

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 19 (1964)  
**Heft:** 3

**Rubrik:** Aufgaben

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 14.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

sionalen Unterraum zuordnen. Es sei  $A'_{n-1}$  ein zu diesem paralleler, aber von ihm verschiedener Unterraum von  $E'_n$ . Wir ordnen die mit  $A_{n-1}$  bzw.  $A'_{n-1}$  gebildeten Schnittpunkte der entsprechenden Strahlen der betrachteten Strahlenbündel einander zu. Diese Zuordnung stellt zwischen  $A_{n-1}$  und  $A'_{n-1}$  eine eindeutige Punktabbildung dar, welche eine lineare ist, da sie koplanare Strahlen in ebensolche überführt. Diese Abbildung zwischen  $A_{n-1}$  und  $A'_{n-1}$  ist also eine Affinität.

Es seien  $T_1, T_2, \dots, T_n$   $n$  solche Punkte in  $A_{n-1}$ , die in keinem linearen Unterraum von  $A_{n-1}$  liegen. Dann lässt sich also die Abbildung von  $O, T_1, T_2, \dots, T_n$  auf die entsprechenden gestrichelten Punkte eindeutig zu einer Affinität  $\mathfrak{A}$  zwischen  $E_n$  und  $E'_n$  ergänzen. – Diese lineare Punktabbildung besitzt schon die geforderten Eigenschaften. Es sei nämlich  $\pi$  eine beliebige Ebene aus dem Ebenenbündel mit dem Träger  $O$  und  $P$  ein beliebiger Punkt in  $\pi$ . Wir nehmen im Falle, dass  $\pi$  zu  $A_{n-1}$  nicht parallel ist, zwei Strahlen  $s$  und  $t$ , die  $A_{n-1}$  in  $S$  und  $T$  schneiden. Die Strahlenabbildung führt  $s$  und  $t$  in  $s' = O'S'$  und  $t' = O'T'$  über, wobei  $S' = \mathfrak{A}(S)$  und  $T' = \mathfrak{A}(T)$  gilt. Wir wissen, dass die Ebenenabbildung die durch die Träger  $s$  und  $t$  gehende Ebene  $\pi$  in eine durch die Strahlen  $s'$  und  $t'$  gehende Ebene  $\pi'$  überführt. Da aber  $P$  in der Ebene  $\pi$  von  $O, S$  und  $T$  lag, so wird  $P'$  wegen der Eigenschaft der linearen Punktabbildung in der Ebene von  $O', S'$  und  $T'$ , das heisst in der durch  $s'$  und  $t'$  bestimmten Ebene, also auch in  $\pi'$  liegen. – Ist  $\pi$  zu  $A_{n-1}$  parallel, so existiert in ihr kein  $A_{n-1}$  schneidender Strahl. Dann legen wir durch den Strahl  $OP$  zwei Ebenen  $\sigma$  und  $\tau$ , die  $A_{n-1}$  schneiden. So wird  $P'$ , nach dem vorher Gesagten, sowohl in  $\sigma'$  als auch in  $\tau'$ , also auch in ihrer Schnittlinie liegen. Durch diese Linie geht aber auch  $\pi'$ , da Ebenenbüschel in Ebenenbüschel übergehen. Daher werden durch die konstruierte lineare Punktabbildung die Punkte einer beliebigen Ebene des Ebenenbündels tatsächlich in die Punkte der nach der Ebenenabbildung ihr zugeordneten Ebene übergeführt.

Wir zeigen noch, dass, von einer Dehnung abgesehen, dies die einzige lineare Punktabbildung ist, die die geforderte Eigenschaft besitzt. Nehmen wir also eine andere lineare Abbildung, das heisst eine Affinität  $\overline{\mathfrak{A}}$  zwischen  $E_n$  und  $E'_n$ , die ebenfalls die geforderte Eigenschaft besitzt.  $\overline{\mathfrak{A}}$  muss unter den Trägern der Ebenenbüschel dieselbe Strahlenabbildung zustande bringen wie  $\mathfrak{A}$ . Daher muss  $\overline{\mathfrak{A}}$  den Unterraum  $A_{n-1}$  in eine (nicht durch  $O'$  gehende) zu  $A'_{n-1}$  parallele Lage überführen (weil sonst ein  $A_{n-1}$  nicht schneidender Strahl existierte, dessen Bild schon mit  $\overline{\mathfrak{A}}(A_{n-1})$  einen Schnittpunkt hätte). Dies bedeutet aber, dass  $\overline{O'T'_i} = \lambda \overline{O'T_i}$  ist – wo  $\overline{T_i} = \mathfrak{A}(T_i)$  – mit einem von  $i$  unabhängigen Faktor  $\lambda$ . Daher ist aber  $\overline{\mathfrak{A}} = \mathfrak{H} \mathfrak{A}$ , wo  $\mathfrak{H}$  eine Homothetie im  $E'_n$  bedeutet.

