkelsumme operieren kann – ziemlich umständlich. Ein elementarer, jedoch mancherlei Fallunterscheidungen verlangender Beweis wäre nach dem Vorbild von E. STEINITZ [2] zu führen[3]), der eine diesbezügliche Lücke bei CAUCHY geschlossen hat; ein einfacher Beweis wäre wünschenswert.




Figur 1




Figur 2

Nehmen wir also die mit der Vergrösserung zweier gegenüberliegender Flächenwinkel eines Vierkants bei Wahrung der Konvexität einhergehende Verkleinerung der beiden anderen Flächenwinkel als bewiesen an. Für den Vergleich zweier in den Kantenlängen übereinstimmenden Oktaeder $O$ und $O'$ bringen wir nun bei den Kanten von $O$ eine *Signatur* an, indem wir alle Kanten, die beim Übergang zu $O'$ eine Vergrösserung des Flächenwinkels erfahren, mit einem Pluszeichen markieren, jene hingegen, bei welchen eine Verkleinerung des Flächenwinkels eintritt, mit einem Minuszeichen. Die beste Übersicht gewährt ein «Schlegel-Diagramm» nach dem Muster der Figur 2: Steht bei der Kante $A_0B_0$ etwa ein Plus, dann sind die Nachbarkanten $A_0C_0$ und $B_0C_0$ mit einem Minus zu versehen; damit haben aber die beiden Nachbarkanten $C_0A_0$ und $C_0B_0$ das gleiche Vorzeichen erhalten, was nicht zulässig ist. Dieser Widerspruch lehrt, dass die beiden konvexen Oktaeder $O$, $O'$ in allen Flächenwinkeln übereinstimmen müssen, also (gleich- oder gegensinnig) *kongruent* sind.

Ein *konvexes Oktaeder* mit unveränderlichen Kantenlängen ist demnach ein *starres Gebilde*. Es ist durch sein «Netz» (die Abwicklung) eindeutig bestimmt. So einfach die Herstellung des Modells durch Zusammenkleben der acht gegebenen Dreiecke ist, so schwierig scheint die geometrische Konstruktion des Oktaeders zu sein, die im allgemeinen auf ein Problem 8. Grades führen dürfte.

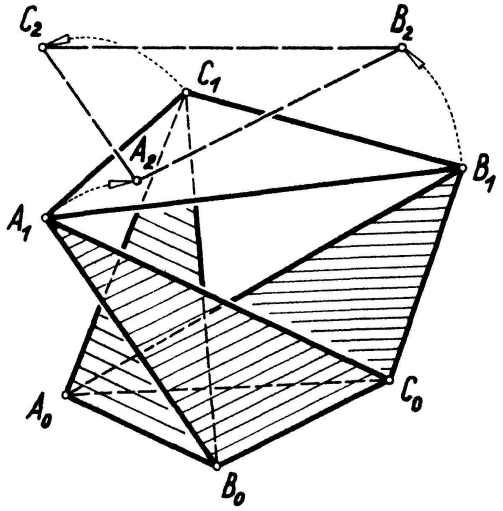
## II. Kippoktaeder

Beim Starrheitsbeweis des konvexen Oktaeders spielt die Konvexität eine wesentliche Rolle. Lässt man die Voraussetzung der Konvexität fallen, lässt man also auch einspringende Kanten zu, so ist die eindeutige Existenz des durch sein Netz gegebenen Achtflachs nicht mehr gesichert.

[3]) Der indirekte Beweis daselbst zeigt, dass die gleichzeitige Vergrösserung (Verkleinerung) der Winkel $\alpha$ und $\beta$ die Verlängerung (Verkürzung) der Seite $CD$ bedingen würde.

So kann es vorkommen, dass zu ein und demselben Netz aus acht Dreiecken *zwei* nur wenig voneinander verschiedene Achtflache existieren, sodass bei dem zugehörigen Kartonmodell der Übergang von der einen zur anderen Form mit sanfter Gewalt zu erzwingen ist. Das Modell erfährt dabei eine als *Kippung* bezeichnete sprunghafte Deformation.

