Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

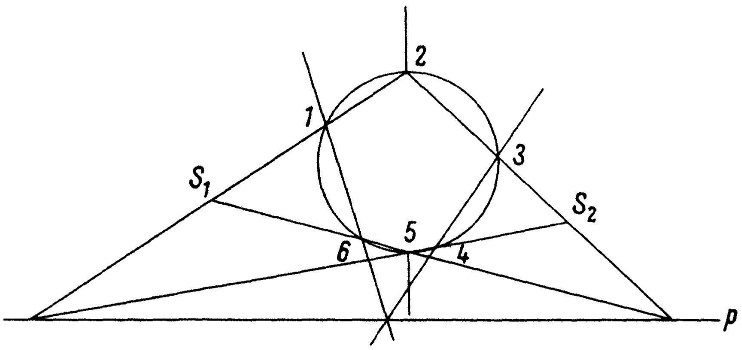
Band: 19 (1964)

Heft: 5

Rubrik: Aufgaben

Figur 1 kann nun wie folgt gelesen werden: Die Zeichenebene (= Grundrissebene) ist Symmetrieebene einer Fläche 2.O. [F] – in der Figur etwa einer Kugel – und schneidet aus [F] den gezeichneten Kegelschnitt aus. 25 ist Grundriss eines Kegelschnittes (25) auf [F]. $S_1 = 12 \times 56$ und $S_2 = 23 \times 45$ sind die Spitzen von zwei Kegeln mit der gemeinsamen Basiskurve (25). Nach obigem Satz wird die Fläche [F] vom Kegel S_1 in den Kegelschnitten (25) und (16) geschnitten, vom Kegel S_2 in den Kegelschnitten (25) und (34). Ebenfalls nach obigem Satz haben die beiden Kegel ausser dem Kegelschnitt (25) noch einen weiteren Kegelschnitt gemeinsam, der durch die Schnittpunkte von $(34) \times (61)$ auf [F] und die Schnittpunkte der Kegelumrissmantellinien 12×45 und 23×56 gehen muss. Wegen der Symmetrie ist der Grundriss dieses Kegelschnittes geradlinig und enthält die Punkte 12×45, 23×56, 34×61.

Es kann vorkommen, dass sich die Kegelschnitte (61) und (34) nicht reell auf [F] schneiden (vergleiche Figur 2). Der gezeichnete Kreis braucht dann nur als Kehlkreis eines einschaligen Hyperboloids [F^*] gelesen zu werden und sämtliche Schlüsse bleiben erhalten.



Figur 2

Der Pascalsche Satz braucht seiner projektiven Natur wegen bekanntlich nur für den Kreis bewiesen zu werden. Auf dem geschilderten Weg kommt man jedoch bei jedem gegebenen Kegelschnitt zum Ziel, wenn als Flächen [F], [F^*] im Fall der Hyperbel einbeziehungsweise zweischalige Hyperboloide gewählt werden, im Fall der Parabel elliptische beziehungsweise hyperbolische Paraboloide, im Fall des Geradenpaares zwei Kegel beziehungsweise Zylinder.

Duale Betrachtungen ergeben, allerdings nicht ebenso anschaulich, den Brianchonschen Satz, für den sich ein einfacher, ebenfalls räumlicher Beweis in Hilbert & Cohn-Vossen, Anschauliche Geometrie, S. 92 findet. O. Baier, München

Aufgaben

Aufgabe 461. a) Die variable Sehne $\overline{AB}$ eines Kreises vom Radius r ist Basis eines Quadrates. Wenn $\overline{AB}$ in paralleler Lage die ganze Kreisfläche überstreicht, so überstreicht die Quadratseite $\overline{CD}$ eine Fläche, deren Inhalt zu berechnen ist.

b) Der Schnittkreis K einer variablen Ebene mit einer Kugel vom Radius r ist Basis eines geraden Zylinders, dessen Höhe gleich dem Durchmesser von K ist. Wenn diese Ebene sich parallel verschiebt und dabei die ganze Kugel überstreicht, so überstreicht die Deckfläche des Zylinders einen Raum, dessen Volumen zu berechnen ist.