L. TAMÁSSY, Debrecen

## Aufgaben

**Aufgabe 454.** Die Ecktransversalen durch einen beliebigen inneren Punkt  $X$  eines  $n$ -dimensionalen Simplex  $S(A_1, \dots, A_{n+1})$  schneiden die gegenüberliegenden Grenzräume von  $S$  in den Punkten  $Y_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n + 1$ ), die das  $n$ -dimensionale Teilsimplex  $\overline{S}(Y_1, \dots, Y_{n+1})$  aufspannen. Bedeuten  $V$  und  $\overline{V}$  die Inhalte von  $S$  und  $\overline{S}$  und ist ferner  $\overline{A_i X} = R_i$  und  $\overline{X Y_i} = S_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n + 1$ ), dann gilt

$$\overline{V} = n V \prod_{i=1}^{n+1} \frac{S_i}{R_i} \leq \frac{V}{n^n}.$$

$\overline{V}$  nimmt den Maximalwert  $V/n^n$  genau dann an, wenn  $X$  der Schwerpunkt von  $S$  ist.

O. REUTTER, Ochsenhausen (Deutschland)

*Lösung:* Im Ortsvektorensystem mit dem Bezugspunkt  $X$  sei  $\overrightarrow{XA_i} = \mathbf{a}_i$  und damit  $\overrightarrow{XY_i} = (-S_i/R_i) \mathbf{a}_i = \alpha_i \mathbf{a}_i$ . Die Punkte  $X, Y_1, \dots, Y_{i-1}, Y_{i+1}, \dots, Y_{n+1}$  spannen ein  $n$ -Simplex mit dem Inhalt  $V_i$  auf.  $\bar{V}_i$  sei der Inhalt des Simplex mit den Ecken  $X, A_1, \dots, A_{i-1}, A_{i+1}, \dots, A_{n+1}$ . Dann gilt

$$\frac{V_i}{\bar{V}_i} = \frac{|[\alpha_1 \mathbf{a}_1, \alpha_2 \mathbf{a}_2, \dots, \alpha_{i-1} \mathbf{a}_{i-1}, \alpha_{i+1} \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \alpha_{n+1} \mathbf{a}_{n+1}]|}{|[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_{n+1}]|} \quad (1)$$

$$= |\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{i-1} \alpha_{i+1} \dots \alpha_{n+1}| = \frac{S_1 S_2 \dots S_{i-1} S_{i+1} \dots S_{n+1}}{R_1 R_2 \dots R_{i-1} R_{i+1} \dots R_{n+1}},$$

und

$$\frac{\bar{V}_i}{V} = \frac{S_i}{R_i + S_i} = \frac{R_i S_i}{R_i (R_i + S_i)}. \quad (2)$$

Multiplikation von (1) und (2) liefert

$$\frac{V_i}{V} = \frac{R_i}{R_i + S_i} \prod_{i=1}^{n+1} \frac{S_i}{R_i}.$$

Also erhalten wir

$$\frac{\bar{V}}{V} = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^{n+1} V_i = \left( \sum_{i=1}^{n+1} \frac{R_i}{R_i + S_i} \right) \prod_{i=1}^{n+1} \frac{S_i}{R_i}. \quad (3)$$

Aus (2) folgt

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{R_i}{R_i + S_i} = \sum_{i=1}^{n+1} \left( 1 - \frac{S_i}{R_i + S_i} \right) = n + 1 - \sum_{i=1}^{n+1} \frac{S_i}{R_i + S_i} = n + 1 - \frac{1}{V} \sum_{i=1}^{n+1} V_i = n.$$

Damit ist aber (3) äquivalent mit der behaupteten Gleichung

$$\bar{V} = n V \prod_{i=1}^{n+1} \frac{S_i}{R_i}.$$

Die Ungleichung  $\bar{V} \leq V/n^n$  folgt sofort aus der von J. SCHOPP (El. Math. 13, 106–107 (1958)) bewiesenen Abschätzung

$$\prod_{i=1}^{n+1} R_i \geq n^{n+1} \prod_{i=1}^{n+1} S_i,$$

in der das Gleichheitszeichen genau dann gilt, wenn  $X$  der Schwerpunkt des Simplex ist.

F. LEUENBERGER, Feldmeilen

Eine weitere Lösung sandte J. BERKES, Szeged.

