Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 19 (1964)
Heft: 5

Artikel: Die Renaissance der Himmelsmechanik
Autor: Stiefel, E.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-23304

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

ELEMENTE DER MATHEMATIK
Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare
Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrer
Publiziert mit Unterstützung des Schweizerischen Nationalfonds
zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung

El. Math. Band XIX Nr. 5 Seiten 97–120 Basel, 10. September 1964

Die Renaissance der Himmelsmechanik*)

Es kommt in der Entwicklung der mathematischen Wissenschaften gelegentlich vor, dass Forschungen, die einzig und allein dem Streben nach mathematischer Erkenntnis entstammen, plötzlich und unbeabsichtigt in der Physik oder Technik anwendbar werden. Mit Erstaunen, aber auch Genugtuung stellt man dann oft fest, dass die *in abstracto* entwickelten Methoden der mathematischen Analyse auch durchaus den Bedürfnissen der Praxis gerecht werden, was eben daran liegt, dass die theoretische Untersuchung den Kern des Problems herausgeschält hat. Es ist reizvoll, dieser prästabilisierten Harmonie im folgenden konkreten Beispiel etwas nachzugehen.

Unter dem Dreikörperproblem der Himmelsmechanik versteht man die Aufgabe, die Bewegung von drei frei beweglichen punktförmigen Massen zu studieren, die sich gegenseitig nach dem Newtonschen Gravitationsgesetz anziehen. LAGRANGE stellt 1772 in seinem «*Essai sur le problème des trois corps*» entscheidend die Weiche für die mathematischen Methoden, mit denen das Problem im nachfolgenden Jahrhundert angepackt wird. Es handelt sich um die *Störungsrechnung*, der folgender Gedanke zugrunde liegt. Sind nur zwei Körper vorhanden, etwa ein schwerer *Zentralkörper* und ein *Mobil* von verschwindender Masse, so beschreibt das Mobil eine geometrisch einfach zu beschreibende *Keplerbahn*, nämlich einen Kegelschnitt, der einen Brennpunkt im Zentralkörper hat, und wir wollen etwa an eine Ellipse denken. Wird nun ein dritter Körper, der *Störkörper* hingesetzt, dessen Masse klein gegenüber der Zentralmasse sei, so wird die Keplerellipse des Mobils nicht mehr im Raum feststehen, sondern infolge der Wirkung des Störkörpers ihre Lage ändern und sich deformieren. Diese Änderungen sind aber langsam im Vergleich zur Eile, mit der das Mobil diese veränderliche Bahn durchläuft.

Das 19. Jahrhundert bringt die Durcharbeitung des Sonnensystems auf Grund dieser Störungsmethoden. Immer feinere analytische Hilfsmittel werden erfunden, um durch Reihenentwicklungen die Störungen der Keplerbahn zu erfassen. Die Tatsache, dass wir in einem System leben, wo die Sonne als einziger und entscheidend überwiegender Zentralkörper herrscht, ermöglicht dieses Vorgehen. In einem Doppelsternsystem mit zwei gleichberechtigten Zentralkörpern hätte die Himmelsmechanik von vornherein andere Wege einschlagen müssen. Als Höhepunkt und Ausklang

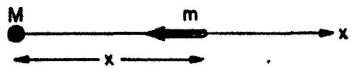
*) Vortrag an der Jahresversammlung 1963 des Vereins Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrer.

dieser klassischen Periode der Himmelsmechanik kann POINCARÉS Werk «*Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*» gelten.

Aber niemand war eigentlich mit dieser Sachlage zufrieden. Denn die Lagrangeschen Methoden funktionieren nur, wenn der Zentralkörper wirklich bedeutend grössere Masse hat als alles, was sich um ihn bewegt; das allgemeine Dreikörperproblem, das heisst die Bewegung von drei beliebigen gleichberechtigten Massen, blieb ungelöst. Darum hat der damalige König von Schweden und Norwegen auf Anregung des Mathematikers MITTAG-LEFFLER einen Preis für die Lösung dieses Problems gestiftet. Leider hat K. F. SUNDMAN für seine wesentliche Förderung der Lösungsmethoden den Preis nicht erhalten. In seiner Studie «*Mémoire sur le problème des trois corps*» (Acta mathematica *36*, 1913) packt er das Problem an der Wurzel. Als Angehöriger der nordischen funktionentheoretischen Schule weiss er nämlich genau, dass funktionale Zusammenhänge an den *Singularitäten* der beteiligten Funktionen studiert werden müssen, die natürlich von naiven mathematischen Methoden ängstlich vermieden werden. Im Dreikörperproblem entstehen solche Singularitäten, wenn zwei der Körper zusammenstossen, was zwar für die Bewohner dieser Körper unangenehm, aber mathematisch äusserst fruchtbar ist. Nachdem nämlich die Natur der Singularitäten und ihre Lage in der komplexen Ebene abgeklärt ist, kann SUNDMAN Aussagen über die analytische Fortsetzung seiner Funktionen machen, und er gelangt so zu Reihenentwicklungen, welche die Bewegungen für alle Zeiten darstellen. Obwohl die Reihen langsam konvergieren, ist doch damit das Dreikörperproblem prinzipiell gelöst.