Solche «*Kippoktaeder*» sind folgendermassen zu konstruieren: Man gehe aus von zwei kongruenten Dreiecken $A_1B_1C_1 \cong A_2B_2C_2$ in einigermassen benachbarter Raumlage. Die drei Symmetralebenen $\alpha$ von $A_1A_2$, $\beta$ von $B_1B_2$, $\gamma$ von $C_1C_2$ bilden bei allgemeiner Annahme ein Dreikant. Schneidet man dasselbe mit einer passenden Ebene $\pi_0$ nach einem Dreieck $A_0B_0C_0$, so definiert dieses mit $A_1B_1C_1$ bzw. $A_2B_2C_2$ zwei Oktaeder (Figur 3), die wegen $\overline{A_0B_1} = \overline{A_0B_2}$ usf. paarweise übereinstimmende




Figur 3

Kantenlängen, also ein gemeinsames Netz besitzen. Jede der beiden Oktaederformen ist im allgemeinen für sich starr, doch genügt bei einiger Nachgiebigkeit des Modellmaterials bereits eine schwache Torsion, um die Kippung zu bewirken.

Figur 4 stellt die beiden Formen eines einfachen, metrisch speziellen Kippoktaeders in Grund- und Aufriss dar. Hier sind die beiden als gleichseitig angenommenen Ausgangsdreiecke $A_1B_1C_1 \cong A_2B_2C_2$ in paralleler Lage und mit gemeinsamer dreizähliger Symmetrieachse zu denken. Die zu ihnen parallele Schnittebene $\pi_0$ wurde ferner in einem solchen Abstand gelegt, dass auch $A_0B_0C_0 \cong A_1B_1C_1$. In den Figuren wurden die Deckflächen fortgelassen, um den Einblick ins Innere freizugeben[4]). Bei festgehaltenem Basisdreieck $A_0B_0C_0$ vollzieht sich die Kipptransformation $A_1B_1C_1 \to A_2B_2C_2$ als Schraubung um die genannte Symmetrieachse. Zwischen dem zugehörigen Drehwinkel $\omega$, den beiden Höhen $h_1$, $h_2$ und dem Umkreisradius $r$ der gleichseitigen Dreiecke besteht die leicht abzuleitende Relation