**Aufgabe 455.** Eine Folge von Zahlen  $a_1, a_2, a_3, \dots$  ist gegeben durch die Rekursionsformel

$$a_n a_{n+2} = a_{n+1}^2 + 8$$

und die Anfangsglieder  $a_1 = 1, a_2 = 3$ . Man berechne  $a_n$  als Funktion von  $n$  und zeige, dass  $a_n + (-1)^n$  das Quadrat einer natürlichen Zahl ist.

C. BINDSCHEDLER, Küsnacht

*1. Lösung:* Mit dem Ansatz  $a_n = A x_1^n + B x_2^n$  folgt aus der Rekursionsbeziehung  $a_n a_{n+2} - a_{n+1}^2 = 8$  die Gleichung

$$B A (x_1 x_2)^n (x_1 - x_2)^2 = 8. \quad (1)$$

Folglich muss die Bedingung

$$x_1 x_2 = 1 \quad (2)$$

gelten.

Aus den Anfangsbedingungen  $a_1 = 1$  und  $a_2 = 3$  ergeben sich die Gleichungen  $1 = A x_1 + B x_2$  und  $3 = A x_1^2 + B x_2^2$  mit den Lösungen

$$A = \frac{3 - x_2}{x_1(x_1 - x_2)} \quad \text{und} \quad B = \frac{3 - x_1}{x_2(x_2 - x_1)}. \quad (3)$$

Aus (1), (2) und (3) folgt die Gleichung  $(3 - x_1)(3 - x_2) = -8$ , die die beiden Wurzeln  $x_1 = (1 + \sqrt{2})^2$  und  $x_2 = (1 - \sqrt{2})^2$  besitzt. Damit ist nach (3) auch

$$A = \frac{1}{2(1 + \sqrt{2})^2} \quad \text{und} \quad B = \frac{1}{2(1 - \sqrt{2})^2}$$

bestimmt.

Somit ergibt sich  $a_n$  als Funktion von  $n$ :

$$a_n = \frac{1}{2} \left[ (1 + \sqrt{2})^{2n-2} + (1 - \sqrt{2})^{2n-2} \right].$$

Es ist, wie eine kurze Rechnung zeigt:

$$a_n + (-1)^n = \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} \left[ (1 + \sqrt{2})^{n-1} - (1 - \sqrt{2})^{n-1} \right] \right\}^2 = b_n^2.$$

Mittels der binomischen Formel überlegt man sich, dass  $b_n$  für jedes  $n$  eine natürliche Zahl ist. Damit ist auch der zweite Teil der Aufgabe gelöst.

Für die Folge der  $b_n$  findet man die einfache Rekursionsbeziehung  $2b_n + b_{n-1} = b_{n+1}$ .  
 E. HERRMANN (Köln)

2. Lösung: Wir betrachten zuerst ein allgemeineres Problem, das dieser Aufgabe den ihr anhaftenden Charakter einer Kuriosität nimmt. Sei  $C_n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) eine Folge von Matrizen der Gestalt

$$C_n = \begin{pmatrix} c_n & c_{n+1} & \dots & c_{n+k-1} \\ c_{n+1} & c_{n+2} & \dots & c_{n+k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n+k-1} & c_{n+k} & \dots & c_{n+2k-2} \end{pmatrix},$$

die folgendermassen definiert ist:  $C_0$  sei gegeben mit  $\det C_0 = c \neq 0$ . Ist  $C_n$  bereits bestimmt, dann sei  $C_{n+1}$  eine Matrix der angegebenen Gestalt mit

$$\det C_{n+1} = a \det C_n, \quad a \neq 0. \quad (1)$$

Dann gilt: Sind durch (1) alle Matrizen  $C_n$  eindeutig bestimmt (das heisst ist das Element  $c_{n+2k-2}$  immer eindeutig bestimmt), dann ist die Folge  $\{c_n\}$  der Matrixelemente rekurrent von der Ordnung  $k$ . Es gibt also reelle Zahlen  $a_1, \dots, a_k$  so, dass

$$c_n = a_1 c_{n-1} + \dots + a_k c_{n-k} \quad (n \geq k) \quad (2)$$

gilt.

Beweis: Es genügt zu zeigen, dass für alle  $n$

$$C_n = C_0 A^n \quad (3)$$

gilt, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_k \\ 1 & 0 & \dots & 0 & a_{k-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_1 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Denn dann ist  $C_{n+1} = C_n A$  und das ist mit (2) äquivalent.

Wenn (3) erfüllt ist, dann ist (1) trivialerweise richtig, mit  $a = (-1)^{k-1} a_k$ , das heisst für jede rekurrente Folge der Ordnung  $k$  gilt  $\det C_n = c a^n$ . Es ist also  $C_n = C_0 A^n$  sicher eine Lösung von (1) und nach Voraussetzung die einzige ( $A = C_0^{-1} C_1$ ).