Nach 1914 flaut das Interesse der Mathematiker an der Himmelsmechanik ab und diese Wissenschaft verschwindet aus den Studienplänen mancher Hochschulen, bis dann der erste Satellit um unsere Erde kreist und wir vor das Problem gestellt werden, unsere künstlichen Himmelskörper in ihrer Bahn zu *lenken* und nicht nur die natürlichen Himmelskörper in ihren Bahnen zu *verfolgen*. Während es kaum notwendig war, Kollisionen im natürlichen Sonnensystem zu studieren, wollen wir nun Kollisionen erzwingen, indem wir zum Beispiel ein Raumfahrzeug auf den Mond schiessen wollen. Und damit bin ich bei dem angelangt, was ich eingangs auseinandersetzte, nämlich bei der plötzlichen und sich ungezwungen einstellenden Anwendbarkeit rein theoretisch konzipierter Methoden. Wenn nämlich unser Raumfahrzeug in die Nähe des Mondes gelangt (vielleicht ohne ihn exakt zu treffen), so können wir die von SUNDMAN und anderen erfundenen Methoden einsetzen, um in der Nähe dieser Singularität die numerische Integration der Bahn sicherer und ökonomischer zu machen. Denn die normalen numerischen Methoden versagen bei einer exakten Kollision und werden unzuverlässig bei einer Fastkollision.

Es soll nun im folgenden versucht werden, die von SUNDMAN, LEVI-CIVITA und anderen Autoren erfundene *Regularisierung* der Kollision im Dreikörperproblem in ihren Grundzügen auf elementarem Weg zu schildern. Wir beginnen mit dem gerad-



Figur 1

linigen Sturz eines Mobils m auf einem Zentralkörper M (Figur 1). Der Körper M ist fest im Nullpunkt einer x-Achse, während m eine Bewegung $x(t)$ in Funktion der Zeit t

ausführt. Die auf m wirkende Gravitationskraft beträgt unter Ausserachtlassung eines durch die Massen bestimmten Proportionalitätsfaktors $(1 : x^2)$ und hat das Potential $(-1 : x)$. Ist endlich v die Geschwindigkeit des Mobils, so liefert der Energiesatz die Relation

$$\frac{v^2}{2} - \frac{1}{x} = h\,, \qquad v^2 = \frac{2}{x} + 2\,h\,. \tag{1}$$

Die Energiekonstante h hat hier offenbar die Dimension einer reziproken Länge; wir setzen daher

$$2\,h = -\frac{1}{a}\,, \qquad \text{also} \qquad v^2 = \frac{2}{x} - \frac{1}{a}\,. \tag{2}$$

Diese Differentialgleichung der Bewegung lässt sich wie folgt lösen.

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{x} - \frac{1}{a}}\,, \qquad \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{x} - \frac{1}{a}}} = dt\,, \qquad t = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{x} - \frac{1}{a}}} = \int \frac{\sqrt{\frac{x}{2}}}{\sqrt{1 - \frac{x}{2\,a}}}\,dx\,. \tag{3}$$

Offenbar entsteht hier ein arc sin-Integral, man substituiert daher

$$\frac{x}{2\,a} = \sin^2 s\,, \qquad \frac{x}{2} = a\,\sin^2 s\,, \qquad dx = 4\,a\,\sin s\,\cos s\,ds \tag{4}$$

und findet

$$t = 4\,a^{3/2} \int \sin^2 s\,ds = 2\,a^{3/2} \int (1 - \cos 2\,s)\,ds = a^{3/2}\,(2\,s - \sin 2\,s)\,. \tag{5}$$

