

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 19 (1964)  
**Heft:** 3

**Artikel:** On N-Numbers  
**Autor:** Tauber, S.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-23300>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 18.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## On $N$ -Numbers

### 1. Definition of the $N$ -numbers

We consider the expansion of  $(x + x^{-1})^n$  in function of terms of the form  $x^m + x^{-m}$ . We clearly have

$$(x + x^{-1})^n = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} x^{2m-n}. \quad (1)$$

We separate two possible cases:

(i)  $n$  is even,  $n = 2p$ , then

$$(x + x^{-1})^{2p} = \sum_{m=0}^{2p} \binom{2p}{m} x^{2m-2p} = \sum_{m=0}^{p-1} \binom{2p}{m} [x^{2p-2m} + x^{2m-2p}] + \binom{2p}{p}. \quad (2)$$

(ii)  $n$  is odd,  $n = 2p + 1$

$$(x + x^{-1})^{2p+1} = \sum_{m=0}^{2p+1} \binom{2p+1}{m} x^{2m-2p-1} = \sum_{m=0}^p \binom{2p+1}{m} [x^{2p-2m+1} + x^{2m-2p-1}]. \quad (3)$$

We consider now the inverse problem, i.e. expressing  $x^n + x^{-n}$  in function of powers of  $x + x^{-1}$ . We call  $N$ -numbers the coefficients of this expansion. It is immediately seen that if  $n$  is even the expansion will contain only even powers of  $x + x^{-1}$ , while if  $n$  is odd the expansion will contain only odd powers of  $x + x^{-1}$ . We thus write

(i) for  $n$  even,  $n = 2p$ ,

$$x^{2p} + x^{-2p} = \sum_{m=0}^p N_{2m}^{2p} (x + x^{-1})^{2m}; \quad N_{2m+1}^{2p} = 0, \quad N_{2m}^{2p} = 0$$

for  $p < m, \quad p < 0, \quad m < 0; \quad (4)$

(ii) for  $n$  odd,  $n = 2p + 1$ ,

$$x^{2p+1} + x^{-2p-1} = \sum_{m=0}^p N_{2m+1}^{2p+1} (x + x^{-1})^{2m+1}; \quad N_{2m}^{2p+1} = 0, \quad N_{2m+1}^{2p+1} = 0$$

for  $p < m, \quad p < 0, \quad m < 0. \quad (5)$

It is the aim of this paper to study some of the properties of the  $N$ -numbers, in particular their relation to the binomial coefficients.

The  $N$ -numbers are known in the literature. We find, for example, in [1], pp. 201–205, an explicit definition of these numbers. Here is how this is done: Let,

$$y^2 - S y + P = 0,$$

be a quadratic equation,  $\alpha$  and  $\beta$  its roots, then clearly  $\alpha + \beta = S, \quad \alpha\beta = P$ . According to [1] we have the following expression for  $\alpha^n + \beta^n$ :

(i) If  $n = 2p$ , i.e.  $n$  is even

$$\alpha^{2p} + \beta^{2p} = 2 (-1)^p [P^p + \sum_{m=1}^p (-1)^m \frac{p^2 (p-1)^2 \dots [p^2 - (m-1)^2]}{(2m)!} S^{2m} P^{p-m}]. \quad (4')$$

(ii) If  $n = 2p + 1$ , i. e.  $n$  is odd

$$\alpha^{2p+1} + \beta^{2p+1} = (-1)^p (2p + 1) \times \left[ S P^p + \sum_{m=1}^p (-1)^m \frac{(p+m)p(p^2-1^2)(p^2-2^2)\dots[p^2-(m-1)^2]}{(2m+1)!} S^{2m+1} P^{p-m} \right]. \quad (5')$$

Since we are interested in the coefficients of this expansion we can, without loss of generality assume that  $P = 1$ , i. e.,  $\beta = 1/\alpha$ . Taking  $\alpha = x$ ,  $\beta = x^{-1}$ , we obtain the initial definition of the  $N$ -numbers. All results obtained in the subsequent calculations can be checked on formulae (4') and (5').