$$h_2^2 - h_1^2 = 2\,r^2 \sin\frac{\omega}{2}. \tag{1}$$

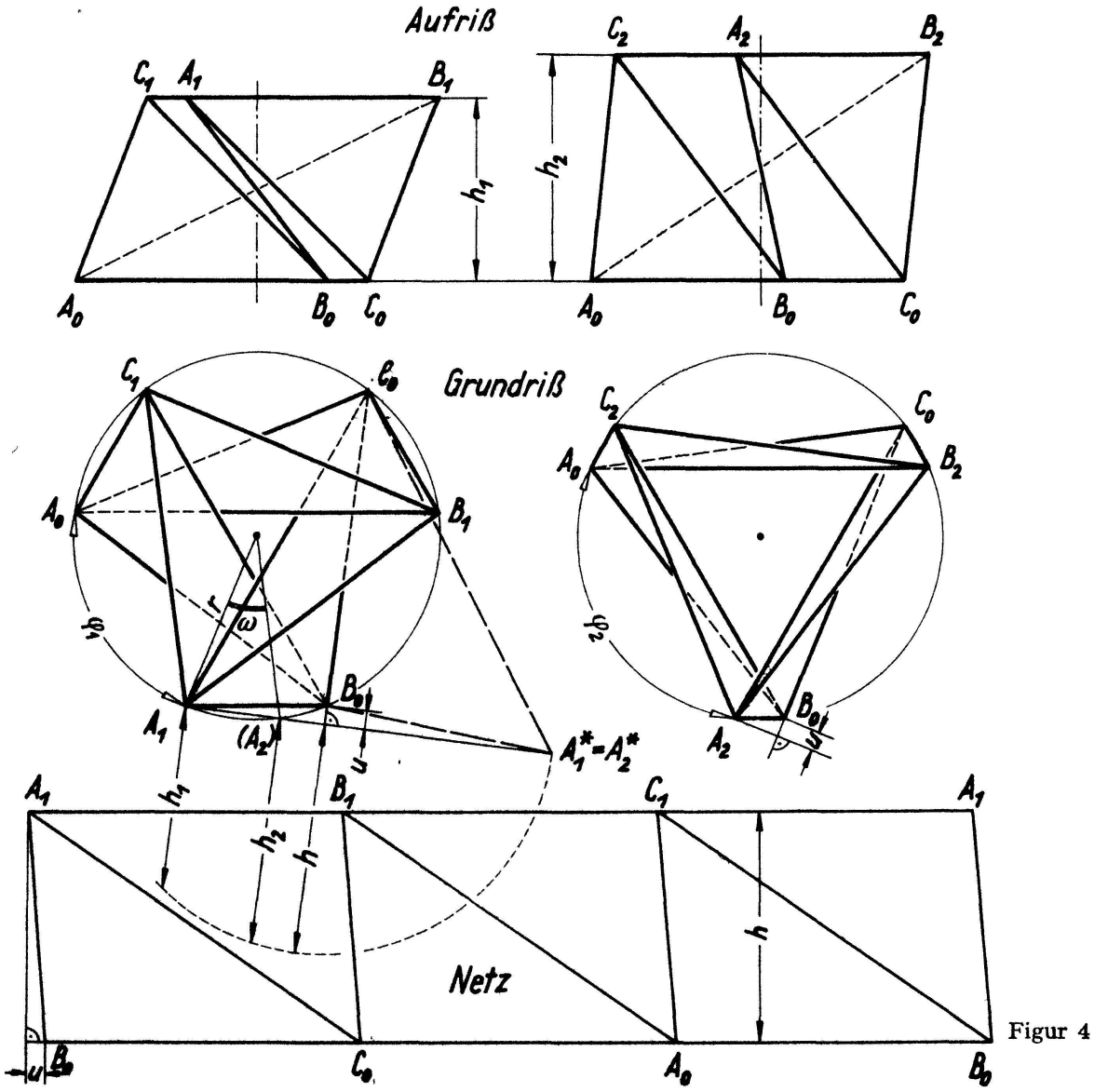
Für den (zur praktischen Durchführbarkeit der Kippung notwendigen) «Überhang» $u$ der sechs kongruenten Manteldreiecke findet man:

$$0 \leqq u = r\left(\cos\frac{\omega}{2} - \cos\frac{\pi}{6}\right) \leqq r\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \approx 0{,}134\,r. \tag{2}$$

[4]) Wird ein solches Modell mit sämtlichen acht Flächen ausgeführt, so empfiehlt es sich, irgendwo ein Loch für den Durchtritt der eingeschlossenen Luft vorzusehen.

Im linken *Grenzfall* $u = 0$ ($\omega = \pi/3$) tritt als erste Körperform eine Art dreiseitiger Doppelpyramide auf, während die zweite das Aussehen eines dreiseitigen Prismas mit eingezogenen Manteldiagonalen hat. – Der rechte Grenzfall ($\omega = 0$) gehört schon in den nächsten Abschnitt.

Zu erwähnen wäre noch der *Sonderfall* $h_1 = 0$, bei welchem die erste Körperform nach Art eines «chapeau claque» vollständig in eine Ebene zusammenklappt.