Sei nun  $k = 2$ . Dann ist

$$C_n = \begin{pmatrix} c_n & c_{n+1} \\ c_{n+1} & c_{n+2} \end{pmatrix}, \quad \det C_n = c_n c_{n+2} - c_{n+1}^2.$$

Nach Voraussetzung ist  $c_0 = 1$ ,  $c_1 = 3$ ,  $c_2 = 8$ ,  $a = 1$ . Daraus folgt  $c_2 = 17$ ,  $c_3 = 99, \dots$  Die  $c_n$  sind eindeutig bestimmt, es gilt daher  $C_n = C_0 A^n$ .

$$C_0 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 17 \end{pmatrix}, \quad C_1 = \begin{pmatrix} 3 & 17 \\ 17 & 99 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 17 \end{pmatrix} A.$$

Daraus folgt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 17 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 17 \\ 17 & 99 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 17 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 17 \\ 17 & 99 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix},$$

das heisst es gilt  $c_n = 6c_{n-1} - c_{n-2}$ ,  $n \geq 2$ . Seien  $\alpha^2 = 3 + 2\sqrt{2}$ ,  $\beta^2 = 3 - 2\sqrt{2}$  die Wurzeln der Gleichung  $x^2 - 6x + 1 = 0$ . Dann ist

$$c_n = \frac{\alpha^{2n} + \beta^{2n}}{2}.$$

Denn  $c_n$  erfüllt dann trivialerweise die Rekursion und die Anfangsbedingung  $c_0 = 1$ ,  $c_1 = 3$ . Wir haben damit

$$c_n = \frac{(3 + 2\sqrt{2})^n + (3 - 2\sqrt{2})^n}{2}.$$

Seien nun  $\alpha = 1 + \sqrt{2}$ ,  $\beta = 1 - \sqrt{2}$  die Quadratwurzeln von  $3 + 2\sqrt{2}$ ,  $3 - 2\sqrt{2}$ . Wir bilden die Folge natürlicher Zahlen  $b_n = (\alpha^n + \beta^n)/2$  und behaupten:

$$c_n + (-1)^{n+1} = \left( \frac{b_{n-1} + b_{n+1}}{2} \right)^2.$$

*Beweis:*

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\alpha^{n-1} + \alpha^{n+1} + \beta^{n-1} + \beta^{n+1}}{4} \right)^2 \\ &= \frac{1}{16} \left\{ \alpha^{2n} \left( \alpha + \frac{1}{\alpha} \right)^2 + \beta^{2n} \left( \beta + \frac{1}{\beta} \right)^2 + 2(\alpha\beta)^n \left( \alpha + \frac{1}{\alpha} \right) \left( \beta + \frac{1}{\beta} \right) \right\} \\ &= \frac{(\alpha - \beta)^2}{8} \left\{ \frac{\alpha^{2n} + \beta^{2n}}{2} + (-1)^{n+1} \right\} = \frac{(\alpha - \beta)^2}{8} (b_{2n} + (-1)^{n+1}) = c_n + (-1)^{n+1}. \end{aligned}$$

J. CIGLER, Wien

**3. Lösung:** Wir erweitern auf  $n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$  Für unbestimmte  $a, b$  (also  $a^2 - 4b \neq 0$ ) hat die Differenzgleichung  $x_{n+2} = ax_{n+1} - bx_n$  Partikulärlösungen  $x_{n+1} = (A^n - B^n)(A - B)^{-1} = R_n$  und  $x_{n+1} = A^n + B^n = S_n$  mit  $x^2 - ax + b = (x - A)(x - B)$  für alle  $x$ . Also folgen  $A, B$  aus  $a = A + B$ ,  $b = AB$ . Für  $\nu, k = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$  gilt

$$\left| \begin{array}{cc} R_{\nu-k} & R_{\nu} \\ R_{\nu} & R_{\nu+k} \end{array} \right| = \underbrace{b^{k-\nu} R_k^2}_{(1)} = \underbrace{\frac{b^{\nu-k} S_{2k} - 2b^{\nu}}{a^2 - 4b}}_{(2)} = \frac{1}{a^2 - 4b} \left| \begin{array}{cc} S_{\nu-k} & S_{\nu} \\ S_{\nu} & S_{\nu+k} \end{array} \right|,$$

wie man durch Einsetzen obiger  $R$  und  $S$  bestätigt. Setzt man in Gleichung (1) speziell  $a, b, S_{2k} = 2, -1, 2a_{k+1}$ , so ergibt sich

$$2R_k \equiv \frac{(1 + \sqrt{2})^k - (1 - \sqrt{2})^k}{\sqrt{2}} = \sqrt{a_{k+1} - (-1)^k} \quad \text{mit ganzen } R_k. \quad (1')$$

