Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 19 (1964)

Heft: 4

Rubrik: Kleine Mitteilungen

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 25.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Il est à remarquer qu'il existe des nombres pseudopremiers carrés. Deux tels nombres sont 1093^2 et 3511^2. On ne sait pas s'il en existe une infinité.

Or, on peut démontrer qu'il existe une infinité des nombres pseudopremiers divisibles par 1093^2, respectivement par 3511^2 *).

A. ROTKIEWICZ (Varsovie)

Kleine Mitteilungen

Über ein Tetraederproblem

In Aufgabe 458 der «Elemente» [1] [1]) ist gezeigt worden, dass die Summe der Quadrate der Kantenprojektionen auf eine Ebene dann und nur dann von der Lage der Ebene nicht abhängt, wenn das Tetraeder regulär ist. In dieser Arbeit behandeln wir für den Fall der Nichtregularität das allgemeine Problem der Abhängigkeit von der Lage der Ebene.

Wir verlegen eine Ecke des Tetraeders in den Nullpunkt $\mathfrak{o}$ des der Betrachtung zugrunde liegenden Koordinatensystems, auf den wir auch die vorkommenden Vektoren beziehen. $\mathfrak{p}^{(1)}$, $\mathfrak{p}^{(2)}$, $\mathfrak{p}^{(3)}$ seien die drei anderen Ecken des Tetraeders, genauer ihre auf $\mathfrak{o}$ bezogenen Ortsvektoren. Die Projektionsebene $\mathfrak{E}$ denken wir uns durch $\mathfrak{o}$ gelegt, sie ist durch ihren Stellungsvektor $\mathfrak{x}$ charakterisiert, der zugleich ein Einheitsvektor ist, so dass

$$\mathfrak{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 .$$

Ist nun $\mathfrak{a}$ ein beliebiger Vektor mit der Länge $a = |\mathfrak{a}|$, q die Länge der Projektion von $\mathfrak{a}$ auf $\mathfrak{E}$ und f die Länge der Projektion von $\mathfrak{a}$ auf $\mathfrak{x}$, so ist

$$q^2 = a^2 - f^2, \quad f^2 = \langle \mathfrak{a}\,\mathfrak{x}\rangle^2,$$

wo $\langle \mathfrak{a}\,\mathfrak{x}\rangle$ das innere Produkt der beiden Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{x}$ bedeutet; somit ist

$$q^2 = a^2 - \langle \mathfrak{a}\,\mathfrak{x}\rangle^2 \tag{1}$$

Wenden wir diese Formel auf die Tetraederkanten an, die durch die Vektoren $\mathfrak{p}^{(1)}$, $\mathfrak{p}^{(2)}$, $\mathfrak{p}^{(3)}$, $\mathfrak{p}^{(1)} - \mathfrak{p}^{(2)}$, $\mathfrak{p}^{(2)} - \mathfrak{p}^{(3)}$, $\mathfrak{p}^{(1)} - \mathfrak{p}^{(3)}$ gegeben sind, und bezeichnen mit $S(\mathfrak{x})$ die Quadratsumme der Kantenprojektionen auf $\mathfrak{E}$, die ja eine Funktion des Stellungsvektors $\mathfrak{x}$ ist, mit K die Summe der Kantenquadrate, so ist

$$S(\mathfrak{x}) = K - \sum_{\lambda} \langle \mathfrak{p}^{(\lambda)}\,\mathfrak{x}\rangle^2 - \sum_{\mu<\nu} \langle (\mathfrak{p}^{(\mu)} - \mathfrak{p}^{(\nu)})\,\mathfrak{x}\rangle^2, \quad \lambda, \mu, \nu = 1, 2, 3 . \tag{2}$$

Für $S(\mathfrak{x})$ gilt

$$0 < S(\mathfrak{x}) < K .$$

$S(\mathfrak{x})$ ist eine Funktion von x_1, x_2, x_3 mit der Bedingung $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0$.

*) Voir, par exemple, A. ROTKIEWICZ: *Sur les nombres composés tels que* $n \mid 2^n - 2 \mid$ et $n \nmid 3^n - 3$, Bulletin de la Société des mathématiciens et physiciens de la R. S. de Serbie XV, Beograd 1963, p. 7–11.

[1]) Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 87.

