Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 19 (1964)
Heft: 6

Artikel: Widerspruchsfreiheit und Unabhängigkeit der Kontinuumhypothese
Autor: Mostowski, Andrzej
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-23305

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrer

Publiziert mit Unterstützung des Schweizerischen Nationalfonds
zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung

El. Math. Band XIX Nr. 6 Seiten 121–144 Basel, 10. November 1964

Widerspruchsfreiheit und Unabhängigkeit der Kontinuumhypothese

1. Die Mathematiker lieben es, wissenschaftliche Ereignisse, die sich um sie abspielen, zu klassifizieren. Jeder ist bereit, «die wichtigste Entdeckung der letzten n Jahre» mit Sicherheit zu nennen und zu behaupten, dass seine Wahl die best mögliche sei. Da der Autor dieses Aufsatzes keine Ausnahme von der allgemeinen Regel ist, wird er gleich seine Ansicht dem geduldigen Leser mitteilen: ich habe keine Zweifel, dass die wichtigsten mathematischen Ereignisse der letzten 25 Jahre die Entdeckungen der Widerspruchsfreiheit und der Unabhängigkeit der allgemeinen Kontinuumhypothese waren. Der erste Beweis wurde vor etwa 25 Jahren von GÖDEL gefunden, der zweite im letzten Jahr von P. J. COHEN.

Natürlich ist jede Behauptung, welche die Bedeutung einer Entdeckung mit der einer anderen vergleicht, in hohem Masse subjektiv. Ich bin überzeugt, dass die oben getroffene Wahl von den meisten Logikern und Mengentheoretikern und wahrscheinlich auch von vielen anderen Mathematikern gebilligt wird. Diese Überzeugung gründe ich darauf, dass die Kontinuumhypothese eine ganz besondere Stellung unter den ungelösten mathematischen Problemen einnimmt.

2. Die Kontinuumhypothese wurde von CANTOR im Jahre 1884 ausgesprochen. Sie besagt, dass es keine Menge von reellen Zahlen gibt, deren Mächtigkeit grösser als die der natürlichen Zahlen aber kleiner als die der Menge aller reellen Zahlen ist. Mit anderen Worten besagt die Hypothese, dass es für jede Menge X der reellen Zahlen eine eineindeutige Funktion gibt, die entweder die Menge aller reellen Zahlen auf die Menge X oder die Menge X in die Menge der natürlichen Zahlen abbildet

Die verallgemeinerte Kontinuumhypothese, die auch von CANTOR herrührt, betrifft eine beliebige Menge A und die Familie $P(A)$ aller Untermengen von A und besagt, dass jede Unterfamilie von $P(A)$ entweder mit A oder mit $P(A)$ gleichmächtig ist. Diese Hypothese schränkt also den Bereich aller möglichen Mächtigkeiten ein: es gibt keine Mächtigkeit, die grösser als die Mächtigkeit von A aber kleiner als die Mächtigkeit von $P(A)$ ist. CANTOR behauptete, seine Hypothese bewiesen zu haben; er muss aber eine Lücke in seinem Beweis bemerkt haben, da er ihn nie veröffentlicht hat.

3. Bekanntlich gibt es viele ungelöste Probleme und Hypothesen in der Mathematik und insbesondere in der Mengenlehre. Die Kontinuumhypothese ist berühmt aus vielen Gründen.

Der erste Grund ist, dass die Hypothese mit sehr einfachen Begriffen zu tun hat: es genügt, die bescheidensten Anfänge der Mengenlehre zu kennen, um diese Hypothese gut zu verstehen und ihre Tragweite zu begreifen.

Der zweite Gund ist, dass das Problem, mit welchem sich die Hypothese beschäftigt, grundlegend ist. Immer wenn wir eine Menge antreffen, ist die Frage nach ihrer Mächtigkeit die einfachste, da sie die Natur der Elemente der Menge überhaupt nicht berührt. Es ist also mehr als naheliegend, diese Frage in bezug auf die Menge der reellen Zahlen zu stellen, da diese Menge gewiss zu den in der Mathematik am meisten gebrauchten gehört. Diese Frage führt uns aber sogleich auf die Kontinuumhypothese, da diese Hypothese besagt, dass die Mächtigkeit der Menge aller reellen Zahlen die zweitgrösste unendliche Mächtigkeit ist.