Zusammenfassend sind nun x und t als *eindeutige reguläre* Funktionen eines *uniformisierenden Parameters* s dargestellt, den wir *fiktive Zeit* nennen wollen:

$$x = 2\,a\,\sin^2 s\,, \qquad t = a^{3/2}\,(2\,s - \sin 2\,s)\,. \tag{6}$$

Aus der ersten Gleichung (5) folgt übrigens noch der Zusammenhang zwischen realer und fiktiver Zeit in der Form

$$t = 4\,a^{3/2} \int \sin^2 s\,ds = 2\sqrt{a} \int x\,ds\,,$$

oder

$$\frac{dt}{ds} = 2\sqrt{a}\,x\,, \qquad \frac{ds}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{a}}\,\frac{1}{x}\,. \tag{7}$$

Hieraus wird deutlich, dass die Einführung der fiktiven Zeit das Verwenden einer *Zeitlupe* bedeutet. Eine konstante Schrittlänge in s bewirkt bei Annäherung an die Singularität $(x \to 0)$ immer kleinere Schrittlänge in t. Für später merken wir uns noch, dass – abgesehen von einem Proportionalitätsfaktor – (7) auch geschrieben werden kann

$$\frac{ds}{dt} = U(x)\,. \tag{8}$$

Dabei bedeutet U das Potential der wirkenden Gravitationskraft. Der graphische Fahrplan unseres Mobils kann nun sehr einfach konstruiert werden, wenn man auf

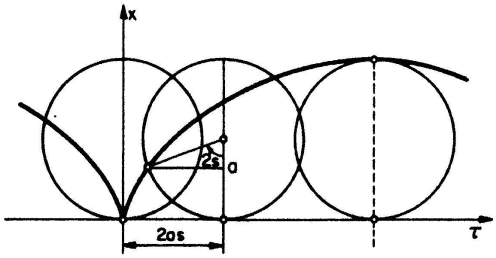
einer Zeitachse die Variable

$$\tau = \frac{t}{\sqrt{a}} \tag{9}$$

abträgt (Figur 2). Aus (6) folgt dann nämlich

$$x = a\,(1 - \cos 2\,s)\,, \qquad \tau = a\,(2\,s - \sin 2\,s)\,, \tag{10}$$

und dies ist die Parameterdarstellung einer *Zykloide*, die entsteht, wenn man einen Kreis vom Radius a auf der Zeitachse abrollen lässt. Das Dreieck der Figur 2 beweist dies; $2\,s$ ist der Winkel, um den sich der Kreis gedreht hat. Man erkennt, dass die



Figur 2

Bewegung vor dem Stoss symmetrisch zur derjenigen nach dem Stoss verläuft und dass das Mobil am Zentralkörper reflektiert wird. Man versteht dies besser, wenn man unsere geradlinige Bewegung hin und zurück als Grenzfall einer Keplerschen Ellipse auffasst, die den Zentralkörper sehr eng umläuft.

Unser Schlussresultat (6) leidet noch unter dem Umstand, dass zwar x eine reguläre Funktion der fiktiven Zeit s ist, aber nicht umgekehrt. Denn

$$s = \arcsin \sqrt{\frac{x}{2\,a}}$$

ergibt einen Verzweigungspunkt in der Singularität $x = 0$. Man kann dem abhelfen, indem man nun mittels

$$\xi = \sqrt{x} \tag{11}$$

auch einen anderen Längenmaßstab einführt. So ergibt sich als endgültiges Bewegungsgesetz

$$\xi = \sqrt{2\,a}\,\sin s\,, \tag{12}$$

und dies ist eine harmonische Schwingung mit der Amplitude $\sqrt{2\,a}$. Der Punkt ξ ist also durch ein elastisches Gummiband an den Zentralkörper gebunden, der nun keine Singularität mehr ist. In der Tat lautet ja die Differentialgleichung der harmonischen Schwingung (12)

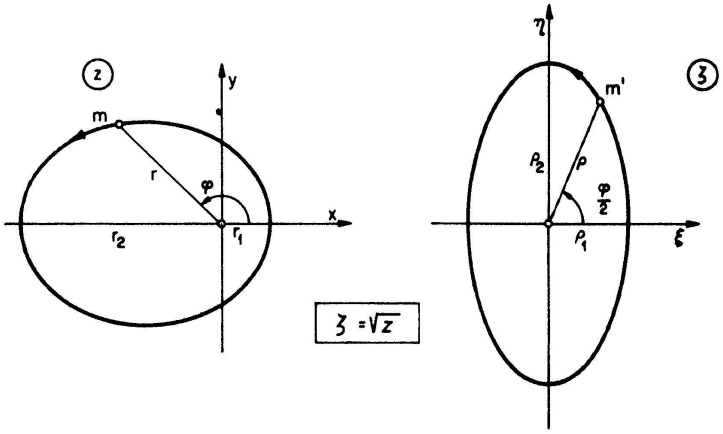
$$\frac{d^2\xi}{ds^2} + \xi = 0\,. \tag{13}$$

Es ist dies eine *lineare* Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten, also regulär in allen Punkten der komplexen s-Ebene.