Wir bestimmen zunächst die Extremwerte von $S(\mathfrak{x})$ und wenden zu dem Zweck die Methode der unbestimmten Multiplikatoren auf die Funktion

$$S(\mathfrak{x}) = K - \sum_{\lambda} \langle \mathfrak{p}^{(\lambda)}\, \mathfrak{x}\rangle^2 - \sum_{\mu<\nu} \langle (\mathfrak{p}^{(\mu)} - \mathfrak{p}^{(\nu)})\, \mathfrak{x}\rangle^2 + \varkappa\, (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1) \tag{3}$$

an. Hierin ist

$$\langle \mathfrak{p}^{(\lambda)}\, \mathfrak{x}\rangle = p_1^{(\lambda)} x_1 + p_2^{(\lambda)} x_2 + p_3^{(\lambda)} x_3 ,$$

da

$$\mathfrak{p}^{(\lambda)} = \begin{pmatrix} p_1^{(\lambda)} \\ p_2^{(\lambda)} \\ p_3^{(\lambda)} \end{pmatrix},$$

und $\varkappa$ ein zu bestimmender Faktor.

Für die Extremwerte muss gelten:

$$\frac{\partial S}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial x_3} = 0 .$$

Zum Beispiel ist

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial S}{\partial x_1} = \sum_{\lambda} \langle \mathfrak{p}^{(\lambda)}\, \mathfrak{x}\rangle\, p_1^{(\lambda)} + \sum \langle (\mathfrak{p}^{(\mu)} - \mathfrak{p}^{(\nu)})\, \mathfrak{x}\rangle\, (p_1^{(\mu)} - p_1^{(\nu)}) - \varkappa\, x_1 = 0$$

oder

$$\begin{aligned}
&\langle \mathfrak{p}^{(1)}\, \mathfrak{x}\rangle\, p_1^{(1)} + \langle \mathfrak{p}^{(2)}\, \mathfrak{x}\rangle\, p_2^{(2)} + \langle \mathfrak{p}^{(3)}\, \mathfrak{x}\rangle\, p_1^{(3)} + (\langle \mathfrak{p}^{(1)}\, \mathfrak{x}\rangle - \langle \mathfrak{p}^{(2)}\, \mathfrak{x}\rangle)\,(p_1^{(1)} - p_1^{(2)}) + \\
&\quad + (\langle \mathfrak{p}^{(2)}\, \mathfrak{x}\rangle - \langle \mathfrak{p}^{(3)}\, \mathfrak{x}\rangle)\,(p_1^{(2)} - p_1^{(3)}) + (\langle \mathfrak{p}^{(1)}\, \mathfrak{x}\rangle - \langle \mathfrak{p}^{(3)}\, \mathfrak{x}\rangle)\,(p_1^{(1)} - p_1^{(3)}) - \varkappa\, x_1 = 0 ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\langle \mathfrak{p}^{(1)}\, \mathfrak{x}\rangle\,(3\, p_1^{(1)} - p_1^{(2)} - p_1^{(3)}) + \\
&\quad + \langle \mathfrak{p}^{(2)}\, \mathfrak{x}\rangle\,(-\, p_1^{(1)} + 3\, p_1^{(2)} - p_1^{(3)}) + \langle \mathfrak{p}^{(3)}\, \mathfrak{x}\rangle\,(-p_1^{(1)} - p_1^{(2)} + 3\, p_1^{(3)}) = \varkappa\, x_1 ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(p_1^{(1)} x_1 + p_2^{(1)} x_2 + p_3^{(1)} x_3)\,(3\, p_1^{(1)} - p_1^{(2)} - p_1^{(3)}) + (p_1^{(2)} x_1 + p_2^{(2)} x_2 + p_3^{(2)} x_3) \times \\
&\quad \times (-p_1^{(1)} + 3\, p_1^{(2)} - p_1^{(3)}) + (p_1^{(3)} x_1 + p_2^{(3)} x_2 + p_3^{(3)} x_3)\,(-p_1^{(1)} - p_1^{(2)} + 3\, p_1^{(3)}) = \varkappa\, x_1 .
\end{aligned}$$

Ordnet man nach x_1, x_2, x_3, so erhält man drei homogene Gleichungen für x_1, x_2, x_3

$$\begin{aligned}
t_{11} x_1 + t_{12} x_2 + t_{13} x_3 &= \varkappa\, x_1 , \\
t_{21} x_1 + t_{22} x_2 + t_{23} x_3 &= \varkappa\, x_2 , \\
t_{31} x_1 + t_{32} x_2 + t_{33} x_3 &= \varkappa\, x_3 .
\end{aligned} \tag{4}$$