Damit sind beide Teilaufgaben gelöst. Denn durch weiteres Einführen von  $\nu$ ,  $k = 2n$ , 2 in (2), wieder mit  $a, b, S_{2n} = 2, -1, 2a_{n+1}$ , erscheint die Gesamtheit der Voraussetzungen der Aufgabe:

$$8 = \begin{vmatrix} a_n & a_{n+1} \\ a_{n+1} & a_{n+2} \end{vmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{matrix} 2a_1 = S_0 = 2 \\ 2a_2 = S_2 = 6 \end{matrix} \quad (2')$$

I. PAASCHE, München

Weitere Lösungen sandten S. T. M. ACKERMANS (Eindhoven), L. BERNSTEIN (Tel Aviv), H. GAEBELEIN (Helmstedt), G. GÜTLER (Frankfurt a. M.), W. JÄNICHE (Berlin), L. KIEFFER (Luxemburg), A. MAKOWSKI (Warschau), H. MEILI (Winterthur), O. REUTTER (Ochsenhausen, Deutschland), E. TEUFFEL (Korntal, Stuttgart).

**Aufgabe 456.** a) Gegeben sind zwei Punkte  $A, B$  und eine Gerade  $g$ , welche die Strecke  $AB$  schneidet. Gesucht wird der Kreis durch  $A$  und  $B$ , der  $g$  unter minimalem Winkel schneidet.

b) Gegeben sind ein Kreis  $K$  und eine Gerade  $g$ , welche die Ebene von  $K$  innerhalb  $K$  schneidet. Gesucht werden die beiden Kugeln durch  $K$ , welche  $g$  unter minimalem und unter maximalem Winkel schneiden.

C. BINDSCHEDLER, Küsnacht

*Lösung:* a) Statt eine feste Strecke und die Schar aller Kreise durch ihre Endpunkte zu betrachten, fassen wir einen festen Kreis und eine Schar paralleler Sehnen ins Auge. Jede Sehne denken wir uns im gleichen Verhältnis geteilt, in dem  $g$  die Strecke  $\overline{AB}$  der Aufgabe teilt. Alle Teilpunkte liegen auf einer Halbellipse über dem zur Sehnenrichtung senkrechten Kreisdurchmesser. Denkt man sich durch jeden Teilpunkt eine Gerade gelegt, die mit der Sehne denselben Winkel einschliesst wie  $g$  mit  $\overline{AB}$ , so erkennt man sofort, dass die Ellipsentangente in dieser Parallelenschar den Kreis unter minimalem Winkel schneidet. Hieraus folgt durch eine Streckung sofort, dass die Tangenten in  $A$  und  $B$  an den gesuchten Kreis durch den Schnittpunkt der Mittelnormalen von  $\overline{AB}$  mit  $g$  gehen.

G. GÜTLER, Frankfurt a. M.

b) (Lösung des Aufgabenstellers) Der Schnittwinkel ist durch das Verhältnis  $\varepsilon$  des Kugelradius zum Abstand  $(M, g)$  der Geraden vom Kugelmittelpunkt  $M$  bestimmt. Ist  $A$  ein fester Punkt von  $K$ , so ist der geometrische Ort des Punktes  $M$ , für welchen das Verhältnis  $\overline{MA}/(M, g) = \varepsilon > 1$  konstant ist, ein einschaliges Rotationshyperboloid, dessen Kehlkreis in der Normalebene zu  $g$  durch  $A$  liegt. Zu verschiedenen Werten von  $\varepsilon$  gehören die Flächen eines Büschels. Da  $M$  auf der Normalen  $n$  zur Ebene von  $K$  durch den Mittelpunkt von  $K$  liegen muss, gehört zu einem extremen Wert von  $\varepsilon$  eine solche Fläche des Büschels, die  $n$  berührt. Man findet also die gesuchten Kugelmittelpunkte als Doppelpunkte der Involution, die irgend zwei Flächen des Büschels auf  $n$  bestimmen.

G. GÜTLER gab eine Lösung von b), die den obigen Lösungsgedanken von a) auf den Raum überträgt aber nicht einfach darzustellen ist. Eine Lösung mit Inversion sandte J. BASILE (Brüssel). L. KIEFFER (Luxemburg) gab eine analytische Lösung.