LEVI-CIVITA hat in den Zwanziger-Jahren diese *Regularisierung* des eindimensionalen Stosses in sehr eleganter Weise auf die zweidimensionale Bewegung eines Mobils

unter dem Einfluss eines Zentralkörpers übertragen, worüber kurz ohne Herleitungen und Beweise berichtet werden soll.

Die Ebene des physikalischen Geschehens sei die x, y-Ebene, die auch als komplexe z-Ebene ($z = x + i\,y$) aufgefasst wird (Figur 3). Der Zentralkörper sitzt im Nullpunkt,



Figur 3

und das Mobil m bewegt sich in dieser Ebene, wobei r seine Entfernung vom Ursprung sei. Das Potential der Zentralkraft ist jetzt

$$U = -\frac{1}{r},$$

und die Gleichung (8) legt uns nahe, die fiktive Zeit s durch

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{r}, \qquad s = \int \frac{dt}{r} \tag{14}$$

zu definieren. Da nun ein Stoss in jeder radialen Richtung stattfinden kann, wird gemäss (11) die Variable $\varrho = \sqrt{r}$ eingeführt werden müssen. Es war LEVI-CIVITAS Idee, dass dies am einfachsten durch die konforme Abbildung

$$\zeta = \sqrt{z}, \qquad (\zeta = \xi + i\,\eta)$$

der z-Ebene auf eine ζ-Ebene geschieht. Wir haben also jetzt in der ζ-Ebene ein *Bildmobil* m', dessen Entfernung vom Nullpunkt wie gewünscht $= \varrho$ ist. Man bestätigt mit Hilfe des Newtonschen Gravitationsgesetzes, dass die Bewegungsgleichungen des Bildmobils wieder lauten

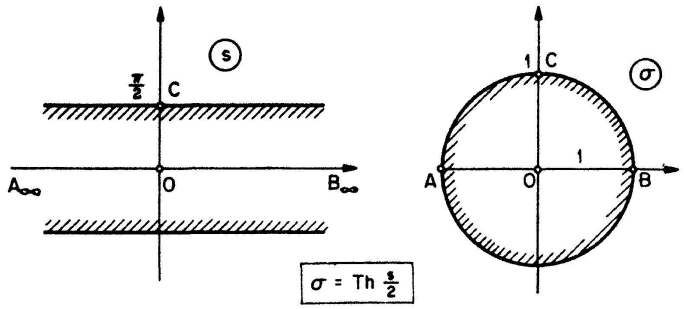
$$\frac{d^2\xi}{ds^2} + \lambda\,\xi = 0\,, \qquad \frac{d^2\eta}{ds^2} + \lambda\,\eta = 0\,, \tag{15}$$

wobei λ eine Konstante ist, die durch die Anfangsbedingungen festgelegt ist. Wiederum sind diese Differentialgleichungen vollständig regulär und besagen, dass das Bildmobil sich so bewegt, wie wenn es durch ein Gummiband mit dem Ursprung verbunden wäre. Es führt also eine zweidimensionale harmonische Schwingung aus, falls λ positiv ist. Die Bahnkurve ist eine Ellipse mit dem Zentrum im Ursprung. Nun lernt man aber in der Funktionentheorie, dass das Bild einer im Nullpunkt zentrierten Ellipse unter der konformen Abbildung $z = \zeta^2$ eine Ellipse ist, die einen Brennpunkt im Nullpunkt der z-Ebene hat. Das Mobil m in der z-Ebene beschreibt diese Ellipse, und somit kann mittels der Levi-Civitaschen Transformation das erste Keplersche Gesetz hergeleitet

werden. Der Vollständigkeit halber sei erwähnt, dass die fiktive Zeit s im wesentlichen die aus der Astronomie bekannte *exzentrische Anomalie* der elliptischen Bewegung ist.