Dabei ist

$$t_{\lambda\mu} = p_\mu^{(1)}\left(3\, p_\lambda^{(1)} - p_\lambda^{(2)} - p_\lambda^{(3)}\right) + p_\mu^{(2)}\left(-p_\lambda^{(1)} + 3\, p_\lambda^{(2)} - p_\lambda^{(3)}\right) + p_\mu^{(3)}\left(-p_\lambda^{(1)} - p_\lambda^{(2)} + 3\, p_\lambda^{(3)}\right). \tag{5}$$

Damit die Gleichungen (4) einen nicht verschwindenden Lösungsvektor

$$\mathfrak{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

besitzen, muss die Determinante

$$\begin{vmatrix} t_{11} - \varkappa & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} - \varkappa & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} - \varkappa \end{vmatrix} = 0 \tag{6}$$

sein. Da, wie man leicht durch Umstellung der Glieder erkennt,

$$t_{\lambda\mu} = t_{\mu\lambda}, \quad \lambda \neq \mu ,$$

so ist (6) die charakteristische Gleichung der symmetrischen Matrix

$$\mathfrak{T} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix}.$$

Gleichung (6) hat bekanntlich [2] [3] drei reelle Wurzeln $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$.

Diese drei Werte sind die Eigenwerte der Matrix $\mathfrak{T}$. Zu jedem $\varkappa$ gehört ein Lösungsvektor von (4), und zu verschiedenen $\varkappa$ gehören auch verschiedene Lösungsvektoren $\mathfrak{x}$, die zueinander orthogonal sind. Die Determinante (6) liefert entwickelt folgende Gleichung

$$\varkappa^3 - K\varkappa^2 + Q\varkappa - |\mathfrak{T}| = 0 \tag{8}$$

K ist gleich $t_{11} + t_{22} + t_{33}$. Nun ist nach (5), wie leicht ersichtlich,

$$t_{11} = p_1^{(1)2} + p_1^{(2)2} + p_1^{(3)2} + (p_1^{(1)} - p_1^{(2)})^2 + (p_1^{(2)} - p_1^{(3)})^2 + (p_1^{(1)} - p_1^{(3)})^2,$$

daher

$$K = |\mathfrak{p}^{(1)}|^2 + |\mathfrak{p}^{(2)}|^2 + |\mathfrak{p}^{(3)}|^2 + |\mathfrak{p}^{(1)} - \mathfrak{p}^{(2)}|^2 + |\mathfrak{p}^{(2)} - \mathfrak{p}^{(3)}|^2 + |\mathfrak{p}^{(1)} - \mathfrak{p}^{(3)}|^2$$

$$= \text{Summe der Kantenquadrate.}$$

Weiter ist nach dem Multiplikationssatz für Determinanten

$$\mathfrak{T} = \begin{vmatrix} p_1^{(1)} & p_1^{(2)} & p_1^{(3)} \\ p_2^{(1)} & p_2^{(2)} & p_2^{(3)} \\ p_3^{(1)} & p_3^{(2)} & p_3^{(3)} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3p_1^{(1)} - p_1^{(2)} - p_1^{(3)} & 3p_2^{(1)} - p_2^{(2)} - p_2^{(3)} & 3p_3^{(1)} - p_3^{(2)} - p_3^{(3)} \\ -p_1^{(1)} + 3p_1^{(2)} - p_1^{(3)} & -p_2^{(1)} + 3p_2^{(2)} - p_2^{(3)} & -p_3^{(1)} + 3p_3^{(2)} - p_3^{(3)} \\ -p_1^{(1)} - p_1^{(2)} + 3p_1^{(3)} & -p_2^{(1)} - p_2^{(2)} + 3p_2^{(3)} & -p_3^{(1)} - p_3^{(2)} + 3p_3^{(3)} \end{vmatrix}.$$

Die zweite Determinante kann man durch wiederholte lineare Kombination der Zeilen vereinfachen. Man findet, wenn wir nur die erste Spalte ausschreiben, nacheinander

$$\begin{vmatrix} p_1^{(1)} + p_1^{(2)} + p_1^{(3)} & \cdots \\ -p_1^{(1)} + 3p_1^{(2)} - p_1^{(3)} & \cdots \\ -p_1^{(1)} - p_1^{(2)} + 3p_1^{(3)} & \cdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4p_1^{(3)} & \cdots \\ 4p_1^{(2)} - 4p_1^{(3)} & \cdots \\ -p_1^{(1)} - p_1^{(2)} + 3p_1^{(3)} & \cdots \end{vmatrix} = 16 \begin{vmatrix} p_1^{(3)} & \cdots \\ p_1^{(2)} - p_1^{(3)} & \cdots \\ -p_1^{(1)} - p_1^{(2)} + 3p_1^{(3)} & \cdots \end{vmatrix} =$$