The proofs given in [1] are based on the expansion of

$$A = (2 - Sy)(1 - Sy + Py^2)^{-1},$$

in powers of  $y$ . By writing  $S = 2x$ ,  $P = 1$ , we obtain

$$A = 2(1 - xy)(1 - 2xy + y^2)^{-1},$$

which according to [2], page 223, is the generating function of the Chebyshev polynomials, i. e.

$$T(x, y) = \frac{A}{2} = (1 - xy)(1 - 2xy + y^2)^{-1} = \sum_{m=0}^{\infty} T_m(x) y^m.$$

It follows that the Chebyshev polynomials can be expressed in function of the  $N$ -numbers by the following relations

$$T_{2p}(x) = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^p N_{2m}^{2p} (2x)^{2m}, \quad T_{2p+1}(x) = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^p N_{2m+1}^{2p+1} (2x)^{2m+1}.$$

## 2. Convolution Relations

We separate again two cases:

(i) If  $n$  is even,  $n = 2p$ , we obtain from (4) and (2)

$$x^{2p} + x^{-2p} = \sum_{m=0}^p N_{2m}^{2p} (x + x^{-1})^{2m} = \sum_{m=0}^p N_{2m}^{2p} \left[ \sum_{s=0}^{m-1} \binom{2m}{s} (x^{2m-2s} + x^{2s-2m}) + \binom{2m}{m} \right].$$

Let  $m - s = q$ , hence,  $s = m - q \leq p - q$ , so that,

$$x^{2p} + x^{-2p} = \sum_{q=1}^p (x^{2q} + x^{-2q}) \sum_{s=0}^{p-q} \binom{2q+2s}{s} N_{2q+2s}^{2p} + \sum_{s=0}^p \binom{2s}{s} N_{2s}^{2p}. \quad (6)$$

From (6) it follows immediately that

$$\sum_{s=0}^{p-q} \binom{2q+2s}{s} N_{2q+2s}^{2p} = \delta_p^q, \quad q = 1, 2, \dots, p, \quad (7)$$

which is a convolution relation between the  $N$ -numbers and the binomial coefficients, for  $n$  even.

(ii) If  $n$  is odd,  $n = 2p + 1$ , we obtain from (5) and (3)

$$\begin{aligned} x^{2p+1} + x^{-2p-1} &= \sum_{m=0}^p N_{2m+1}^{2p+1} (x + x^{-1})^{2m+1} \\ &= \sum_{m=0}^p N_{2m+1}^{2p+1} \left[ \sum_{s=0}^m \binom{2m+1}{s} (x^{2m-2s+1} + x^{2s-2m-1}) \right]. \end{aligned}$$

Let  $m - s = q$ , hence,  $s = m - q \leq p - q$ , so that,

$$x^{2p+1} + x^{-2p-1} = \sum_{q=0}^p (x^{2q+1} + x^{-2q-1}) \sum_{s=0}^{p-q} \binom{2q+2s+1}{s} N_{2q+2s+1}^{2p+1}. \quad (8)$$

From (8) it follows immediately that

$$\sum_{s=0}^{p-q} \binom{2q+2s+1}{s} N_{2q+2s+1}^{2p+1} = \delta_p^q, \quad (9)$$

which is a convolutional relation between the  $N$ -numbers and the binomial coefficients, for  $n$  odd.

### 3. Recurrence Relations

Separating the even and odd cases we have

(i) for  $n$  even,  $n = 2p$ , from (4)

$$(x + x^{-1})^2 (x^{2p} + x^{-2p}) = \sum_{m=0}^p N_{2m}^{2p} (x + x^{-1})^{2m+2},$$

or,

$$(x^{2p+2} + x^{-2p-2}) + (x^{2p-2} + x^{-2p+2}) + 2(x^{2p} + x^{-2p}) = \sum_{m=0}^p N_{2m}^{2p} (x + x^{-1})^{2m+2}.$$

Using (4) we obtain

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{p+1} N_{2m}^{2p+2} (x + x^{-1})^{2m} + \sum_{m=0}^{p-1} N_{2m}^{2p-2} (x + x^{-1})^{2m} + 2 \sum_{m=0}^p N_{2m}^{2p} (x + x^{-1})^{2m} &= \\ &= \sum_{m=0}^p N_{2m}^{2p} (x + x^{-1})^{2m+2}, \end{aligned}$$

so that equating the coefficients of  $(x + x^{-1})^{2m}$  we obtain

$$N_{2m}^{2p+2} + N_{2m}^{2p-2} + 2N_{2m}^{2p} = N_{2m-2}^{2p},$$

or, changing  $p$  into  $p - 1$ , we obtain

$$N_{2m}^{2p} = N_{2m-2}^{2p-2} - N_{2m}^{2p-4} - 2N_{2m}^{2p-2}. \quad (10)$$

(ii) For  $n$  odd, i. e.  $n = 2p + 1$ , we have from (5),

$$(x + x^{-1})^2 (x^{2p+1} + x^{-2p-1}) = \sum_{m=0}^p N_{2m+1}^{2p+1} (x + x^{-1})^{2m+3}.$$