Wird nun ein *Störkörper* als dritter Körper in unsere z-Ebene gebracht, so werden die Differentialgleichungen (15) natürlich modifiziert, sie bleiben aber regulär durch einen Stoss des Mobils mit dem Zentralkörper hindurch. Auch hier nennen wir den Übergang von den Variabeln x, y, t zu den Variabeln ξ, η, s die *Regularisierung* des Stosses von Mobil und Zentralkörper.

Nun sind wir weit genug fortgeschritten, um den Grundgedanken der Sundmanschen Lösung des Dreikörperproblems verstehen zu können. Die cartesischen Koordinaten der drei Körper seien x_k, y_k, z_k $(k = 1, 2, 3)$. SUNDMAN zeigt nun, dass man statt dessen regularisierende Variable ξ_k, η_k, ζ_k und eine fiktive Zeit s so einführen kann, dass die Differentialgleichungen für die Funktionen $\xi_k(s)$, $\eta_k(s)$, $\zeta_k(s)$ regulär bleiben, wenn zwei der Körper kollidieren. (Der Fall, dass alle drei Körper zusammenstossen, lässt sich auf andere Weise erledigen.) Er zeigt ferner, dass die genannten Funktionen als Funktionen der reellen Variabeln s für alle Werte von s und über alle Stösse hinweg stetig und beliebig oft differenzierbar sind. Entscheidend ist aber, dass die Funktionen sogar in die komplexe s-Ebene analytisch fortgesetzt werden können und dort holomorph regulär sind in einem Parallelstreifen mit der reellen s-Achse als Mittellinie (Figur 4). Der Einfachheit halber geben wir diesem Streifen die Breite π.



Figur 4

Seine Reihen gewinnt nun SUNDMAN, indem er den Streifen konform auf das Innere des Einheitskreises einer σ-Ebene abbildet, etwa mittels der Transformation

$$\sigma = \frac{e^s - 1}{e^s + 1} = \operatorname{Th} \frac{s}{2}. \tag{16}$$

(Th ist der hyperbolische Tangens.) Jede unserer Funktionen – zum Beispiel ξ_1 – wird damit eine Funktion der komplexen Variabeln σ, die im Einheitskreis regulär ist. Ihre Taylor-Entwicklung

$$\xi_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sigma^n$$

konvergiert daher im Innern des Einheitskreises und speziell für die reellen Werte von σ mit $-1 < \sigma < 1$. In der s-Ebene bedeutet dies, dass die Reihe

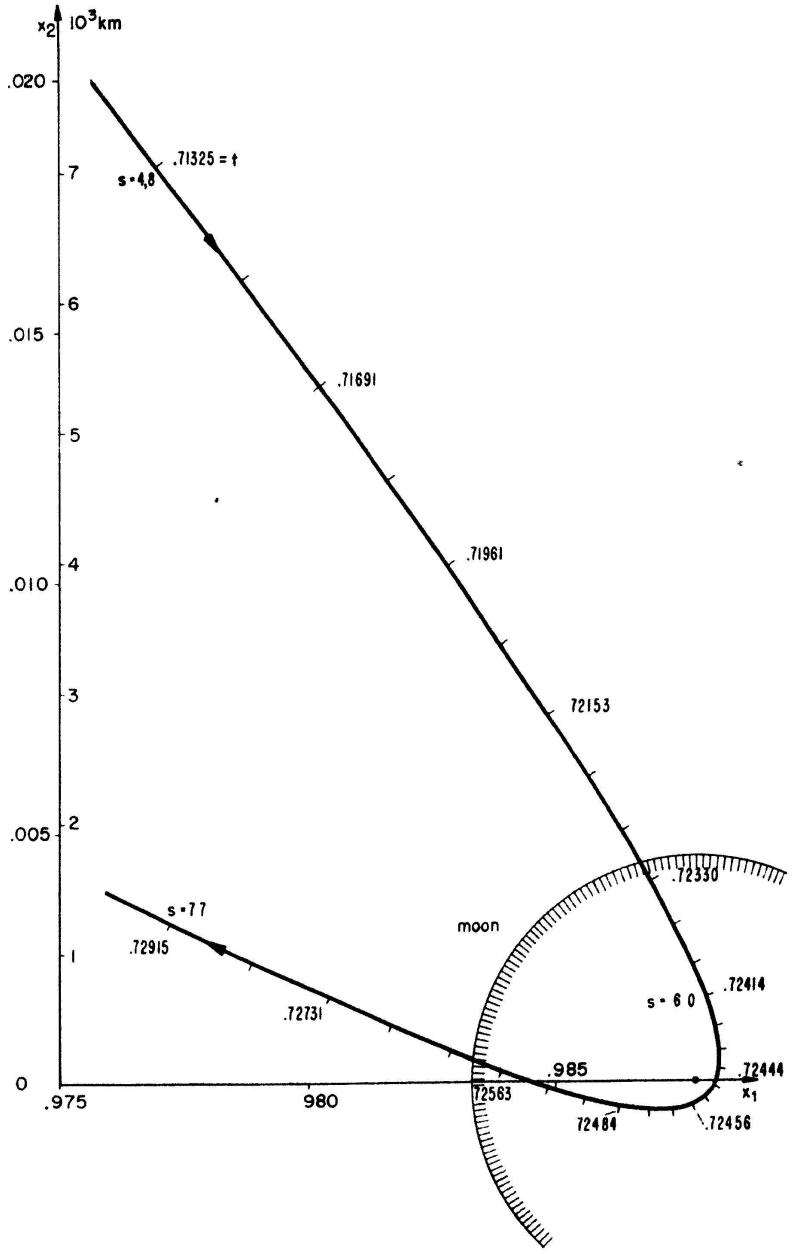
$$\xi_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\operatorname{Th} \frac{s}{2}\right)^n$$

