Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 19 (1964)

Heft: 3

Rubrik: Kleine Mitteilungen

With these informations and (11) we can construct the following table of values of N_{2m+1}^{2p+1}:

	$m =$	0	1	2	3	4
	$2m+1 =$	1	3	5	7	9
$p = 0$	$2p+1 = 1$	1				
1	3	-3	1			
2	5	5	-5	1		
3	7	-7	14	-7	1	
4	9	9	-30	27	-9	1

SELMO TAUBER, Portland State College, Portland, Oregon

REFERENCES

[1] B. CHRYSTAL, *Algebra* (Chelsea Publ. Co., N.Y., 1952).
[2] J. RIORDAN, *An Introduction to Combinatorial Analysis* (J. Wiley Inc., N.Y., 1958).

Kleine Mitteilungen

Über die Kompatibilität gewisser Ebenenabbildungen und linearer Punktabbildungen

Wir betrachten eine eineindeutige Abbildung zwischen den Elementen zweier Ebenenbündel der n-dimensionalen affinen Räume E_n und E_n'. Es entsteht die Frage, ob zwischen E_n und E_n' eine solche eineindeutige Punktabbildung existiert, welche die gegebene Ebenenabbildung induziert, das heisst, die mit der obigen Ebenenabbildung kompatibel ist. – Das Ziel dieser Note ist, bezüglich dieser Frage den folgenden Satz zu beweisen:

Satz: Eine eineindeutige Ebenenabbildung zwischen den Elementen zweier Ebenenbündel ist dann und nur dann mit einer eineindeutigen Punktabbildung kompatibel, wenn diese Ebenenabbildung ein Ebenenbüschel in beiden Richtungen wieder in Ebenenbüschel überführt. Die Ebenenabbildung bestimmt die Punktabbildung bis auf eine Dehnung.

Die Notwendigkeit der Bedingungen ist offenbar.

Wir zeigen, dass die Bedingung auch hinreichend ist. Für die Träger der Ebenenbündel wollen wir der Einfachheit halber den Ursprung O bzw. O' von E_n bzw. E_n' wählen. Die Zuordnung der Träger der einander entsprechenden Ebenenbüschel induziert zwischen den Strahlenbündeln mit den Trägern O bzw. O' eine eineindeutige Strahlenabbildung. Diese Strahlenabbildung ordnet drei koplanaren Strahlen drei Strahlen mit derselben Eigenschaft zu. Sind nämlich s, t und u drei verschiedene koplanare Strahlen, so gehört ihre Ebene σ zu jedem der Ebenenbüschel mit den Trägern s, t und u. Daher gehört aber die σ nach der Ebenenabbildung zugeordnete Bildebene σ' zu jedem der drei Ebenbüschel mit den Trägern s', t' und u', wo s', t', u' die Bilder nach der Strahlenabbildung von s, t und u sind.

Es sei nun A_{n-1} ein $(n-1)$-dimensionaler Unterraum von E_n, der nicht durch O geht. Mit Hilfe der Strahlenabbildung kann man dem $(n-1)$-dimensionalen Unterraum, der zu A_{n-1} parallel ist und durch O geht, in E_n' eindeutig einen durch O' gehenden $(n-1)$-dimensionalen Unterraum zuordnen. Es sei A'_{n-1} ein zu diesem paralleler, aber von ihm verschiedener Unterraum von E'_n. Wir ordnen die mit A_{n-1} bzw. A'_{n-1} gebildeten Schnittpunkte der entsprechenden Strahlen der betrachteten Strahlenbündel einander zu. Diese Zuordnung stellt zwischen A_{n-1} und A'_{n-1} eine eineindeutige Punktabbildung dar, welche eine lineare ist, da sie koplanare Strahlen in ebensolche überführt. Diese Abbildung zwischen A_{n-1} und A'_{n-1} ist also eine Affinität.