Operating as in (i) we obtain

$$N_{2m+1}^{2p+1} = N_{2m-1}^{2p-1} - N_{2m+1}^{2p-3} - 2 N_{2m+1}^{2p-1}. \tag{11}$$

It will however be seen in the next section that this relation holds only for  $1 < p$ . Both (10) and (11) can be written

$$N_q^n = N_{q-2}^{n-2} - N_q^{n-4} - 2 N_q^{n-2}, \tag{12}$$

where, for  $n = 2p$ ,  $q = 2m$ , and, for  $n = 2p + 1$ ,  $q = 2m + 1$ ,  $p > 1$ .

#### 4. Numerical Results

(i) For  $n$  even,  $n = 2p$ , we take  $N_0^0 = 1$ , by definition. We then obtain from (10), observing that  $N_{-2}^{2p-2} = 0$ ,

$$N_0^{2p} = -N_0^{2p-4} - 2 N_0^{2p-2},$$

thus,  $N_0^2 = -2$ ,  $N_0^4 = +2$ , ..., thus assuming that  $N_0^{2p-4} = (-1)^p 2$ , and,  $N_0^{2p-2} = (-1)^{p+1} 2$ , we obtain,  $N_0^{2p} = -(-1)^p 2 - 2 (-1)^{p+1} 2 = (-1)^p 2$ , thus

$$N_0^{2p} = (-1)^p 2. \tag{13}$$

Again, starting from (10) we have

$$N_2^{2p} = N_0^{2p-2} - N_2^{2p-4} - 2 N_2^{2p-2},$$

thus, since for negative indices the  $N$ -numbers are zero, we have

$$\begin{aligned} N_2^2 &= N_0^0 - N_2^{-2} - 2 N_2^0 = N_0^0 = 1 \\ N_2^4 &= N_0^2 - N_2^0 - 2 N_2^2 = -2 - 2 \cdot 1 = -4 \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Since,  $N_0^{2p-2} = (-1)^{p+1} 2$ , according to (13), assuming

$$N_2^{2p-4} = (-1)^{p+1} (p-2)^2, \quad N_2^{2p-2} = (-1)^p (p-1)^2,$$

we obtain,

$$N_2^{2p} = (-1)^{p+1} 2 - (-1)^{p+1} (p-2)^2 - 2 (-1)^p (p-1)^2$$

so that

$$N_2^{2p} = (-1)^{p+1} p^2. \tag{14}$$

Again using (10) we have, using the conditions of (4),

$$N_{2p}^{2p} = N_{2p-2}^{2p-2} - N_{2p}^{2p-4} - 2 N_{2p}^{2p-2} = N_{2p-2}^{2p-2} = N_0^0 = 1,$$

thus

$$N_{2p}^{2p} = 1, \tag{15}$$

and,

$$N_{2p-2}^{2p} = N_{2p-4}^{2p-2} - N_{2p-2}^{2p-4} - 2 N_{2p-2}^{2p-2} = N_{2p-4}^{2p-2} - 2 \cdot 1,$$

thus assuming,  $N_{2p-4}^{2p-2} = -(2p - 2)$ , we obtain

$$N_{2p-2}^{2p} = -2p. \tag{16}$$

With the preceding information and (10) we can construct a table of  $N_{2m}^{2p}$ :

		$m =$	0	1	2	3	4
		$2m =$	0	2	4	6	8
$p = 0$	$2p = 0$		1				
1	2		-2	1			
2	4		2	-4	1		
3	6		-2	9	-6	1	
4	8		2	-16	20	-8	1.

(ii)  $n$  is odd,  $n = 2p + 1$ . By definition we clearly have  $N_1^1 = 1$ . Since  $x^3 + x^{-3} = -3(x + x^{-1}) + (x + x^{-1})^3$ , thus  $N_1^3 = -3$ ,  $N_3^3 = 1$ . But according to (11), and the conditions of (5)

$$N_1^3 = N_{-1}^1 - N_1^{-1} - 2 N_1^1 = -2 N_1^1 = -2,$$

which is clearly wrong. This is why we add the condition  $p > 1$ . Continuing the same way we have

$$N_1^5 = -N_1^1 - 2 N_1^3 = -1 - 2(-3) = 5,$$

more generally assuming that

$$N_1^{2p-3} = (-1)^p (2p - 3), \text{ and, } N_1^{2p-1} = (-1)^{p+1} (2p - 1), \text{ we obtain,}$$