für alle Werte der reellen Variabeln s konvergiert. Die regularisierten Variabeln ξ_k, η_k, ζ_k sind also durch beständig konvergente Reihen in s dargestellt. Damit wird

es auch möglich, die cartesischen Koordinaten x_k, y_k, z_k für jeden Wert der realen Zeit t zu berechnen.

Ohne Regularisierung der Stösse wäre es unmöglich, ein solches Resultat herzuleiten. Denn auf Grund der gegebenen Anfangsbedingungen eines Dreikörperproblems kann man nicht voraussagen, ob nicht doch nach genügend langer Zeit eine Kollision stattfinden wird.

Wie schon erwähnt wurde, haben nun diese theoretischen Regularisierungsmethoden eine Wiederbelebung in der Praxis der numerischen Flugbahnberechnung gefunden. Figur 5 stellt als Kostprobe die Bahn eines Raumfahrzeuges dar, das extrem



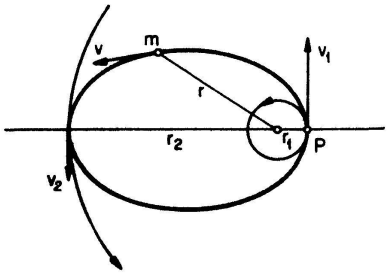
Figur 5

nahe am Mondmittelpunkt vorbeifliegt und somit die Mondoberfläche (den Kreis rechts unten) trifft. Das Koordinatensystem x_1, x_2 hat den Ursprung im Schwerpunkt von Erde und Mond, und die x_1-Achse geht dauernd durch das Mondzentrum. Zur numerischen Integration wurden regularisierende Variable bezüglich des Mondes als Zentralkörper benutzt; die fiktive Zeit s beginnt oben mit dem Wert 4.8 und läuft mit

gleichmässigem Schritt 0.1 bis 7.7. Auch die Werte der realen Zeit sind angegeben, wobei die Zeiteinheit so gewählt wurde, dass der Mond in seiner Bahn die Geschwindigkeit Eins hat. (Längeneinheit = Radius der als kreisförmig angenommenen Mondbahn.) Man erkennt, wie die Regularisierung eine feinere Zeiteinteilung in der Nähe des Mondmittelpunktes bewirkt. Natürlich ist die Bahn annähernd ein Hyperbelast, jedoch ist der Einfluss der Erde als Störkörper genau berücksichtigt.

Zum Schluss soll noch gezeigt werden, dass man allein mit Hilfe der drei Keplerschen Gesetze manche wichtige Aufgabe der *Astronautik* lösen kann. Diese Aufgaben liegen daher durchaus in der Wurfweite des Mittelschulunterrichts und sind geeignet, um auf dieser Stufe zu zeigen, welche grundlegende Rolle die Mathematik bei den neuesten Unternehmungen der Menschheit spielt. Es bereitet sicherlich Freude, sich zum Beispiel selbst auszurechnen, wie lange ungefähr eine Rakete von der Erde zum Mond unterwegs ist.