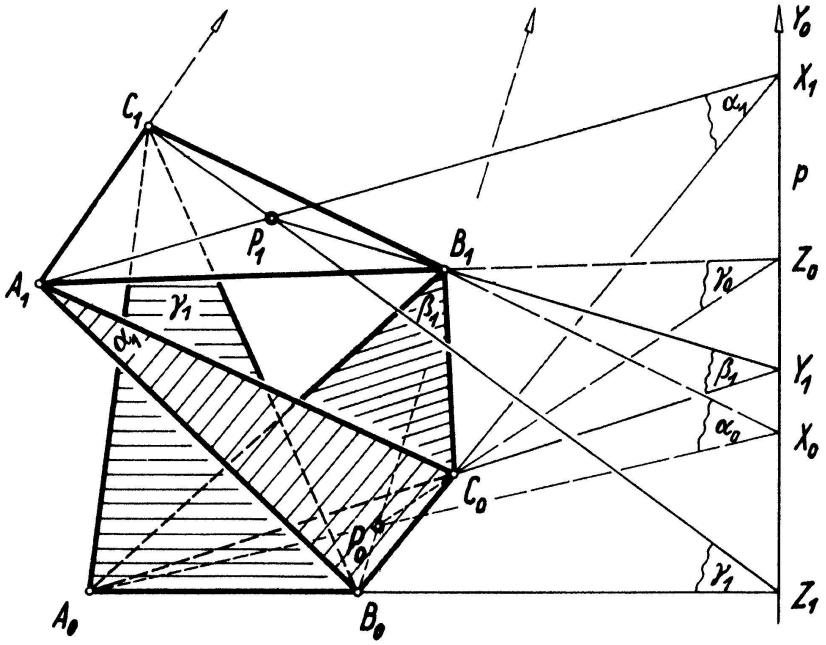

Figur 4

## III. Wackeloktaeder

Die beiden kongruenten Ausgangsdreiecke $A_1B_1C_1 \cong A_2B_2C_2$ in Abschnitt II hängen bekanntlich stets durch eine gewisse *Schraubung* zusammen. Rücken sie zusammen, so werden die benützten Symmetralebenen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ zu den *Bahnnormalebenen* $\alpha_1$ von $A_1$, $\beta_1$ von $B_1$ und $\gamma_1$ von $C_1$ einer Schraubung. Irgendein Schnittdreieck $A_0B_0C_0$ des Dreikants $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ legt dann zusammen mit $A_1B_1C_1 = A_2B_2C_2$ ein Oktaeder fest, das zwei infinitesimal benachbarte Formen besitzt, also statt der Kippung eine gewisse *infinitesimale «Wackelbewegung»* gestattet. Diese ist im übrigen am Modell deutlicher feststellbar, als zu erwarten wäre.

Mit Rücksicht darauf, dass bei einer Schraubung die Raumpunkte mit ihren Bahnnormalebenen durch ein MÖBIUSsches *lineares Nullsystem* verknüpft sind, muss der Punkt $P_1 = \alpha_1\beta_1\gamma_1$ (also der Scheitel des Dreikants $\alpha_1\beta_1\gamma_1$) der Ebene $\pi_1 = A_1B_1C_1$ angehören. Diese Bedingung ist nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend.

Ein *Wackeloktaeder* ist demnach folgendermassen zu konstruieren: Man geht aus von zwei Ebenen $\pi_0$, $\pi_1$ mit der Schnittgeraden $p$ und nimmt in $\pi_1$ ein beliebiges Dreieck $A_1B_1C_1$ sowie einen keiner Dreieckseite angehörenden Punkt $P_1$ an; keiner der Punkte soll auf $p$ liegen (Figur 5). Die auf $p$ liegenden Punkte von $B_1C_1$, $C_1A_1$, $A_1B_1$ seien mit $X_0$, $Y_0$, $Z_0$ bezeichnet, jene von $P_1A_1$, $P_1B_1$, $P_1C_1$ mit $X_1$, $Y_1$, $Z_1$. Nach DESARGUES sind $X_0X_1$, $Y_0Y_1$, $Z_0Z_1$ drei Punktepaare einer Involution. Nun ziehe man in $\pi_0$ drei von $p$ verschiedene und keinem Büschel angehörende Geraden durch $X_1$, $Y_1$ und $Z_1$; sie bilden die Seiten eines Dreiecks $A_0B_0C_0$. – Die Verbindungsgeraden $A_0X_0$ und $B_0Y_0$ liefern einen Schnittpunkt $P_0$. Weil die Gegenseitenpaare des vollständigen Vierecks $A_0B_0C_0P_0$ auf $p$ ebenfalls drei Punktepaare einer DESARGUESschen Involution ausschneiden und diese wegen der gemeinsamen Punktepaare $X_0X_1$, $Y_0Y_1$ mit der erstgenannten identisch ist, muss auch die Gerade $C_0Z_0$ durch $P_0$ gehen.