C. Bindschedler, Küsnacht

Lösung: a) Wird ein rechtwinkliges Koordinatensystem zugrunde gelegt, dessen Ursprung der Kreismittelpunkt ist, und wird die Lage der Kreissehne (Quadratbasis) $\overline{AB}$ parallel zur x-Achse gewählt, dann liegen die Endpunkte der Quadratseite $\overline{CD}$ auf der achsensymmetrischen, einfach geschlossenen Kurve S mit der Gleichung

$$y = 2\,|x| \pm \sqrt{r^2 - x^2}\,; \quad |x| \leq r\,.$$

Folglich überstreicht die Quadratseite $\overline{CD}$ die *konvexe Hülle* H der von S umschlossenen Fläche F.

F ist zur Kreisfläche inhaltsgleich, also $J(F) = \pi r^2$, da S die Superposition des Kreises $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$ und des Doppelstrahls $y = 2|x|$ darstellt. Die Restfläche $H - F$ wird einerseits durch die Verbindungsstrecke der beiden Hochpunkte von S begrenzt, deren Abszissen den Betrag

$$a = \frac{2r}{\sqrt{5}}$$

haben, andererseits durch den Teil der Kurve S mit der Gleichung

$$y = 2|x| + \sqrt{r^2 - x^2}; \qquad |x| \leqq a .$$

Demnach besitzt $H - F$ den Inhalt

$$J(H - F) = 2\int_0^a x\, d(2x + \sqrt{r^2 - x^2}) = 4\int_0^a x\, dx + 2\int_0^a x\, d\sqrt{r^2 - x^2}$$

$$= 2a^2 + 2a\sqrt{r^2 - a^2} - 2\int_0^a \sqrt{r^2 - x^2}\, dx$$

$$= 2a^2 + a\sqrt{r^2 - a^2} - r^2 \arctan\frac{a}{\sqrt{r^2 - a^2}} = 2r^2 - r^2 \arctan 2 .$$

Die von der Quadratseite $\overline{CD}$ überstrichene Fläche H hat also den Inhalt

$$J(H) = J(F) + J(H - F) = r^2(\pi + 2 - \arctan 2) .$$

b) Der Rand der Zylinderdeckfläche durchläuft die rotationssymmetrische, geschlossene Fläche M, deren Meridianlinie die Kurve S ist. Die Zylinderdeckfläche selbst überstreicht also die konvexe Hülle $\overline{H}$ des von M umschlossenen Körpers R.

Aus analogen Gründen wie in a) ist

$$J(R) = \frac{4}{3}\pi r^3 ,$$

ferner

$$J(\overline{H} - R) = \pi\int_0^a x^2\, d(2x + \sqrt{r^2 - x^2}) = 2\pi\int_0^a x^2\, dx + \pi\int_0^a x^2\, d\sqrt{r^2 - x^2}$$

$$= \frac{2}{3}\pi a^3 + \pi a^2\sqrt{r^2 - a^2} - \pi\int_0^a \sqrt{r^2 - x^2}\, d(x^2)$$

$$= \frac{2}{3}\pi a^3 + \pi a^2\sqrt{r^2 - a^2} - \frac{2}{3}\pi\,[(r^2 - a^2)^{3/2} - r^3] = 2\pi r^3\left(\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{3}\right).$$

Somit hat der Körper $\overline{H}$, der von der Zylinderdeckfläche überstrichen wird, den Inhalt

$$J(\overline{H}) = J(R) + J(\overline{H} - R) = 2\pi r^3\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{5}}\right).$$

O. Reutter, Ochsenhausen/BRD

Weitere Lösungen sandten G. Güttler (Frankfurt a. M.), L. Kieffer (Luxemburg), R. Kutsmichel (Langendiebach, BRD), A. Maret (Bern), I. Paasche (München), E. Rothmund (Wallisellen), J. Spilker (Freiburg i. Br.).