**Nachtrag:** Vierte Lösung der Aufgabe Nr. 447 (vgl. *El. Math.* 19, 14–16 (1964)).

Zwei Kugeln, die keine inneren Punkte gemein haben, behalten diese Eigenschaft, wenn bei gleicher Lage der Mittelpunkte ihre Radien so geändert werden, dass deren Summe konstant bleibt. Fasst man den Drehzylinder und den Torus als Vereinigungsmenge ihrer einbeschriebenen Kugeln auf, dann reduziert sich die Aufgabe darauf, anstelle des Torus dessen Mittelpunktskurve (Kreis mit dem Radius  $R + r$ ) um die Berührnormale so weit zu drehen, dass sie gerade noch nicht in den um  $2r$  verdickten Drehzylinder eindringt. Dies ist genau dann der Fall, wenn der gedrehte Kreis Krümmungskreis der durch die Kreisebene ausgeschnittenen Ellipse im Nebenscheitel geworden ist und damit den Drehzylinder noch umschließt. Es folgt

$$R + r = \left( \frac{\varrho + r}{\cos \varphi} \right)^2 \frac{1}{\varrho + r}$$

und damit

$$\cos \varphi = \sqrt{\frac{r + \varrho}{r + R}}.$$

Dieser Wert ergibt sich auch direkt aus dem Eulerschen Satz über die Krümmungen der Normalschnitte in einem Flächenpunkt.

Tritt anstelle des Torus eine Rohrfläche, so ist die Mittelpunktskurve, welche in der Ausgangslage den Querschnittskreis (Radius  $\varrho + r$ ) umschliessen muss, in entsprechender Weise zu drehen. Die gedrehten Lagen werden senkrecht auf die Ebene des Querschnittskreises projiziert und sind zur Ausgangslage senkrecht affin mit der Berühnormalen als Affinitätsachse, wobei jeder Kurve ein Affinitätsverhältnis  $\lambda$  zugeordnet ist. Die Affinitätsverhältnisse der den Kreis (Radius  $\varrho + r$ ) umschliessenden Kurven haben eine untere Grenze  $\lambda^*$ . Dann gilt

$$\cos \varphi = \lambda^* .$$

Anstelle des Zylinders trete ein weiterer Torus ( $r', R'$ ) mit  $R' \geq r, r' \leq R$ , in den der gegebene Torus ( $r, R$ ) eingehängt ist. Nach der obigen Methode ist der Torus ( $r, R$ ) durch den Kreis  $K$  ( $r + R$ ) und der Torus ( $r', R'$ ) durch den Torus  $T'$  ( $r' + r, R' - r$ ) zu ersetzen. Wird  $K$  um die Berühnormale gedreht, so schneiden die Ebenen von  $K$  aus  $T'$  Kurven aus, deren Krümmungsradien im Berührungspunkt mit dem Drehwinkel bis zu einer Grenzlage unbegrenzt zunehmen (Dupin'sche Indikatrix!). Der unterhalb des Berührungspunktes gelegene Teil dieser Schnittkurven (bizirkuläre Quartiken) wird jeweils von ihrem Krümmungskreis im Berührungspunkt umschlossen, da von den 8 Schnittpunkten mit dem Krümmungskreis 4 in den Berührungspunkt fallen, weitere 4 in die uneigentlichen Kreispunkte und der unterste Punkt von  $T'$  für  $\varphi \neq 0$  innerhalb des Krümmungskreises liegt. Unter Zuhilfenahme des Euler'schen Satzes bzw. der Dupin'schen Indikatrix folgt nach leichter Rechnung

$$\operatorname{tg}^2 \varphi = \frac{(R - r')(R' - r)}{(R + R')(r + r')} .$$

O. BAIER, München

## Neue Aufgaben

**Aufgabe 477.** Man bestimme diejenigen ganzzahligen arithmetischen Folgen dritter Ordnung, für die die Summe der ersten  $n$  Glieder stets eine Quadratzahl ist.

W. JÄNICHEN, Berlin

**Aufgabe 478.** Von vier positiven Zahlen  $x_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) kennt man die ersten vier Potenzmittel

$$M_n = \left( \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 x_i^n \right)^{1/n} \quad (n = 1, 2, 3, 4)$$

Wie können die  $x_i$  exakt berechnet werden?

Zahlenbeispiel:  $M_1 = 9$ ,  $M_2 = 2\sqrt{21}$ ,  $M_3 = 0,5\sqrt[3]{6474}$ ,  $M_4 = \sqrt[4]{8004}$ .

G. GÜTLER, Frankfurt a. M.

**Aufgabe 479.** Démontrer que pour tout entier  $k \geq 0$  il existe un nombre naturel  $a_k$  tel que l'équation  $x^2 + y^2 = a_k$  a précisément  $k$  solutions distinctes en nombres naturels  $x, y$ . Trouver les plus petits nombres  $a_k$  pour  $1 \leq k \leq 5$ .

W. SIERPIŃSKI, Varsovie

**Aufgabe 480.** Démontrer que chacune des progressions  $8k + 1$ ,  $8k + 3$ ,  $8k + 5$  et  $8k + 7$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) contient une infinité des nombres pseudopremiers (c'est-à-dire des nombres composés  $n$  tels que  $n \mid 2^n - 2$ ).