$$= 16 \begin{vmatrix} p_1^{(3)} & \cdots \\ p_1^{(2)} & \cdots \\ -p_1^{(1)} & \cdots \end{vmatrix} = 16 \begin{vmatrix} p_1^{(1)} & p_2^{(1)} & p_3^{(1)} \\ p_1^{(2)} & p_2^{(2)} & p_3^{(2)} \\ p_1^{(3)} & p_2^{(3)} & p_3^{(3)} \end{vmatrix}.$$

Daher ist

$$|\mathfrak{T}| = 16\,|p_\lambda^{(\mu)}|^2 = 16 \cdot 36\, V^2,$$

wo V der Tetraederinhalt ist, also

$$|\mathfrak{T}| = \varkappa_1 \varkappa_2 \varkappa_3 = (24\, V)^2,$$

$$V = \frac{1}{24}\sqrt{\varkappa_1 \varkappa_2 \varkappa_3} = \frac{1}{24}\sqrt{|\mathfrak{T}|}. \tag{9}$$

Die drei Eigenwerte sind daher alle positiv, oder es sind zwei negativ und einer positiv. Wir werden noch zeigen, dass nur die erste Möglichkeit in Frage kommt. Wir gelangen so zu folgendem:

Satz 1: Die Lösungsvektoren

$$\mathfrak{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

der drei homogenen Gleichungen (4) ergeben drei paarweise zueinander senkrechte Richtungen, zu denen die extremen Werte der Quadratsumme $S(\mathfrak{x})$ gehören. Dabei sind für

$\varkappa$ die Eigenwerte $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3$ der symmetrischen Matrix $\mathfrak{T}$ einzusetzen, die der Gleichung

$$\varkappa^3 - K\varkappa^2 + Q\varkappa - |\mathfrak{T}| = 0$$

genügen. K ist die Summe der Kantenquadrate des Tetraeders, die Determinante $|\mathfrak{T}|$ der Matrix $\mathfrak{T}$ hat den Wert $(24\,V)^2$, wobei V der Tetraederinhalt ist. Der Wert von Q ist

$$Q = \begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} t_{11} & t_{13} \\ t_{31} & t_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} t_{22} & t_{23} \\ t_{32} & t_{33} \end{vmatrix}.$$

Wir betrachten noch einmal die quadratische Form

$$K - S(\mathfrak{x}) = \sum_{\lambda} \langle \mathfrak{p}^{(\lambda)}\,\mathfrak{x}\rangle^2 + \sum_{\mu<\nu} \langle (\mathfrak{p}^{(\mu)} - \mathfrak{p}^{(\nu)})\,\mathfrak{x}\rangle^2.$$

Sie lässt sich bekanntlich [4], da die Matrix $\mathfrak{T}$ symmetrisch ist, durch eine reelle Drehung des Koordinatensystems

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{S}\,\mathfrak{y}$$

mittels einer orthogonalen Matrix $\mathfrak{S}$ transformieren auf die Normalform

$$K - S(\mathfrak{y}) = \varkappa_1 y_1^2 + \varkappa_2 y_2^2 + \varkappa_3 y_3^2 .$$

Der Einheitsvektor $\mathfrak{x}$ geht nach der Transformation wieder in einen Einheitsvektor $\mathfrak{y}$ über. Der Ausdruck $S(\mathfrak{y})$ ist also wieder gleich der Quadratsumme $S(\mathfrak{x})$ der Kantenprojektionen. Es gilt also nach der Transformation für $S(\mathfrak{y})$ der einfachere Ausdruck

$$S(\mathfrak{y}) = K - \varkappa_1 y_1^2 - \varkappa_2 y_2^2 - \varkappa_3 y_3^2 . \tag{10}$$

Satz 2: Hat die Projektionsebene $\mathfrak{E}$ den Stellungsvektor $\mathfrak{x}$, so hat die Quadratsumme der Kantenprojektionen auf $\mathfrak{E}$ die Form

$$S(\mathfrak{x}) = K - \sum_{\lambda} \langle \mathfrak{p}^{(\lambda)}\,\mathfrak{x}\rangle^2 - \sum_{\mu<\nu} \langle (\mathfrak{p}^{(\mu)} - \mathfrak{p}^{(\nu)})\,\mathfrak{x}\rangle^2, \qquad \lambda, \mu, \nu = 1, 2, 3 .$$

Sie lässt sich durch eine orthogonale Matrix $\mathfrak{S}$ auf die Normalform

$$S(\mathfrak{y}) = K - \varkappa_1 y_1^2 - \varkappa_2 y_2^2 - \varkappa_3 y_3^2$$

transformieren. Die Richtungen der drei neuen Koordinatenachsen fallen mit den drei Projektionsrichtungen zusammen, zu denen die Extremwerte der Quadratsummen gehören.