Zur Vorbereitung formulieren wir den Energiesatz für die elliptische Bewegung um einen Zentralkörper (Figur 6). Das Mobil m habe in allgemeiner Lage die Distanz r



Figur 6

und die Geschwindigkeit v. In den Ellipsenscheiteln sollen diese Grössen beziehlich r_1, v_1 und r_2, v_2 sein. Da das Potential $(-1:r)$ beträgt, besagt der Energiesatz

$$\frac{v^2}{2} - \frac{1}{r} = h\,, \quad v^2 = \frac{2}{r} + 2\,h\,, \tag{17}$$

mit einer Energiekonstanten h, deren Bedeutung wir folgendermassen abklären. Aus dem Flächensatz folgt

$$r_1\,v_1 = r_2\,v_2\,, \quad r_1^2\,v_1^2 = r_2^2\,v_2^2\,.$$

Indem man hier für die Geschwindigkeit (17) einträgt, ergibt sich

$$2\,r_1 + 2\,h\,r_1^2 = 2\,r_2 + 2\,h\,r_2^2$$

und daraus

$$h = -\frac{r_2 - r_1}{r_2^2 - r_1^2} = -\frac{1}{r_1 + r_2} = -\frac{1}{2\,a}\,,$$

wobei a die grosse Halbachse der Ellipse ist. Der Energiesatz (17) lässt sich nun schreiben

$$v^2 = \frac{2}{r} - \frac{1}{a}\,, \tag{18}$$

und dies ist die Grundgleichung für alle Geschwindigkeitsprobleme der Astronautik. Ist die Keplerbahn speziell ein Kreis um den Zentralkörper, so ergibt sich wegen $a = r$ für die (konstante) Bahngeschwindigkeit

$$v_0 = \frac{1}{\sqrt{r}}\,. \tag{19}$$

Aufgabe 1. Ein Raumfahrzeug befindet sich auf einer kreisförmigen Parkierungsbahn (Radius r_1) um die Erde. Es soll durch eine tangentiale Geschwindigkeitsände-

rung auf eine Keplerellipse transferiert werden, die bis zur Mondbahn hinausreicht. (Von den Störungen durch den Mond wird abgesehen; die Mondbahn sei als Kreis vom Radius r_2 angenommen.)

Die Figur 6 kann als Illustration dienen. Der Transfer finde im Punkt P statt. Dort ist die elliptische Geschwindigkeit nach (18)

$$v_1^2 = \frac{2}{r_1} - \frac{1}{a} = \frac{2}{r_1} - \frac{2}{r_1 + r_2}.$$

Die Kreisbahngeschwindigkeit ist nach (19)

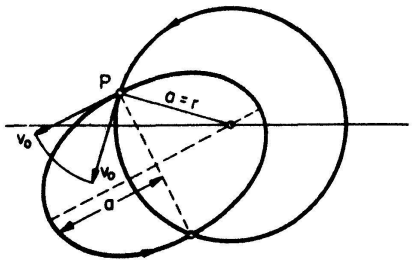
$$v_0 = \frac{1}{\sqrt{r_1}}, \quad v_0^2 = \frac{1}{r_1},$$

somit

$$\left(\frac{v_1}{v_0}\right)^2 = 2 - \frac{2\,r_1}{r_1 + r_2} = 2\,\frac{r_2}{r_1 + r_2}, \quad \frac{v_1}{v_0} = \sqrt{\frac{2\,r_2}{r_1 + r_2}}. \tag{20}$$

Dieses Resultat lässt sich auf mancherlei Transferprobleme anwenden. Es sei zum Beispiel die Sonne der Zentralkörper und die Kreise r_1, r_2 beziehlich die Erd- und Marsbahn. Man hat dann $r_2 : r_1 = 1{,}524$, und (20) ergibt $v_1 : v_0 = 1{,}099$. Ein Raumfahrzeug, das sich auf der Erdbahn ausserhalb des Anziehungsbereichs der Erde bewegt, muss also nur einen Geschwindigkeitszuwachs von 9,9% erhalten, um zum Mars hinaus zu gelangen.