Es seien $T_1, T_2, \ldots, T_n$ n solche Punkte in A_{n-1}, die in keinem linearen Unterraum von A_{n-1} liegen. Dann lässt sich also die Abbildung von $O, T_1, T_2, \ldots, T_n$ auf die entsprechenden gestrichenen Punkte eindeutig zu einer Affinität $\mathfrak{A}$ zwischen E_n und E'_n ergänzen. – Diese lineare Punktabbildung besitzt schon die geforderten Eigenschaften. Es sei nämlich π eine beliebige Ebene aus dem Ebenenbündel mit dem Träger O und P ein beliebiger Punkt in π. Wir nehmen im Falle, dass π zu A_{n-1} nicht parallel ist, zwei Strahlen s und t, die A_{n-1} in S und T schneiden. Die Strahlenabbildung führt s und t in $s' = O'S'$ und $t' = O'T'$ über, wobei $S' = \mathfrak{A}(S)$ und $T' = \mathfrak{A}(T)$ gilt. Wir wissen, dass die Ebenenabbildung die durch die Träger s und t gehende Ebene π in eine durch die Strahlen s' und t' gehende Ebene π' überführt. Da aber P in der Ebene π von O, S und T lag, so wird P' wegen der Eigenschaft der linearen Punktabbildung in der Ebene von O', S' und T', das heisst in der durch s' und t' bestimmten Ebene, also auch in π' liegen. – Ist π zu A_{n-1} parallel, so existiert in ihr kein A_{n-1} schneidender Strahl. Dann legen wir durch den Strahl OP zwei Ebenen σ und τ, die A_{n-1} schneiden. So wird P', nach dem vorher Gesagten, sowohl in σ' als auch in τ', also auch in ihrer Schnittlinie liegen. Durch diese Linie geht aber auch π', da Ebenenbüschel in Ebenenbüschel übergehen. Daher werden durch die konstruierte lineare Punktabbildung die Punkte einer beliebigen Ebene des Ebenenbündels tatsächlich in die Punkte der nach der Ebenenabbildung ihr zugeordneten Ebene übergeführt.

Wir zeigen noch, dass, von einer Dehnung abgesehen, dies die einzige lineare Punktabbildung ist, die die geforderte Eigenschaft besitzt. Nehmen wir also eine andere lineare Abbildung, das heisst eine Affinität $\overline{\mathfrak{A}}$ zwischen E_n und E'_n, die ebenfalls die geforderte Eigenschaft besitzt. $\overline{\mathfrak{A}}$ muss unter den Trägern der Ebenenbüschel dieselbe Strahlenabbildung zustande bringen wie $\mathfrak{A}$. Daher muss $\overline{\mathfrak{A}}$ den Unterraum A_{n-1} in eine (nicht durch O' gehende) zu A'_{n-1} parallele Lage überführen (weil sonst ein A_{n-1} nicht schneidender Strahl existierte, dessen Bild schon mit $\overline{\mathfrak{A}}(A_{n-1})$ einen Schnittpunkt hätte). Dies bedeutet aber, dass $\overline{O'\overline{T}_i} = \lambda\, \overline{O'T'_i}$ ist – wo $\overline{T}_i = \overline{\mathfrak{A}}(T_i)$ – mit einem von i unabhängigen Faktor λ. Daher ist aber $\overline{\mathfrak{A}} = \mathfrak{H}\,\mathfrak{A}$, wo $\mathfrak{H}$ eine Homothetie im E'_n bedeutet.

L. Tamássy, Debrecen

Aufgaben

Aufgabe 454. Die Ecktransversalen durch einen beliebigen inneren Punkt X eines n-dimensionalen Simplex $S\,(A_1, \ldots, A_{n+1})$ schneiden die gegenüberliegenden Grenzräume von S in den Punkten Y_i $(i = 1, 2, \ldots, n+1)$, die das n-dimensionale Teilsimplex $\overline{S}\,(Y_1, \ldots, Y_{n+1})$ aufspannen. Bedeuten V und $\overline{V}$ die Inhalte von S und $\overline{S}$ und ist ferner $\overline{A_i X} = R_i$ und $\overline{X Y_i} = S_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n+1)$, dann gilt

$$\overline{V} = n\, V \prod_{i=1}^{n+1} \frac{S_i}{R_i} \leqq \frac{V}{n^n}\,.$$

$\overline{V}$ nimmt den Maximalwert V/n^n genau dann an, wenn X der Schwerpunkt von S ist.

O. Reutter, Ochsenhausen (Deutschland)