Der dritte Grund hängt mit den philosophischen Grundlagen der Mathematik zusammen. Wir wollen die Bedeutung der Kontinuumhypothese für die Philosophie der Mathematik erörtern, obgleich die hier in Frage kommenden Begriffe nicht ganz einfach sind.

Die Mathematiker des XIX. Jahrhunderts haben bekanntlich alle mathematischen Grundbegriffe und insbesondere den Zahlbegriff auf die Mengenlehre zurückgeführt. Der Mengenbegriff erwies sich aber als viel schwieriger, als man zuerst glaubte. Die wichtigste Frage der Philosophie der Mathematik lautet also: Was sind Mengen und wie entdecken wir die Gesetze, denen sie gehorchen? Was sind insbesondere Mengen von reellen Zahlen? Ist jede Menge durch eine definierbare Eigenschaft ihrer Elemente bestimmt (also letzten Endes mit dieser Eigenschaft identisch), oder ist sie ein abstraktes Objekt, welches unabhängig von unseren Denkkonstruktionen existiert? Die Mehrheit der Mathematiker würde sicherlich vorziehen, die zweite dieser Alternativen (welche oft als der mathematische Platonismus bezeichnet wird) zu wählen. Wenn aber Mengen existieren in demselben Sinn wie zum Beispiel physikalische Objekte, so sollte es möglich sein, sie zum Beispiel zu zählen. Das vollständige Fiasco aller Versuche, die Kontinuumhypothese in der einen oder anderen Richtung zu entscheiden, ist ein wichtiges Argument gegen den mathematischen Platonismus.

Endlich ist die Kontinuumhypothese interessant vom rein mathematischen Standpunkt aus. Die gewöhnliche Kontinuumhypothese macht es möglich, verschiedene sonderbare Mengen zu konstruieren; sie bildet also ein wichtiges Werkzeug, welches die Bildung von Gegenbeispielen (besonders in der Theorie der reellen Funktionen) gestattet. Die verallgemeinerte Kontinuumhypothese vereinfacht in hohem Masse die Theorie der Potenzierung der Kardinalzahlen. Da die Additions- und Multiplikationsgesetze für Kardinalzahlen sehr einfach sind, scheint es natürlich zu erwarten, dass auch die Potenzierung von einfachen Gesetzen beherrscht wird.

4. Alle diese Erwägungen sprechen für die Wichtigkeit der Kontinuumhypothese. Wir sollen also versuchen, diese Hypothese zu beweisen oder zu widerlegen.

Leider ist das Problem der Wahrheit in der Mathematik nicht einfach. Wiederholen wir noch einmal: Wenn Mengen in demselben Sinne wie materielle Objekte existierten, könnten wir erwarten, dass die Wahrheit oder Falschheit der Hypothese einmal entdeckt werden wird. Wenn aber Mengen nur unsere eigenen Konstruktionen sind, kann die Antwort auf die Frage, ob die Hypothese wahr oder falsch ist, davon abhängen, welche Konstruktionen wir als zulässig annehmen.

Der Vergleich mit dem Parallelenaxiom wird die Situation klarmachen. Falls wir die Geometrie axiomatisch auffassen, hat die Frage nach der Wahrheit oder Falschheit des Parallelenpostulats keinen Sinn, da wir Axiome nach unserem Belieben annehmen oder verwerfen dürfen. Die Frage nach der Wahrheit des Postulats wird also durch die Frage nach seiner Widerspruchsfreiheit und Unabhängigkeit ersetzt.

Die Lage ändert sich, wenn wir nicht die axiomatisch aufgebaute Geometrie treiben, sondern die Eigenschaften des physikalischen Raumes untersuchen. Die Frage, ob das Parallelenaxiom wahr ist, hat dann einen Sinn, ist aber keine mathematische Frage mehr.