Aufgabe 462. Démontrer que, k étant un entier donné quelconque > 1 et c un chiffre donné quelconque du système décimal, il existe un nombre naturel n tel que le k-ième chiffre du nombre 2^n, en comptant de droite à gauche, est c. W. Sierpiński, Varsovie

Lösung: Es sei $c_k c_{k-1} \dots c_3 c_2 c_1$ die Folge der letzten k Ziffern der Dezimalentwicklung von 2^n $(n \geqq k > 1)$ und M die durch diese Ziffernfolge bestimmte natürliche Zahl. (Besitzt 2^n weniger als k Ziffern, so sind die fehlenden Ziffern durch Nullen zu ergänzen.) Offensichtlich gilt

$$2^k | M, \quad (M, 5) = 1, \quad M < 10^k. \tag{1}$$

Es zeigt sich nun, dass umgekehrt für jede den Bedingungen (1) genügende natürliche Zahl M ein Exponent n existiert, so dass die Ziffern von M mit den letzten k Ziffern von 2^n übereinstimmen. Der Beweis beruht darauf, dass $x = \varphi(5^k) = 4 \cdot 5^{k-1}$ die *kleinste* positive Lösung der Kongruenz

$$2^x - 1 \equiv 0 \pmod{5^k}$$

ist. (Einen Beweis durch vollständige Induktion findet man in SHKLARSKY-CHENTZOV-YAGLOM, *The USSR Olympiad Problem Book* [Freeman, London 1962], Problem 242.) Aus dieser Tatsache folgt, dass von den $4 \cdot 5^{k-1}$ Zahlen

$$2^k, \quad 2^{k+1}, \quad 2^{k+2}, \dots, \quad 2^{\varphi(5^k)+k-2}, \quad 2^{\varphi(5^k)+k-1}$$

niemals zwei kongruent mod 10^k sind. Die Gesamtheit der Reste mod 10^k dieser Zahlen ist also gegeben durch die $4 \cdot 5^{k-1}$ Zahlen M, die (1) genügen. Die Kongruenz

$$M \equiv 2^n \pmod{10^k} \tag{2}$$

hat also für jedes (1) genügende M genau eine Lösung n mit $k \leqq n \leqq \varphi(5^k) + k - 1$.

Sei nun c die vorgegebene k-te Ziffer (von rechts) in der Dezimalentwicklung der gesuchten Potenz 2^n. Wir bestimmen zunächst eine natürliche Zahl m so, dass

$$c \cdot 5^{k-1} < 2m < (c+1)\, 5^{k-1} \leqq 2 \cdot 5^k, \quad (m, 5) = 1.$$

Dann ist

$$c \cdot 10^{k-1} < m \cdot 2^k < (c+1)\, 10^{k-1}$$

und die k-te Ziffer (von rechts) von $m \cdot 2^k$ ist c. Anwendung von (2) liefert die Behauptung.

G. GÜTTLER, Frankfurt a. M.

Die oben benutzte Eigenschaft von $\varphi(5^k)$ ist identisch mit der Tatsache, dass 2 Primitivwurzel mod 5^k ist [vgl. auch W. SIERPIŃSKI, *Sur les puissances du nombre 2*, Ann. Soc. Pol. de Math., *23*, 246 (1950)].

Weitere Lösungen sandten J. BOERSMA (Groningen), A. SCHINZEL (Warschau) und J. SPILKER (Freiburg i. Br.).

Aufgabe 463. Démontrer que dans la représentation décimale $c_s c_{s-1} \dots c_4 c_3 c_2 c_1$ $(c_1 = 2, 4, 6, 8)$ du nombre 2^n $(n = 1, 2, \dots)$ c_2 et c_3 peuvent être tous les deux des chiffres quelconques, tandis que $c_4 c_3 c_2 = 111$ est impossible.