Aufgabe 2. Ein Raumfahrzeug befindet sich auf einer Kreisbahn (Radius r) um einen Zentralkörper. Es wird im Punkt P auf eine andere Bahn transferiert, indem (im Gegensatz zu Aufgabe 1) die Richtung der Geschwindigkeit, aber nicht deren



Figur 7

Grösse geändert wird. Wie sieht die neue Bahn aus? (Figur 7) Ist v_0 wieder die Kreisbahngeschwindigkeit, so liefert die Grundgleichung (18) für die Achse a der neuen Bahn

$$\frac{1}{a} = \frac{2}{r} - v_0^2$$

und unter Berücksichtigung von (19)

$$\frac{1}{a} = \frac{2}{r} - \frac{1}{r}, \quad \text{also} \quad a = r.$$

Die Halbachse der entstehenden Keplerellipse ist also gleich dem Radius der Kreisbahn. Weiter hat P die Distanz $r = a$ vom Zentrum. Wenn aber die Distanz eines Ellipsenpunktes P vom Brennpunkt der Ellipse gleich der Halbachse ist, so ist P der Nebenscheitel der Ellipse. Die Achse der Keplerellipse liegt daher parallel zur neuen Geschwindigkeitsrichtung. Damit kann die Ellipse gezeichnet werden.

Nach dem dritten Keplerschen Gesetz sind übrigens auch die Umlaufzeiten auf dem Kreis und auf der Ellipse gleich. Dies hat praktische Bedeutung. Wird nämlich vom Raumschiff eine Raumsonde in die elliptische Bahn abgeschossen, während das Raumschiff auf der Kreisbahn bleibt, so kehrt die Sonde wie ein Bumerang nach einem Umlauf zum Schiff zurück.

Unser Anliegen der Betonung der plötzlichen Anwendbarkeit mathematischer Theorien sollte auch im Unterricht beachtet werden. Vor noch nicht langer Zeit waren Bestrebungen im Gange, den Unterricht in den elementargeometrischen Eigenschaften der Kegelschnitte zu reduzieren. Ein Ziel des Mathematikunterrichts muss aber sein, die *Einheit von Mathematik, Physik, Naturwissenschaft* und *Technik* anzustreben, und dies empfiehlt äusserste Vorsicht bei solchen Reduktionen. Denn genau das, was wir heute abbauen wollen, kann morgen eine lebenswichtige Grundlage eines neuen Zweiges der Wissenschaften werden. Dies lehren unsere beiden Aufgaben, welche die Brennpunktseigenschaften der Kegelschnitte ganz wesentlich benutzen.

Die Schweiz zahlt jährlich hohe Summen an die ESRO (European Space Research Organisation) und dokumentiert damit ihr Interesse an der Raumforschung. Dies verpflichtet die Lehrer der höheren Schulstufen, den Blick ihrer Schüler in diese Richtung zu lenken, damit in einigen Jahren auch junge schweizerische Wissenschaftler in der Raumforschung mitreden können. E. STIEFEL, Zürich

Kleine Mitteilungen

Sur les nombres $a^n + 1$

La solution de M. O. REUTTER donnée à mon problème 430 [El. Math. *18*, 89–90 (1963)] m'a suggéré le théorème suivant:

Théorème. *a étant un entier donné >1, il existe une infinité de nombres naturels n tels que $n \mid a^n + 1$.*

Démonstration. Vu le théorème de M. O. REUTTER (voir l. c.), il suffira de démontrer notre théorème pour les entiers impairs $a > 1$. Dans ce cas on a évidemment $2 \mid a^2 + 1$ et les nombres 2 et $a^2 + 1$ sont tous les deux doubles de nombres impairs.

Lemme. *Si a est un nombre impair > 1, m et $a^m + 1$ sont doubles de nombres impairs et $m \mid a^m + 1$, il existe un nombre $m_1 > m$, tel que m_1 et $a^{m_1} + 1$ sont doubles de nombres impairs et que $m_1 \mid a^{m_1} + 1$.*

Démonstration du lemme. Si $m \mid a^m + 1$ et si m et $a^m + 1$ sont doubles de nombres impairs, on a $a^m + 1 = k\,m$, où k est un nombre impair. Il en résulte que $a^m + 1 \mid a^{m\,k} + 1$, donc

$$a^m + 1 \mid a^{a^m+1} + 1$$

et, a étant impair et $a^m + 1$ pair, le nombre

$$a^{a^m+1} + 1$$

est double d'un nombre impair. Pour $m_1 = a^m + 1$ nous aurons donc $m_1 \mid a^{m_1} + 1$, et m_1 et $a^{m_1} + 1$ seront doubles de nombres impairs et, vu que $a > 1$, on aura $m_1 = a^m + 1 > m$. Le lemme se trouve ainsi démontré.

Notre théorème (pour a impairs > 1) résulte tout de suite de notre lemme et de la remarque que pour a impairs on a $2 \mid a^2 + 1$. W. SIERPIŃSKI, Varsovie