Im Fall der Mengenlehre wissen wir nicht, ob die zweite Form des Problems überhaupt möglich ist, da wir nichts über die Zulässigkeit des mathematischen Platonismus sagen können. Dagegen sind die formalen Probleme der Widerspruchsfreiheit und Unabhängigkeit sinnvoll und höchst interessant.

5. Die Axiomatik der Mengenlehre, die vor etwa 50 Jahren von E. Zermelo zum ersten Mal formuliert wurde, hat zwei Grundbegriffe: «Menge» und die Relation des Enthaltens. Die Axiome lauten wie folgt: (1) Mengen, die dieselben Dinge als Elemente enthalten, sind identisch; (2) für je zwei Dinge gibt es eine Menge, die genau diese Dinge als Elemente enthält; (3) die Vereinigung aller Mengen, die als Elemente in einer Menge enthalten sind, ist eine Menge; (4) für jede Menge X gibt es eine Menge, die als Elemente alle Untermengen von X enthält; (5) es gibt mindestens eine unendliche Menge; (6) es sei $F(x, y)$ eine Bedingung, die mit Hilfe der logischen und mengentheoretischen Grundbegriffe ausdrückbar ist. Falls es für jedes x genau ein $y = y(x)$ gibt, welches zusammen mit x diese Bedingung erfüllt, so gibt es für jede Menge X eine Menge Y, die aus allen Elementen von der Form $y(x)$ besteht, wobei x alle Elemente von X durchläuft. Das letzte Axiom ist (7) das Auswahlaxiom, das wir nicht explizite anführen.

Dieses Axiomensystem ist nach Zermelo und Fraenkel genannt und wird gewöhnlich mit dem Symbol $Z - F$ bezeichnet. Unsere Darstellung ist insofern noch nicht befriedigend, als wir gewisse Begriffe wie «Vereinigung», «unendlich» usw. nicht durch die Grundbegriffe erklärt haben. Diese Lücke lässt sich aber sehr leicht ausfüllen. Wir bemerken noch, dass es mehrere andere Axiome für die Mengenlehre gibt, die zum Teil vom System $Z - F$ abweichen. Eine Diskussion der diesbezüglichen Fragen würde uns aber zu weit führen.

Wir führen noch einige «technische» Definitionen an, welche für die Leser gedacht sind, die den Grundgedanken der Widerspruchsfreiheit und der Unabhängigkeit der Kontinuumhypothese kennenlernen wollen.

Eine Folgerung aus den Axiomen (1)–(6) ist der (von Zermelo ursprünglich als Axiom angenommene) «Aussonderungssatz»: Es sei $F(x, u_1, \ldots, u_k)$ eine Bedingung, die mit Hilfe der logischen und mengentheoretischen Grundbegriffe ausgedrückt ist. Falls A eine Menge ist, so gibt es – für beliebige $u_1, \ldots, u_k$ – eine Untermenge von A, welche aus allen Elementen x von A besteht, die zusammen mit $u_1, \ldots, u_k$ die Bedingung F erfüllen. Diese Menge bezeichnen wir mit $\{x \text{ in } A : F(x, u_1, \ldots, u_k)\}$.

Wir betrachten insbesondere Bedingungen F, in welchen alle Existenz- und Allaussagen sich auf A beziehen. In einer solchen «auf A beschränkten» Bedingung F treten also keine Ausdrücke auf von der Form

(i) für jedes x (ii) es gibt ein x

wohl aber die Bedingungen

(i′) für jedes x aus A (ii′) es gibt ein x in A.

Falls wir in einer beliebigen Bedingung F alle Ausdrücke (i), (ii) durch (i′), (ii′) ersetzen, erhalten wir eine neue Bedingung $F^{(A)}$, die wir «die auf A relativierte Bedingung F»

nennen. Für jemand, der glaubt, dass es ausserhalb A keine Dinge gibt, sind F und $F^{(A)}$ äquivalente Bedingungen, da für ihn (i) und (i′) sowie auch (ii) und (ii′) dasselbe bedeuten.

Die Menge $\{x \text{ in } A: F^{(A)}(x, u_1, \ldots, u_k)\}$ nennen wir die Extension von F in A; die Elemente $u_1, \ldots, u_k$ nennen wir die Parameter der Extension.

