Es seien jetzt $u_1, u_2, \dots u_n$ diejenigen n linear unabhängigen Vektoren, welche den Anfangspunkt im Koordinatenursprung O und als Endpunkte die Punkte $\tau_1 O, \tau_2 O, \dots \tau_n O$ haben; die τ_i sind dabei die oben genannten Translationen, die T erzeugen. F bedeute das von den Vektoren $u_1, u_2, \dots u_n$ aufgespannte Parallelotop. Man erkennt ohne weiteres, dass die Parallelotope τF $(\tau \in T)$ eine zu T gehörige Zerlegung des R^n ergeben und im Innern von F keine zwei voneinander verschiedene T-äquivalente Punkte liegen. Man betrachte nun diejenigen τF $(\tau \in T)$, für welche $L \cap \tau F$ innere Punkte enthält. Es gibt, da L ersichtlich beschränkt ist, nur endlich viele solche τF. L wird somit in die endlich vielen Teile $L_\tau = L \cap \tau F$ $(I(L_\tau) \neq 0)$ zerlegt. Wendet man auf jedes L_τ die Translation τ^{-1} an, so sind alle $\tau^{-1} L_\tau$ in F enthalten. Je zwei $\tau^{-1} L_\tau$ können sich nicht überlappen, weil sonst L zwei T-äquivalente Punkte im Innern enthielte. Andrerseits liegt jeder innere Punkt von F in mindestens einem $\tau^{-1} L_\tau$, weil es in L einen dazu T-äquivalenten Punkt gibt und F keine zwei T-äquivalenten Punkte im Innern enthält. L und das Parallelotop F sind demnach zerlegungsgleich. Aus der allgemeinen Theorie zerlegungsgleicher Polyeder (siehe HADWIGER [3], insbesondere S. 20–49) ergibt sich nun sofort, dass F und damit L mit der Vereinigungsmenge von m kongruenten Würfeln zerlegungsgleich ist und dass dies wegen (2) die Zerlegungsgleichheit von K_1 mit einem dieser Würfel zur Folge hat.

HELMUT GROEMER[1]), Corvallis, Ore., USA

LITERATUR

[1] BIEBERBACH, L.: *Über die Bewegungsgruppen der Euklidischen Räume I.*, Math. Ann. *70*, 297–336 (1911).

[2] HADWIGER, H.: *Ungelöste Probleme, Nr. 45.* El. Math. *18*, 29–31 (1963).

[3] HADWIGER, H.: *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. 93 (Springer-Verlag, Berlin 1957).

[4] REINHARDT, K.: *Zur Zerlegung der Euklidischen Räume in kongruente Polytope*, Sitzber. Akad., Berlin *1928*, 150–155.

Sur une propriété des nombres naturels

Le but de cet article est de démontrer d'une façon élémentaire le théorème suivant:

Théorème: Tout nombre naturel est d'une infinité de manières une différence de deux nombres naturels dépourvus de diviseurs premiers carrés.

Démonstration: n étant un nombre naturel donné, désignons par $Q(n)$ le nombre de tous les nombres naturels $\leq n$ dépourvus de diviseurs premiers carrés. Soit q_n le plus grand nombre impair dont le carré est $\leq n$. Si l'on supprime dans la suite $1, 2, \dots, n$ tous les nombres divisibles par un quelconque des nombres 2^2 et $(2k+1)^2$, où k est un nombre naturel tel que $2k+1 \leq q_n$, il restera dans notre suite évidemment seulement les nombres dépourvus de diviseurs premiers carrés. Or, les nombres naturels $\leq n$ divisibles par un nombre naturel donné d sont de la forme dk, où k est un nombre naturel et $dk \leq n$, donc $k \leq n/d$; le nombre de tels nombres est donc $\leq n/d$. Le nombre des nombres de la suite $1, 2, \dots, n$ qui sont divisibles par un

[1]) Der Verfasser dankt der National Science Foundation für finanzielle Unterstützung (Research Grant GP-261).

quelconque des nombres 2^2 et $(2k+1)^2$, où $2k+1 \leq q_n$, ne dépasse pas donc le nombre

$$\frac{n}{2^2}+\frac{n}{3^2}+\frac{n}{5^2}+\frac{n}{7^2}+\frac{n}{9^2}+\cdots+\frac{n}{q_n^2}$$

et il en résulte que

$$Q(n) \geq n-\left(\frac{n}{2^2}+\frac{n}{3^2}+\frac{n}{5^2}+\cdots+\frac{n}{q_n^2}\right),$$

donc

$$Q(n) \geq n\left(1-\frac{1}{4}-\frac{1}{3^2}-\frac{1}{5^2}-\cdots-\frac{1}{q_n^2}\right). \tag{1}$$

Or, on a

$$\frac{1}{9^2}+\frac{1}{11^2}+\frac{1}{13^2}+\cdots+\frac{1}{q_n^2}<\frac{1}{7\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 11}+\frac{1}{11\cdot 13}+\cdots+\frac{1}{(q_n-2)\,q_n}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\frac{1}{11}-\frac{1}{13}+\cdots+\frac{1}{q_n-2}-\frac{1}{q_n}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{q_n}\right)<\frac{1}{14}.$$

On a donc, d'après (1),

$$Q(n)>n\left(1-\frac{1}{4}-\frac{1}{9}-\frac{1}{25}-\frac{1}{49}-\frac{1}{14}\right),$$

donc $Q(n)>\alpha\, n$, où

$$\alpha=1-\frac{1}{4}-\frac{1}{9}-\frac{1}{25}-\frac{1}{49}-\frac{1}{14}=\frac{22361}{44100}>\frac{1}{2}.$$

Supposons maintenant qu'un nombre naturel m n'est pas d'une infinité de manières une différence de deux nombres naturels dépourvus de diviseurs premiers carrés. Il existe alors un nombre naturel a tel que si un nombre naturel $k>a$ est dépourvu de diviseurs premiers carrés, le nombre $k+m$ a un diviseur premier carré. Soit n un nombre naturel tel que

$$n>\frac{m+a}{2\,\alpha-1} \tag{2}$$

(où, d'après $\alpha>{}^1/_2$, on a $2\,\alpha-1>0$).