Um ein anschauliches Bild von der Abhängigkeit zwischen der Quadratsumme und der Lage der Projektionsebene zu erhalten, nehmen wir folgende Konstruktion vor: Auf dem durch $\mathfrak{o}$ gehenden Einheitsvektor $\mathfrak{y}$ tragen wir von $\mathfrak{o}$ aus die Strecke

$$\frac{1}{\sqrt{K - S(\mathfrak{y})}}$$

ab. Der Endpunkt sei

$$\mathfrak{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Dann verhält sich

$$x_i : \frac{1}{\sqrt{K - S(\mathfrak{y})}} = y_i : 1 ,$$

also

$$y_i = \sqrt{K - S(\mathfrak{y})}\; x_i , \qquad i = 1, 2, 3 .$$

Dann geht (10) über in

$$\varkappa_1 x_1^2 + \varkappa_2 x_2^2 + \varkappa_3 x_3^2 = 1 . \tag{11}$$

Der Punkt $\mathfrak{x}$ liegt also auf einer Quadrik. Setzen wir die Länge des Vektors $\mathfrak{x}$

$$|\mathfrak{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = r ,$$

so ist $$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1 = (K - S(\mathfrak{y}))\,(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = (K - S(\mathfrak{y}))\,r^2,$$

$$S(\mathfrak{y}) = K - \frac{1}{r^2}.$$

Die Quadratsumme der Kantenprojektionen, die zu dem Stellungsvektor $\mathfrak{y}$ gehört, ist also gleich $K - 1/r^2$. Nun sieht man leicht, dass die Quadrik ein Ellipsoid sein muss. Wären nämlich zwei Eigenwerte $\varkappa$ negativ, so würde es sich bei der Quadrik um ein zweischaliges Hyperboloid handeln, das sich bis ins Unendliche erstreckt. Der Wert von $S(\mathfrak{y})$ würde also beliebig nahe an K herangebracht werden können. Nach (2) würde das aber die Parallelität aller Tetraederkanten zur Projektionsebene erforderlich machen.

Weiter ist klar, dass die Richtungen der Hauptachsen des Ellipsoids mit der Gleichung (11) die Projektionsrichtungen sind, zu denen die extremalen Werte der Quadratsumme $S(\mathfrak{y})$ gehören. Diese sind, wie sich aus (11) und (12) oder aus (10) ergibt

$$K - \varkappa_1\,, \quad K - \varkappa_2\,, \quad K - \varkappa_3\,,$$

oder, da $K = \varkappa_1 + \varkappa_2 + \varkappa_3$, gleich

$$\varkappa_2 + \varkappa_3\,, \quad \varkappa_1 + \varkappa_3\,, \quad \varkappa_1 + \varkappa_2\,.$$

Somit gilt

Satz 3: Legt man die Koordinatenachsen von Satz 2 zugrunde und trägt man auf den durch den Nullpunkt gehenden Stellungsvektoren $\mathfrak{y}$ der Projektionsebenen die Strecke

$$\frac{1}{\sqrt{K - S(\mathfrak{y})}}$$

ab, so liegen die Endpunkte

$$\mathfrak{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

auf dem Ellipsoid

$$\varkappa_1 x_1^2 + \varkappa_2 x_2^2 + \varkappa_3 x_3^2 = 1\,.$$

Seine Hauptachsen geben die Richtungen an, zu denen die Extremwerte $\varkappa_2 + \varkappa_3$, $\varkappa_1 + \varkappa_3$, $\varkappa_1 + \varkappa_2$ der Quadratsummen gehören. Hat ein Punktvektor $\mathfrak{x}$ des Ellipsoids die Länge $r = |\mathfrak{x}|$, so ist

$$S(\mathfrak{y}) = K - \frac{1}{r^2}.$$

W. Jänichen, Berlin-Zehlendorf

LITERATURVERZEICHNIS

[1] El. d. Math. XVIII, 92 (1963). Lösung dieses Heft S. 90–92.