6. Die Widerspruchsfreiheitsresultate von Gödel [1][1]) sprechen sich wie folgt aus:

I. Sind die Axiome (1)–(6) von $Z - F$ widerspruchsfrei, so bleiben sie widerspruchsfrei, wenn wir zu ihnen die verallgemeinerte Kontinuumhypothese (und das Auswahlaxiom (7)) hinzufügen.

(Die Bemerkung über das Auswahlaxiom ist eigentlich entbehrlich, da das Auswahlaxiom aus der verallgemeinerten Kontinuumhypothese folgt).

Gödel bewies diesen Satz durch die Konstruktion eines Modells. Er definiert (sich ausschliesslich auf die Axiome (1)–(6) stützend) eine transfinite Folge K_α von Mengen. Eine Menge X nennt er konstruierbar, falls sie zu einem K_α gehört. Die Hypothese:

jede Menge ist konstruierbar

nennt er das Konstruierbarkeitsaxiom.

Das Auswahlaxiom und die verallgemeinerte Kontinuumhypothese erweisen sich als Folgen des Konstruierbarkeitsaxioms. Gleichzeitig ist das Konstruierbarkeitsaxiom widerspruchsfrei, da es im Bereich der konstruierbaren Mengen erfüllt ist.

Wir müssen noch die Folge K_α definieren. Dies geschieht durch transfinite Induktion. K_0 ist die leere Menge; ist α eine Grenzzahl, so nehmen wir als K_α die Vereinigung aller K_β mit $\beta < \alpha$; ist $\alpha = \beta + 1$, so nehmen wir als K_α die Menge der Extensionen in K_β von allen möglichen Bedingungen F mit Parametern in K_β.

Wir können uns den Grundgedanken von Gödel wie folgt erklären. Nachdem ein K_β schon vorliegt, probieren wir, ob es ein Modell für die $Z - F$ Axiome ist. Zu diesem Zwecke stellen wir fest, ob der Aussonderungssatz in K_β gilt oder, was dasselbe ist, ob die Extensionen aller möglichen Bedingungen mit Parametern in K_β zu K_β gehören. Ist das nicht der Fall, so fügen wir die fehlenden Extensionen zu K_β hinzu und setzen diesen Prozess so lange fort, bis wir alle Ordnungszahlen ausgeschöpft haben. Im Bereich der so erhaltenen Mengen sind der Aussonderungssatz und, wie man zeigen kann, alle anderen Axiome mitsamt dem Konstruierbarkeitsaxiom erfüllt.

7. Das Problem der Unabhängigkeit der Kontinuumhypothese von den Axiomen (1)–(7) blieb für viele Jahre ungelöst. Sogar das anscheinend viel einfachere Problem der Unabhängigkeit des Konstruierbarkeitsaxioms trotzte allen Versuchen, die von vielen hervorragenden Logikern unternommen wurden. Es ist seit 1938 bekannt, dass Gödel einen Unabhängigkeitsbeweis dieser Hypothesen besitzt; trotz vielen Anfragen verriet er aber nie sein Geheimnis.

Im Jahre 1963 hat P. J. Cohen von der Universität Stanford, USA eine Methode gefunden, die ihm erlaubte, beinahe alle Unabhängigkeitsprobleme mit einem Schlage zu lösen. Seine Resultate sind in [2] veröffentlicht. Alle weiter unten aufgezählten Resultate von Cohen sind unter der Annahme bewiesen, dass die Axiome (1)–(6) widerspruchsfrei sind:

II. Die Axiome (1)–(6) bleiben widerspruchsfrei, wenn wir zu ihnen die Negation des Auswahlaxioms (7) oder sogar die folgende sehr starke Aussage hinzufügen:

Es gibt eine abzählbare Menge M mit den Eigenschaften: (i) die Elemente von M sind disjunkte Paare, deren Elemente Mengen von reellen Zahlen sind; (ii) es gibt keine Auswahlmenge für M (das heisst keine Menge A so dass $A \cap X$ genau ein Element hat für jedes Element X von M).

[1]) Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis Seite 125.