W. SIERPIŃSKI, Varsovie

Lösung: Seien 2^n, $2^{n'}$, $3 \leqslant n, n' \leqslant 102$ gegeben,

$$2^n = \dots c_3 c_2 c_1, \quad 2^{n'} = \dots c_3 c_2 c_1'$$

und o.B.d.A. $c_1 > c_1'$. Dann folgt

$$2^{\min(n,n')} (2^{|n-n'|} - 1) = |2^n - 2^{n'}| = \dots 00\, c_1^*, \quad c_1^* = 0, 2, 4, 6.$$

Wegen $\min(n, n') \geqslant 3$ muss $c_1^* = 0$ und folglich 125 ein Teiler von $2^{|n-n'|} - 1$ sein. Die Kongruenz

$$2^x \equiv 1 \quad \mathrm{mod}\, 125$$

hat nach Fermats Satz die Lösung $x = \varphi(125) = 100$. Jede Lösung x mit $0 < x \leqslant 100$ muss ein Teiler von 100, also von 20 oder 50 sein. Aber es ist

$$2^{10} \equiv 1024 \equiv 24 \quad \mathrm{mod}\, 125,$$
$$2^{20} \equiv 24^2 \equiv (25-1)^2 \equiv -49 \not\equiv 1 \quad \mathrm{mod}\, 125,$$
$$2^{50} \equiv 24^5 \equiv (25-1)^5 \equiv -1 \not\equiv 1 \quad \mathrm{mod}\, 125,$$

folglich ist $x = 100$ die kleinste positive Lösung. Da $|n - n'|$ eine Lösung < 100 ist, folgt $n = n'$. Die 100 Potenzen $2^3, 2^4, \ldots, 2^{102}$ haben also paarweise verschiedene Ziffernpaare $c_3 c_2$, und folglich kommt jedes Ziffernpaar $00, 01, \ldots, 99$ bereits unter den Potenzen $2^3, 2^4, \ldots, 2^{102}$ vor.

Die Kombination $2^n = \ldots 111\, c_1$ kann nicht auftreten, weil sonst $111\, c_1 \equiv 0 \bmod 16$ gälte im Widerspruch zu

$$16 \cdot 69 = 1104 < 111\, c_1 < 1120 = 16 \cdot 70 .$$

J. Spilker, Freiburg i. Br.

Der Aufgabensteller weist darauf hin, dass in seiner Arbeit: *Sur les puissances du nombre 2*, Ann. Soc. Pol. de Math. *23*, 246 (1950) gezeigt wird, dass die zweistelligen Zahlen $c_3 c_2$ für $n = 3, 4, \ldots$ eine periodische Folge mit der Periode 100 bilden.

Weitere Lösungen sandten J. Boersma (Groningen) und G. Güttler (Frankfurt a. M.).

Aufgabe 464. Es bedeute $d_k(n)$ für $k = 2; 3$ die Anzahl der Darstellungen von n als Produkt von k Faktoren mit Berücksichtigung der Reihenfolge. Dann gilt

$$[d_3(n)]^2 = \sum_{q|n} [d_2(q)]^3 .$$

F. Götze, Jena

Solution: It is evident that the functions $d_k(n)$ $(k = 2, 3, \ldots)$ are multiplicative. Hence $d_k^m(n)$ $(m = 1, 2, \ldots)$ is multiplicative and, by a known theorem,

$$\sum_{q|n} d_k^m(q)$$

is multiplicative. Thus it is sufficient to prove the given formula for n being a power of a prime number: $n = p^s$. First we prove that

$$d_k(p^s) = \binom{s + k - 1}{k - 1} . \tag{1}$$

The problem is to find the number of solutions of $s = x_1 + x_2 + \ldots + x_k$ in nonnegative integers. This number is equal to the number of solutions of $s + k = y_1 + y_2 + \cdots + y_k$ in positive integers $(y_i = x_i + 1)$. Take a strip divided into $s + k$ cells. There is a 1-1-correspondence between the solutions of the last equation and divisions of the strip into non-empty parts. Every such division is determined by a choice of $k - 1$ (of $s + k - 1$) vertical lines on the strip. Thus (1) is proved. The required formula (for $n = p^s$) becomes

$$\binom{s + 2}{2}^2 = \sum_{q|p^s} d_2^3(q) = \sum_{t=0}^{s} (t + 1)^3 ,$$

which is well known.

Since $d_2(n)$ is the number $d(n)$ of divisors of n and $d_3(n)$, as it follows from the above, is equal to

$$\sum_{q|n} d(q) ,$$

the given equality can be written in the form

$$\Big[\sum_{m|n} d(m)\Big]^2 = \sum_{q|n} d^3(q) .$$

The last equality was proved in 1857 by J. Liouville [C. R. Acad. Sci. Paris *44*, 753 (1857); Journ. de Math. (2) *2*, 393–396 (1857)].