$$N_1^{2p+1} = -(-1)^p (2p - 3) - 2(-1)^{p+1} (2p - 1) = (-1)^p (2p + 1),$$

so that

$$N_1^{2p+1} = (-1)^p (2p + 1), \quad p > 1. \tag{17}$$

Similarly,

$$N_{2p+1}^{2p+1} = N_{2p-1}^{2p-1} - N_{2p+1}^{2p-3} - 2 N_{2p}^{2p-1} = N_{2p-1}^{2p-1} = N_1^1 = 1,$$

thus

$$N_{2p+1}^{2p+1} = 1. \tag{18}$$

Similarly,

$$N_{2p-1}^{2p+1} = N_{2p-3}^{2p-1} - N_{2p-1}^{2p-3} - 2 N_{2p-1}^{2p-1} = N_{2p-3}^{2p-1} - 2 N_{2p-1}^{2p-1},$$

thus, since  $N_{2p-1}^{2p-1} = 1$ , according to (18), we have  $N_1^3 = -3$ ,  $N_3^5 = -5, \dots$ , so that,  $N_{2p-1}^{2p+1} = -(2p + 1)$ .

With these informations and (11) we can construct the following table of values of  $N_{2m+1}^{2p+1}$ .

		$m =$	0	1	2	3	4
		$2m+1 =$	1	3	5	7	9
$p = 0$	$2p+1 = 1$		1				
	1	3	-3	1			
	2	5	5	-5	1		
	3	7	-7	14	-7	1	
	4	9	9	-30	27	-9	1

SELMO TAUBER, Portland State College, Portland, Oregon

#### REFERENCES

- [1] B. CHRYSTAL, *Algebra* (Chelsea Publ. Co., N.Y., 1952).  
 [2] J. RIORDAN, *An Introduction to Combinatorial Analysis* (J. Wiley Inc., N.Y., 1958).

## Kleine Mitteilungen

### Über die Kompatibilität gewisser Ebenenabbildungen und linearer Punktabbildungen

Wir betrachten eine eineindeutige Abbildung zwischen den Elementen zweier Ebenenbündel der  $n$ -dimensionalen affinen Räume  $E_n$  und  $E'_n$ . Es entsteht die Frage, ob zwischen  $E_n$  und  $E'_n$  eine solche eineindeutige Punktabbildung existiert, welche die gegebene Ebenenabbildung induziert, das heisst, die mit der obigen Ebenenabbildung kompatibel ist. – Das Ziel dieser Note ist, bezüglich dieser Frage den folgenden Satz zu beweisen:

**Satz:** Eine eineindeutige Ebenenabbildung zwischen den Elementen zweier Ebenenbündel ist dann und nur dann mit einer eineindeutigen Punktabbildung kompatibel, wenn diese Ebenenabbildung ein Ebenenbündel in beiden Richtungen wieder in Ebenenbündel überführt. Die Ebenenabbildung bestimmt die Punktabbildung bis auf eine Dehnung.

Die Notwendigkeit der Bedingungen ist offenbar.

Wir zeigen, dass die Bedingung auch hinreichend ist. Für die Träger der Ebenenbündel wollen wir der Einfachheit halber den Ursprung  $O$  bzw.  $O'$  von  $E_n$  bzw.  $E'_n$  wählen. Die Zuordnung der Träger der einander entsprechenden Ebenenbündel induziert zwischen den Strahlenbündeln mit den Trägern  $O$  bzw.  $O'$  eine eineindeutige Strahlenabbildung. Diese Strahlenabbildung ordnet drei koplanaren Strahlen drei Strahlen mit derselben Eigenschaft zu. Sind nämlich  $s, t$  und  $u$  drei verschiedene koplanare Strahlen, so gehört ihre Ebene  $\sigma$  zu jedem der Ebenenbündel mit den Trägern  $s, t$  und  $u$ . Daher gehört aber die  $\sigma$  nach der Ebenenabbildung zugeordnete Bildebene  $\sigma'$  zu jedem der drei Ebenbündel mit den Trägern  $s', t'$  und  $u'$ , wo  $s', t', u'$  die Bilder nach der Strahlenabbildung von  $s, t$  und  $u$  sind.

Es sei nun  $A_{n-1}$  ein  $(n-1)$ -dimensionaler Unterraum von  $E_n$ , der nicht durch  $O$  geht. Mit Hilfe der Strahlenabbildung kann man dem  $(n-1)$ -dimensionalen Unterraum, der zu  $A_{n-1}$  parallel ist und durch  $O$  geht, in  $E'_n$  eindeutig einen durch  $O'$  gehenden  $(n-1)$ -dimen-