III. Die Axiome (1)–(6) bleiben widerspruchsfrei, wenn wir zu ihnen die Aussage hinzufügen: es gibt keine Relation, welche die Menge aller reellen Zahlen wohlordnet.

Die Sätze II und III beweisen die Unabhängigkeit des Auswahlaxioms.

IV. Die Axiome (1)–(6) bleiben widerspruchsfrei, wenn wir zu ihnen das Auswahlaxiom (7), sowie auch eine beliebige von den folgenden Aussagen hinzufügen:

Die Menge der reellen Zahlen hat die zweitgrösste, drittgrösste,..., $\omega + 1$-te unendliche Mächtigkeit.

Allgemeiner kann man zu (1)–(7) ohne Widerspruch die Aussage hinzufügen, dass die Mächtigkeit der Menge aller reellen Zahlen die $\alpha + 1$-te unendliche Kardinalzahl ist, wobei α eine im gewissen Sinne dieses Wortes definierbare Ordnungszahl ist. Man kann auch anstelle von $\alpha + 1$ einige (aber nicht alle!) definierbare Grenzzahlen nehmen.

Durch Satz IV ist die Unabhängigkeit der Kontinuumhypothese bewiesen.

V. Die Axiome (1)–(6) bleiben widerspruchsfrei falls man zu ihnen das Axiom (7), die verallgemeinerte Kontinuumhypothese sowie auch die Negation des Konstruierbarkeitsaxiom hinzufügt.

Satz V löst die Frage der Unabhängigkeit des Konstruierbarkeitsaxioms. Wie wir sehen, sind alle wesentlichen Unabhängigkeitsfragen durch die Sätze von COHEN gelöst.

Die Modelle, die COHEN konstruierte, um seine Resultate zu erhalten, sind in grossen Zügen dem Modell von GÖDEL ähnlich. COHEN beginnt nicht mit der leeren Menge, sondern mit einer zuerst unbestimmten Menge X und setzt $K'_0 = X$; weitere Mengen K'_α werden in derselben Weise, wie bei GÖDEL definiert. Durch eine sehr geistreiche Wahl von X erreicht COHEN, dass für ein α die Menge K'_α das gesuchte Modell ist. Es ist leider nicht möglich, hier die Methode zu beschreiben, die COHEN gefunden hat, um die Menge X zu bestimmen.

Inzwischen haben einige andere Mathematiker die Cohensche Methode aufgenommen und mit ihrer Hilfe die Unabhängigkeit weiterer Hypothesen bewiesen. Offen ist noch die Frage, ob die Existenz der messbaren Mengen von den Axiomen (1)–(6) unabhängig ist. Der Fortschritt in diesem Gebiet ist aber so schnell, dass wir sicher sein können, dass auch dieses Problem bald gelöst sein wird.

8. Die formalen Probleme der Widerspruchsfreiheit und der Unabhängigkeit der mengentheoretischen Hypothesen können also als prinzipiell gelöst betrachtet werden. Die axiomatische Mengenlehre befindet sich jetzt in derselben Lage, wie die axiomatische Geometrie nach den Arbeiten von KLEIN und POINCARÉ. Dagegen ist das Problem der Wahrheit nach wie vor offen. Dieses Problem existierte natürlich lange vor COHEN, die Cohenschen Arbeiten haben es aber in ein besonders helles Licht gestellt. Allem Anschein nach müssen wir uns mit der Existenz von zwei miteinander im Widerspruch stehenden und in gleichem Masse zulässigen Systemen der Mengenlehre abfinden. Im Wettkampf zwischen Platonismus und Formalismus hat der letztere wiederum einen Punkt gewonnen.

ANDRZEJ MOSTOWSKI, Warschau

LITERATURVERZEICHNIS

[1] KURT GÖDEL, *The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum-hypothesis with the axioms of set-theory.* Ann. Math. Stud. *3* (Princeton 1940).

[2] PAUL J. COHEN, *The independence of the continuum hypothesis,* Part I. Proc. Nat. Acad. Sci. USA *50,* 1143–1148 (1963); Part II, *ibid. 51,* 105–110 (1964).