Figur 5

Um nun nachzuweisen, dass das durch $A_0B_0C_0$ und $A_1B_1C_1$ definierte Oktaeder ein wackeliges ist, ist nur zu zeigen, dass die drei Elementenpaare $A_1$, $\alpha_1 = A_1B_0C_0$, $B_1, \beta_1 = B_1C_0A_0$ und $C_1, \gamma_1 = C_1A_0B_0$ eine Nullkorrelation bestimmen. Eine solche kann bekanntlich durch zwei reziproke Polare und einen Nullstrahl festgelegt werden. Verwenden wir hierzu die Geraden $A_1B_1$ und $C_0P_1$ sowie den Strahl $C_1A_0$, so werden den Punkten $A_1$ und $B_1$ tatsächlich die Nullebenen $A_1C_0P_1 = \alpha_1$ und $B_1C_0P_1 = \beta_1$ zugewiesen, und weiters gehört zu $C_1$ die von den Nullstrahlen $C_1A_0$ und $C_1P_1$ (Treffgerade von $A_1B_1$ und $C_0P_1$) aufgespannte Ebene $C_1A_0P_1 = \gamma_1$. – Zum Punkt $A_0 \in \beta_1\gamma_1$ gehört ferner die ihn mit $B_1C_1$ verbindende Nullebene $\alpha_0 = A_0B_1C_1$, und analog gehören zu $B_0$ und $C_0$ die Nullebenen $\beta_0 = B_0C_1A_1$ und $\gamma_0 = C_0A_1B_1$. Schliesslich ist $P_0 = \alpha_0\beta_0\gamma_0$ der Nullpunkt von $\pi_0 = A_0B_0C_0$ und ebenso $P_1$ der Nullpunkt von $\pi_1$.

Aus dem Gesagten folgt unter anderem, dass $A_0B_0C_0P_1$ und $A_1B_1C_1P_0$ ein *Möbiussches Tetraederpaar* bilden, denn die Ecken des einen Tetraeders liegen in den Seitenflächen des anderen und umgekehrt. Die beiden Tetraeder sind einander also (im projektiven Sinne) gleichzeitig eingeschrieben und umgeschrieben. – Mit einem Wackeloktaeder sind im übrigen *vier Möbiussche Tetraederpaare* verbunden, weil ja je zwei gegenüberliegende Seitenflächen eine infinitesimale Relativbewegung ausführen, welche ein lineares Nullsystem erzeugt.

Die Wackeloktaeder hat W. BLASCHKE entdeckt, der ihre infinitesimale Beweglichkeit als eine affine Eigenschaft hervorhob [3]. Aus der zugrundeliegenden Nullkorrelation und der daraus abgeleiteten rein projektiven Konstruktion geht aber klar hervor, dass es sich bei der Wackeligkeit sogar um eine *projektive Eigenschaft* handelt: Jedes durch Kollineation aus einem Wackeloktaeder gewonnene Achtflach ist auch ein (wenigstens) wackeliges.

Aus Figur 5 ist noch herauszulesen, dass ein *konvexes Oktaeder niemals wackelig* sein kann: es müssten ja sonst die Spuren $P_1A_1$, $P_1B_1$ und $P_1C_1$ ganz im Aussengebiet des Dreiecks $A_1B_1C_1$ verlaufen, was offensichtlich unmöglich ist.