A. Makowski, Warszawa

Ähnliche Lösungen sandten C. Bindschedler (Küsnacht), W. Jänichen (Berlin), O. Reutter (Ochsenhausen/BRD), J. Spilker (Freiburg i. Br.).

Neue Aufgaben

Aufgabe 485. Die Treffwahrscheinlichkeit eines Schusses sei w und w_s bedeute die Wahrscheinlichkeit, dass von total n unter gleichbleibenden Bedingungen abgegebenen Schüssen mindestens s Treffer sind. Man beweise die Beziehung

$$w \frac{dw_s}{dw} = s\,(w_s - w_{s+1}) \,.$$

H. BRÄNDLI, Zürich

Aufgabe 486. Wie gross ist die maximale Anzahl spitzer Winkel eines n-Ecks ohne Überschneidungen? H. BLUMER, Winterthur

Aufgabe 487. Die Kurve $x_1^2 x_2 + x_2^2 x_3 + x_3^2 x_1 = 0$ sei auf ein gleichseitiges Koordinatendreieck bezogen (Einheitspunkt im Mittelpunkt M). Man ermittle (im gleichen Koordinatensystem) die Gleichung des Kreises um M, der die drei (kongruenten) Äste der Kurve berührt. C. BINDSCHEDLER, Küsnacht

Aufgabe 488. Démontrer que s étant un nombre naturel donné et $n_1, n_2, \ldots, n_s$ une suite de s nombres naturels donnés quelconques, il existent toujours des entiers $a_1, a_2, \ldots, a_s$ et b tels que l'équation

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_s x_s = b \tag{1}$$

a une seule solution en nombres naturels $x_1, x_2, \ldots, x_s$, notamment $x_i = n_i$ pour $i = 1, 2, \ldots, s$. W. SIERPIŃSKI, Varsovie

Aufgaben für die Schule

Es wird kein Anspruch auf Originalität der Aufgaben erhoben; Autoren und Quellen werden im allgemeinen nicht genannt. Die Daten für Aufgaben aus der Darstellenden Geometrie sind durchweg so festgelegt, dass der Ursprung des Koordinatensystems in der Mitte des linken Randes eines Blattes vom Format A 4 gewählt werden soll, x-Achse nach rechts, y-Achse nach vorn, z-Achse nach oben, Einheit 1 cm. Anregungen und Beiträge sind zu senden an Prof. Dr. WILLI LÜSSY, Büelrainstrasse 51, Winterthur.

Die folgenden Aufgaben stammen aus alten chinesischen Rechenbüchern, zitiert aus: MIKAMI, *The Development of Mathematics in China and Japan*, Neudruck 1961[1]). Die vier ersten Aufgaben werden ins dritte vorchristliche Jahrhundert datiert, doch handelt es sich bei dem betreffenden Werk schon um einen Kommentar zu einem früheren, verlorenen Buch; das letzte Beispiel gehört in das sechste Jahrhundert unserer Zeitrechnung.

1. Ein Hase läuft 100 Schritt vor einem Hund. Dieser verfolgt ihn über 250 Schritt, dann beträgt ihr Abstand noch 30 Schritt. Wieviel weitere Schritt muss der Hund zurücklegen, um den Hasen zu erreichen?

   ▶ $107^1/_7$ Schritt.

2. Von zwei Wasserpflanzen wächst die eine am ersten Tag 3 Fuss, und dann jeden folgenden Tag halb so viel wie am vorhergehenden; die andere wächst am ersten Tag einen Fuss und jeden folgenden doppelt so viel wie am vorhergehenden. Nach wieviel Tagen haben sie dieselbe Höhe erreicht?

   ▶ $2^6/_{13}$ Tage. Die Antwort zeigt, dass angenommen wird, die tägliche Wachstumsgeschwindigkeit sei konstant.

---

[1]) Vergleiche die Besprechung dieses Werkes, dieses Heft S. 117.