A. ROTKIEWICZ, Varsovie

## Aufgaben für die Schule

Es wird kein Anspruch auf Originalität der Aufgaben erhoben; Autoren und Quellen werden im allgemeinen nicht genannt. Die Daten für Aufgaben aus der Darstellenden Geometrie sind durchweg so festgelegt, dass der Ursprung des Koordinatensystems in der Mitte des linken Randes eines Blattes vom Format A 4 gewählt werden soll,  $x$ -Achse nach rechts,  $y$ -Achse nach vorn,  $z$ -Achse nach oben, Einheit 1 cm. Anregungen und Beiträge sind zu senden an Prof. Dr. WILLI LÜSSY, Büelrainstrasse 51, Winterthur.

1. Schneide die Kugel

$$(x - 8)^2 + (y - 7)^2 + (z - 8)^2 = 36$$

mit der Gerade

$$\frac{x}{11} + \frac{y}{12} = 1; \quad \frac{x}{16} + \frac{z}{8} = 1,$$

und bestimme den Winkel, den die Gerade mit der Kugel bildet.



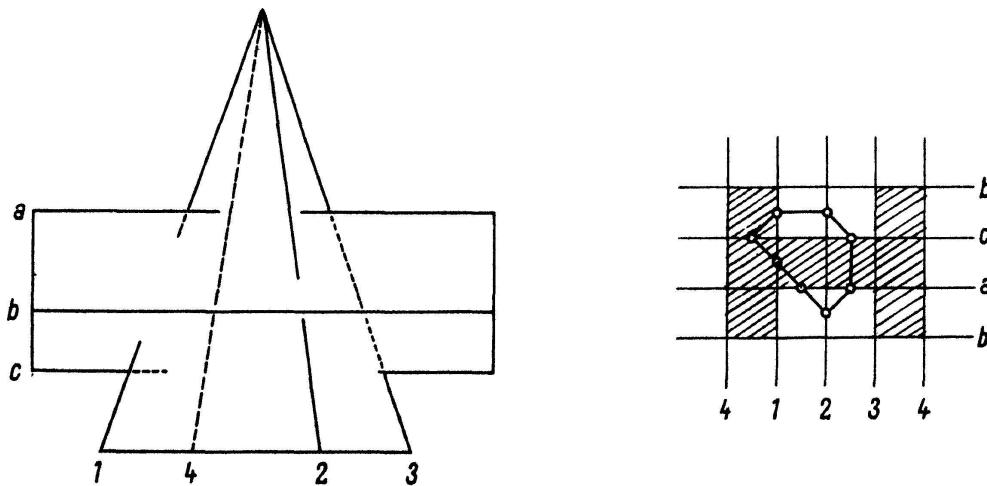
$$\alpha = 50,0^\circ \pm 0,5^\circ.$$

2. Ein Drehkegel besitzt eine Mantellinie  $SA = 10$  cm und den Radius des Grundkreises  $MA = 2$  cm. Auf  $SA$  macht man  $SB = 5$  cm und zieht von  $A$  nach  $B$  diejenige geodätische Linie auf dem Kegelmantel, die die Kegelspitze zweimal umschlingt.

- a) Stelle den Kegel in einfachster Lage dar und zeichne die geodätische Linie in Grund- und Aufriss.
- b) Berechne die Länge  $s$  der Kurve.
- c) Die Kurve besitzt einen Doppelpunkt  $P$ , berechne seine Lage.

► Für Tangenten und Asymptoten siehe z.B. SCHEFFERS, Geometrie I, Seite 343.  $s = 14,35$  cm.  $P$  liegt auf der Mantellinie  $SC$ ,  $SP = 2,53$  cm,  $\sphericalangle AMC = 149^\circ$ .

3. Bei der Durchdringung zweier Pyramiden kann für das richtige Zeichnen und Ausziehen der Schnittfigur mit Vorteil das folgende graphische Verfahren verwendet werden. Man zeichnet schematisch die Abwicklung der beiden Mantelflächen, wobei man, wenn möglich, jede längs einer Kante aufschneidet, die nicht durchdringt.



In dieses Schema werden die gefundenen Schnittpunkte eingetragen, wie die Figur zeigt. Sie lassen sich durch einen oder mehrere geschlossene Streckenzüge verbinden, die die Durchdringungsfigur darstellen. Schraffiert man im Schema noch die unsichtbaren Flächen, so kann man ablesen, wie die Punkte richtig zu verbinden sind, und ob die Kanten der Durchdringungsfigur sichtbar sind oder nicht. Das Schema wurde von Prof. R. SCHOECK, früher Technikum Winterthur, entwickelt.