Das metrisch spezielle, eine dreizählige Drehsymmetrie aufweisende Wackeloktaeder, das zum Grenzfall $\omega = 0$ von (2) gehört, ist dadurch charakterisiert, dass die gegenüberliegenden Flächen $A_0B_0C_0$ und $A_1B_1C_1$ gleichseitige Dreiecke sind, die vermöge einer Viertelschraubung um die gemeinsame Symmetrieachse auseinander hervorgehen ($\varphi_1 = \varphi_2 = \pi/2$ in Figur 4). Die zugehörigen Möbiustetraeder sind übrigens auch in projektiver Hinsicht ausgezeichnet, indem sie sich in neunfacher hyperboloidischer Lage befinden [4].

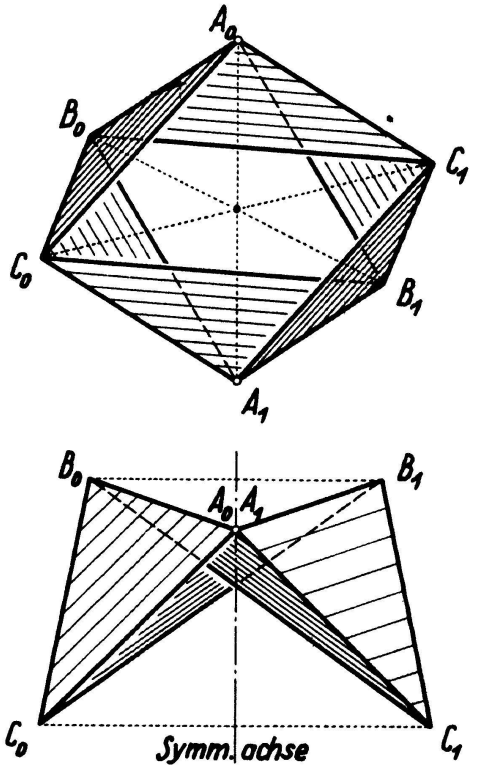
## IV. Bricardsche Gelenkoktaeder

So merkwürdig bereits das Auftreten kippender und wackeliger Achtflache an und für sich ist, weit erstaunlicher noch ist die Existenz von *Oktaedern mit endlicher, kontinuierlicher Beweglichkeit.* Sie wurden von R. BRICARD im Zuge einer systematischen Untersuchung von bewundernswerter Tiefgründigkeit gefunden [5]. Er gelangte dabei zu *drei Typen:*

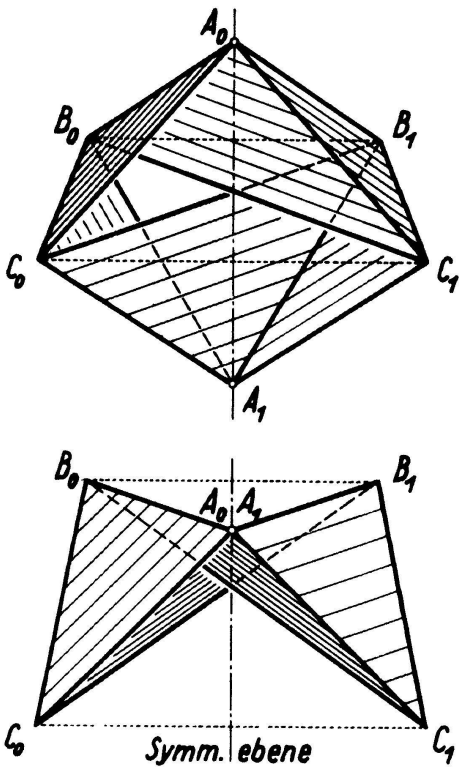
1. *Gelenkoktaeder mit Symmetrieachse.* Man gehe aus von zwei beliebigen, längs einer Seite zusammenhängenden Dreiecken $A_0B_0C_0$ und $A_1B_0C_0$, und unterwerfe sie einer axialen Spiegelung, welche $A_0$ mit $A_1$ vertauscht; die dabei aus $B_0$ und $C_0$ hervorgehenden Punkte seien $B_1$ und $C_1$ (Figur 6). Die beiden, gelenkig verbunden zu denkenden Dreieckspaare $A_0B_0C_0$, $A_1B_0C_0$ und $A_0B_1C_1$, $A_1B_1C_1$ weisen eine Beweglichkeit von zwei Freiheitsgraden auf. In jeder Lage sind auf Grund der Symmetrie die Strecken $B_0C_1$ und $B_1C_0$ gleich lang, sodass die Festsetzung ihrer gemeinsamen Länge die Beweglichkeit noch nicht aufhebt, sondern nur um einen Grad auf *Zwanglauf* reduziert. Man kann also die (kongruenten) Dreiecke $A_0B_0C_1$ und $A_1B_1C_0$ noch hinzufügen. Die restlichen Dreiecke $A_0B_1C_0$ und $A_1B_0C_1$ müssen offen bleiben, um die Bewegung des Modells nicht zu stören. – Ein hübsches, von W. BLASCHKE [6][5]) angegebenes spezielles Modell erhält man, wenn man die sechs materialisierten Dreiecke gleichschenklig-rechtwinklig ausführt, wobei ihre Hypotenusen die beiden gleichseitigen Öffnungen beranden.