[2] K. P. Grotemeyer, *Analytische Geometrie* (Sammlung Göschen 1958) S. 116–122.

[3] W. Blaschke, *Analytische Geometrie* (Birkhäuser Verlag 1954) S. 86–89.

[4] Fr. Neiss, *Determinanten und Matrizen* (Springer 1948) S. 100–103.

Note on a paper by J. Steinig

In a paper on inequalities concerning the inradius and circumradius of a triangle J. Steinig observes that there does not exist an inequality between $\sum a_i$ and $2\sqrt{3}\,(R + r)$ [1][1]). This note is devoted to a brief discussion of the difference $\sum a_i - 2\sqrt{3}\,(R + r) = d$; our notations are the same as those used by Steinig with the refinement that we number the vertices of the triangle T such that $\alpha_1 \leqq \alpha_2 \leqq \alpha_3$.

[1]) Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 88.

1. As $a_i = 2\,R \sin\alpha_i$ and $R + r = R\,\Sigma \cos\alpha_i$, we have

$$d = 2\,R\left(\Sigma \sin\alpha_i - \Sigma \cos\alpha_i \tan\frac{\pi}{3}\right);$$

therefore

$$d = 4\,R \Sigma \sin\left(\alpha_i - \frac{\pi}{3}\right) = 16\,R\,\Pi \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}\,\alpha_i\right).$$

Hence we get the theorem: *in a non-equilateral triangle one has $d > 0$, $d = 0$ or $d < 0$ accordingly as the middle angle is greater than, as great as or lesser than $\pi/3$.*

In the first example given by STEINIG α_2 is the middle angle and

$$\cos\alpha_2 = 0{,}8 > 0{,}5$$

whence $\alpha_2 < \pi/3$ and $d < 0$.
In the second example $\cos\alpha_2 = 1/6 < 0{,}5$ and therefore $d > 0$.

2. Clearly d has the same sign as

$$\Delta = (\Sigma a_i)^2 - 12\,(R + r)^2.$$

Since

$$(\Sigma a_i)^2 = 2 \Sigma a_i^2 + 4\,r\,(4\,R + r)$$

and

$$\Sigma a_i^2 = 9\,R^2 - O\,H^2,$$

we are lead to

$$\Delta = 6\,R^2 - 8\,R\,r - 8\,r^2 - 2\,O\,H^2$$

or

$$\Delta = 8\,(R^2 - 2\,R\,r) - (2\,R^2 - 8\,R\,r + 8\,r^2) - 2\,O\,H^2. \tag{1}$$

Now $O\,H = 2\,O\,N$ and $N\,J = {}^1/_2\,(R - 2\,r)$, where N denotes the centre of the nine-pointcircle; from this and (1) we obtain

$$\Delta = 8\,(O\,J^2 - N\,J^2 - O\,N^2).$$

We have thus proved:

$$d > 0 \text{ if and only if } \sphericalangle\, J\,N\,O > \pi/2;$$
$$d = 0 \text{ if and only if } \sphericalangle\, J\,N\,O = \pi/2;$$
$$d < 0 \text{ if and only if } \sphericalangle\, J\,N\,O < \pi/2.$$

It is easily seen that our result is equivalent to the theorem: $d > 0$, $d = 0$, $d < 0$ *accordingly as $J\,O > J\,H$, $J\,O = J\,H$, $J\,O < J\,H$*[2]).

G. R. VELDKAMP, Technological University
Eindhoven, Netherlands

REFERENCE

[1] J. STEINIG, *Inequalities concerning the inradius and circumradius of a triangle*, El. Math. *18*, 127 (1963).

Aufgaben

Aufgabe 457. a) Wie gross ist das Achsenverhältnis einer Ellipse, der sich (unendlich viele) Sehnensechsecke einschreiben lassen, deren Seiten abwechselnd zu den beiden Winkelhalbierenden der Achsen parallel sind?

b) Zu jeder Ellipse mit einem Achsenverhältnis $a/b > \sqrt{3}$ gibt es zwei Scharen von Sehnensechsecken, bei denen je zwei aufeinanderfolgende Seiten aufeinander senkrecht

[2]) Bemerkung der Redaktion: Herr Steinig teilt uns mit, dass dieses Resultat auch leicht mit den Formeln (6) und (12) seiner Arbeit verifiziert werden kann.