3. Eine Schnur hängt vom Gipfel eines Baumes herunter, dabei liegt ein Stück von 3 Fuss (a) Länge auf dem Boden. Wird die Schnur aber gespannt, so erreicht ihr Ende den Boden 8 Fuss (b) vom Baum entfernt. Wie lang ist die Schnur?

▶ Als Ergebnis oder Rechenverfahren wird gegeben

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{b^2}{a} + a\right)$$

4. Eine quadratisch gebaute Stadt hat in der Mitte jeder Mauerseite ein Tor. 20 Schritt ausserhalb des nördlichen Tors ist ein Baum. Geht man 14 Schritt aus dem südlichen Tor nach Süden und dann 1775 Schritt nach Westen, so wird der Baum sichtbar. Wie lang ist eine Seite der Stadtmauer?

▶ Als Antwort wird gesagt, es handle sich um die Wurzel der Gleichung

$$x^2 + 34\,x - 40 \cdot 1775 = 0\,.$$

Natürlich werden Ausdrücke und Gleichungen in Worten beschrieben.

5. Eine Frau webt am ersten Tag 5 Fuss, dann nimmt ihre Leistung täglich [um gleichviel] ab, bis sie am letzten Tag noch einen Fuss vorwärts kommt. Sie hat 30 Tage lang gewoben, wieviel Fuss hat sie im ganzen fertiggestellt?

▶ Für die Lösung wird folgende Regel gegeben: Addiere die Leistungen des ersten und letzten Tages und nimm von der Summe die Hälfte, multipliziere das Ergebnis mit der Zahl der Tage, und du erhältst die Antwort.

Literaturüberschau

The Development of Mathematics in China and Japan. Von Yoshio Mikami. 347 Seiten mit 67 Figuren. \$ 3.95 (Chelsea Publishing Company, New York 1961).

Es handelt sich um einen unveränderten Nachdruck aus den Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften, herausgegeben von Moritz Cantor, Heft XXX, 1913.

Der Autor vermutet, dass in ältester Zeit ein Zusammenhang bestanden habe zwischen chinesischer und babylonischer Mathematik, ja, dass die beiden Völker einen gemeinsamen Ursprung in Zentralasien hätten. Die in der Zwischenzeit von Otto Neugebauer gemachten aufsehenerregenden Entdeckungen widerlegen diese These jedenfalls nicht. So sollen die Chinesen im 27. Jahrhundert vor Christus das Sexagesimalsystem verwendet haben, ferner war das neunfeldrige magische Quadrat bekannt. (*I Ging*, Seite 287 in der Übersetzung von Richard Wilhelm.) Wie die Babylonier waren auch die Chinesen vor allem arithmetisch begabt. Ein berühmtes Werk aus dem ersten vorchristlichen Jahrhundert zeigt ein ausgebildetes Bruchrechnen, die Kenntnis der negativen Zahlen, es werden Quadrat- und Kubikwurzeln gezogen, lineare Gleichungssysteme gelöst, es gibt so etwas wie den Euklidischen Algorithmus; kubische Gleichungen, später auch höhere algebraische Gleichungen, werden mit einem Verfahren gelöst, das wir unter dem Namen Hornerschema kennen. Der Pythagoreische Lehrsatz ist durchaus bekannt; aber für π wird immer noch der Wert 3 verwendet. Zu diesen Tatsachen lassen sich viele Parallelen in der babylonischen Mathematik finden.

Vom ersten nachchristlichen Jahrhundert an wird mit dem Einzug des Buddhismus die Berührung mit der indischen Mathematik spürbar. Daher rührt wohl das erwachende Interesse für die Berechnung von π. 263 nach Christus erschien ein Werk, in dem das reguläre 192-Eck berechnet wird, und im fünften Jahrhundert wurden für π die Schranken 355/113 und 22/7 angegeben, immerhin tausend Jahre vor Metius! Allerdings wurde später die erste Zahl als genauer Wert bezeichnet. Vom 17. Jahrhundert an dringt die europäische Mathematik ein; es mag aber noch angemerkt werden, dass schon 1303 das Pascalsche Dreieck in China bekannt war.