[5]) Dort steht das (aus einem Würfel abgeleitete) Modell in Zusammenhang mit der bekannten Konfiguration von PETERSEN-MORLEY.

2. *Gelenkoktaeder mit Symmetrieebene.* Man gehe wieder von zwei beliebigen, längs einer Seite gelenkig zusammenhängenden Dreiecken $A_0B_0C_0$ und $A_1B_0C_0$ aus, spiegle sie diesmal jedoch an einer durch $A_0$ und $A_1$ gehenden Ebene; die dabei aus $B_0$ und $C_0$




Figur 6




Figur 7

hervorgehenden Punkte seien $B_1$ und $C_1$ (Figur 7). Dieselben Betrachtungen wie unter 1 lehren, dass man noch die Dreiecke $A_0B_0C_1$ und $A_1B_1C_0$ (mit gleichen Basen $\overline{B_0C_1} = \overline{B_1C_0}$) hinzufügen kann, ohne die Beweglichkeit ganz aufzuheben. Die restlichen Dreiecke $A_0B_1C_0$ und $A_1B_0C_1$ müssen wieder offen bleiben. – Ein hübsches spezielles Modell ergibt sich, wenn die Ausgangsdreiecke gleichseitig und die Zusatzdreiecke gleichschenklig-rechtwinklig (mit rechten Winkeln bei $A_0$ und $A_1$) ausgeführt werden. In der Mittellage fallen die Ecken mit jenen eines regulären Oktaeders zusammen.

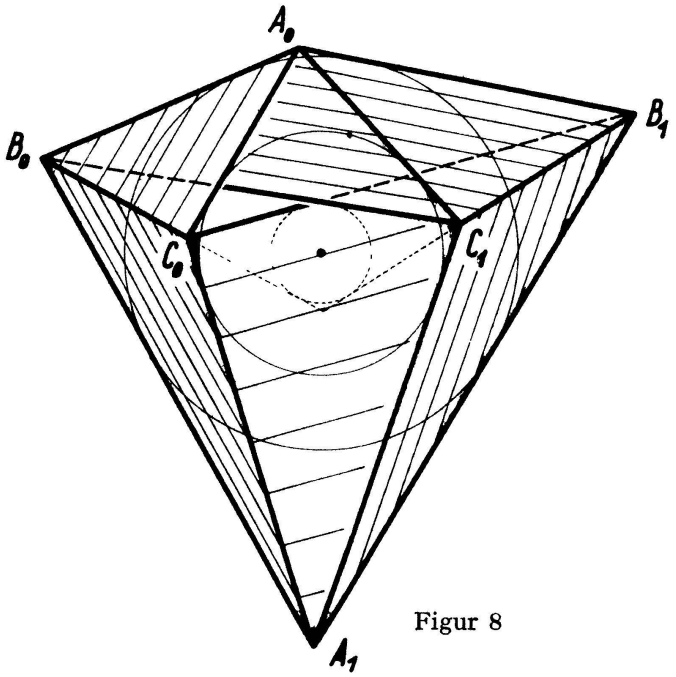
3. *Gelenkoktaeder mit platten Grenzformen.* Man geht aus von zwei konzentrischen Kreisen einer Ebene $\pi$ und zwei beliebigen Punkten $A_0$, $A_1 \in \pi$ ausserhalb des grösseren Kreises. Die Tangenten aus $A_0$ und $A_1$ an den einen Kreis liefern im Schnitt die Punkte $B_0$ und $B_1$, die Tangenten an den anderen Kreis die Punkte $C_0$ und $C_1$ (Figur 8). Die Dreiecke $A_0B_1C_0$ und $A_1B_0C_1$ bleiben wieder offen. Das so konstruierte Oktaeder, dessen Beweglichkeit nicht unmittelbar einzusehen ist, besitzt ausser der Ausgangslage noch eine zweite ebene Grenzform. – Das spezielle, als Beispiel für den 2. Typ angeführte Achtflach gehört im übrigen auch zum 3. Typ.