4. Zwei Pyramiden haben eine gemeinsame reguläre achteckige Grundfläche in  $\Pi_1$ . Mittelpunkt  $M(9; 6; 0)$ , eine Ecke  $A(9; 11; 0)$ . Die Pyramidenspitzen sind  $P_1(2,5; 6; 9,5)$  und  $P_2(19; 1,5; 9,5)$ . Man konstruiere den gemeinsamen Kern.

5.  $M(9; 7; 6)$  ist der Mittelpunkt einer Kugel vom Radius  $R = 3$ .  
 $A(4; 7; 9)$  und  $B(16; 7; 12)$  sind die Spitzen zweier Kegel, die beide die Kugel längs eines Kreises berühren. Zeichne die Durchdringung der beiden Kegelflächen.
- Die Schnittkurve zerfällt in zwei Ellipsen.

## Literaturüberschau

*Linear Programming and Extensions.* Von GEORGE B. DANTZIG. XVI und 625 Seiten. \$11.50. Princeton University Press, Princeton, N. J. 1963.

Der Begriff der linearen Programmierung ist in der Zeit des 2. Weltkrieges und der unmittelbaren Nachkriegszeit entstanden. Man wollte Organisationspläne unter Verwendung linearer Funktionen mathematisch formulieren und beste Lösungen ermitteln.

Ein in der Literatur häufig anzutreffendes Beispiel ist das Menüproblem. Es soll aus einer Liste von Nahrungsmitteln ein Menü so zusammengestellt werden, dass verschiedene Nebenbedingungen betr. Mindestmengen von Kalorien, Vitaminen, Eiweißstoffen und Maximalmenge von Fetten erfüllt sind. Unter allen zulässigen Kombinationen soll die preisgünstigste ausgewählt werden. Mathematisch handelt es sich darum, eine lineare Zielfunktion unter Berücksichtigung einer grösseren Zahl linearer Ungleichungen minimal werden zu lassen.

Die ersten zwei Kapitel sind der Problemstellung und der Entwicklung des kaum 20 Jahre alten Forschungsgebietes gewidmet. Der mathematisch orientierte Leser hätte sich diesen Teil etwas kürzer gewünscht.

Im Hauptteil des Buches wird die Simplex-Methode, die mit dem Namen des Verfassers verknüpft ist, als Lösungsmethode für die lineare Programmierung dargestellt. Ferner werden Vergleiche mit andern Methoden z. B. derjenigen der Lagrange-Faktoren durchgeführt. Diese ist in der praktischen Anwendung der Simplexmethode meist unterlegen, weil die Anzahl der zu betrachtenden Fälle bei der Lagrange-Methode zu gross wird. (Druckfehler in diesem Kapitel, Seite 141, Zeile 11.)

Die Methoden lassen sich ausdehnen auf Minimalisierung konvexer Funktionen sowie auf Behandlung gewisser Netzwerke und kombinatorischer Probleme, die in Form linearer Ungleichungen mit ganzzahligen Variablen auftreten. In einem besonderen Kapitel sind die in den letzten Jahren erarbeiteten Ansätze für die Fehlerrechnung zusammengestellt. In diesem Gebiet stehen für die weitere Forschung noch viele Fragen offen.

Bei einem angewandten Problem sind oft verschiedene mathematische Modelle möglich, die aber zu unterschiedlichen Lösungen führen können, da die Modelle nicht gleichwertige Näherungen der komplexen Realität sind. Bei Verbesserung des Modells wächst der Rechenaufwand meistens ungeheuer. Hier springen die modernen Rechenautomaten in die Lücke und dehnen den Bereich des Möglichen stark aus.

Eine grosse Zahl von Beispielen und Aufgaben sowie ein ausführliches Literaturverzeichnis runden das stattliche Buch ab.

E. R. BRÄNDLI

*Introduction to Calculus.* Von K. KURATOWSKI. 315 Seiten mit 29 Figuren. 35s. Pergamon Press, Oxford 1961.

Es handelt sich um die Vorlesung über Differential- und Integralrechnung, die der Verfasser an der Universität Warschau hält. Der Lehrgang hat die klassische Einteilung: Zahlbegriff und Variable, Grenzwert von Zahlenfolgen, Funktionen und von Reihen von Funktionen, gestützt auf die  $\varepsilon$ -Definition, Differential- und Integralrechnung. Interessant ist der Versuch, die Definitionen der Stetigkeit, gleichmässigen Konvergenz usw. zur Betonung ihres gleichartigen Charakters in den Symbolen der mathematischen Logik anzuschreiben und zu diskutieren. Text, Beweise und ausgerechnete Beispiele sind kurz und