Alle drei Modelle bestehen aus einem beweglichen Band aus sechs materialisierten Dreiecken. Die auf diesen in den Abbildungen eingetragenen, durchgehenden Schraffen verlaufen jeweils längs der freien Randkanten.

Die endliche Beweglichkeit eines BRICARDschen Oktaeders ist keine projektive Eigenschaft mehr. Eine Kollineation verwandelt es im allgemeinen bloss in ein

*wackeliges Achtflach.* Auch mit einem Gelenkoktaeder sind aber jedenfalls in jeder nicht ausgearteten Lage vier Paare von Möbiustetraedern verbunden.

Während sich die Betrachtungen über kippende oder wackelige Achtflache unschwer auf andere Polyeder ausdehnen lassen, scheint über sonstige Vielflache mit paradoxer Beweglichkeit nichts bekannt zu sein. W. WUNDERLICH, Wien




Figur 8

LITERATURVERZEICHNIS

[1] A. L. CAUCHY, *IIe mémoire sur les polygones et les polyèdres*, J. Fc. polyt. 9, 87–98 (1813).
[2] E. STEINITZ, H. RADEMACHER, *Vorlesungen über die Theorie der Polyeder*, Grundlehren math. Wiss. *41*, 57ff (Berlin 1934).
[3] W. BLASCHKE, *Wackelige Achtflache*, Math. Z. 6, 85–93 (1920).
[4] A. REUSCHEL, *Konstruktion zweier gleich grosser regulärer Tetraeder, die einander zugleich ein- und umgeschrieben sind.* El. Math. *4*, 7–11 und 25–30 (1949).
[5] R. BRICARD, *Mémoire sur la théorie de l'octaèdre articulé*, J. math. pur. appl. *3*, 113–148 (1897). – *Leçons de cinématique, II*, 318–332 (Paris 1927).
[6] W. BLASCHKE, *Analytische Geometrie*, 60 (Wolfenbüttel 1948).

# Eine ordnungstheoretische Charakterisierung des elementaren Flächeninhalts

Es sei $V$ ein verallgemeinerter Boolescher Verband mit Nullelement 0[1]) und $\mu$ eine (einfach additive) Massfunktion auf $V$, das heisst eine Abbildung von $V$ in die Menge $R^+$ der nichtnegativen reellen Zahlen, welche die Eigenschaft

$$A \cap B = 0 \Rightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) \qquad \text{(I)}$$

[1]) Das heisst $V$ sei ein abschnittskomplementärer distributiver Verband; siehe hierzu etwa [5][2]), Seite 48f. Mit anderen Worten: In $V$ gelten genau dieselben Rechengesetze wie in einem Mengensystem, das mit zwei Mengen $A$, $B$ stets auch die Vereinigungsmenge $A \cup B$ und (im Falle $A \subseteq B$) die Differenz $B - A$ enthält.