Il résulte de la définition du nombre a que si k est un nombre naturel dépourvu de diviseurs premiers carrés et tel que $a<k\leq n$ (le nombre de tels nombres k est évidemment $\geq Q(n)-a$), le nombre $k+m\leq n+m$ a un diviseur premier carré. Le nombre des nombres naturels $\leq n+m$ qui ont des diviseurs premiers carrés est donc $\geq Q(n)-a$. Le nombre de nombres naturels $\leq n+m$ dépourvus de diviseurs premiers carrés étant $Q(n+m)$, il en résulte que

$$Q(n+m)+Q(n)-a\leq n+m \tag{3}$$

et, comme $Q(n+m)>\alpha(n+m)>\alpha\, n$ et $Q(n)>\alpha\, n$, on trouve, d'après (3):

$$\alpha\, n+\alpha\, n-a<n+m, \qquad \text{d'où} \qquad n<\frac{m+a}{2\,\alpha-1},$$

contrairement à (2).

Notre théorème se trouve ainsi démontré.

D'après une remarque que je dois à M. P. TURÁN, la même démonstration peut être appliquée pour prouver la proposition plus générale suivante:

Si E est un ensemble de nombres naturels de densité supérieure > $^1/_2$, tout nombre naturel est d'une infinité de manières une différence de deux nombres de l'ensemble E.

Or, d'après une remarque de M. A. SCHINZEL notre théorème peut être déduit sans peine de la proposition suivante, démontrée par M. T. NAGELL dans son travail *Zur Arithmetik der Polynome*, Abhandlungen aus dem Math. Seminar Univ. Hamburg *1* (1922), p. 188:

Si les nombres (a_i, b_i) $(i = 1, 2, 3)$ *ne sont pas divisibles par aucun carré d'un nombre premier, il existe une infinité de nombres naturels x pour lesquels les nombres* $a_1 x + b_1$, $a_2 x + b_2$, $a_3 x + b_3$ *sont dépourvus de diviseurs premiers carrés.*

Pour en déduire notre théorème, il suffit de prendre $a_1 = a_2 = 1$, $b_1 = 0$.

W. SIERPIŃSKI, Varsovie

Über die gruppenalgebraische Struktur der Elementargeometrie

(Fortsetzung)

4. Aufbau der Geometrie auf dem Spiegelungsbegriff

Wir wollen uns jetzt noch einer *Entwicklungslinie in der geometrischen Grundlagenforschung* zuwenden, die aus den soeben dargelegten Gedankengängen herausgewachsen ist. Es hat sich gezeigt, dass von der gruppenalgebraischen Seite her ein axiomatischer Aufbau der Kongruenzgeometrie möglich ist. Im Vordergrund steht dabei eine *Gruppe mit einem invarianten Erzeugendensystem aus involutorischen Elementen*. Als Axiome werden einige Gesetze über involutorische Gruppenelemente postuliert. Wir sind damit bei der reinen gruppentheoretischen Geometrie angelangt, die mit Arbeiten von HJELMSLEV und REIDEMEISTER aus den Jahren um 1930 ihren Anfang nahm und die seither von der Kieler Geometerschule BACHMANNS wesentlich gefördert worden ist.

Wir wollen hier kurz auf das Bachmannsche Axiomensystem eingehen. Es geht von einer abstrakten Gruppe $\mathfrak{G}$ aus, in der ein invariantes Erzeugendensystem $\mathfrak{S}$ aus involutorischen Elementen gegeben ist. Wir bezeichnen die Elemente von $\mathfrak{S}$ als *Gruppen-Geraden*, involutorische Elemente aus $\mathfrak{G}$, die als Produkt von zwei Gruppen-Geraden darstellbar sind, sollen *Gruppen-Punkte* heissen[4]). Der Leser halte sich die Gruppe $\mathfrak{K}$ mit den Geraden- und Punktspiegelungen als Beispiel vor Augen. Für die Gruppen-Geraden und die Gruppen-Punkte behalten wir die Symbole Σ_g bzw. Σ_G aus der Gruppe $\mathfrak{K}$ bei.

In $\mathfrak{G}$ werden nun eine Inzidenz- und eine Orthogonalitätsrelation eingeführt:

Die Gruppen-Gerade Σ_g und der Gruppen-Punkt Σ_A heissen inzident, wenn

$$(\Sigma_g \circ \Sigma_A)^2 = I .$$

Die beiden Gruppen-Geraden Σ_f und Σ_g heissen orthogonal, wenn $(\Sigma_f \circ \Sigma_g)^2 = I$.

Diese Festlegungen erinnern uns an die beiden Äquivalenzen (1) und (2) in der Figur 7.

---

[4]) Bei BACHMANN werden die Gruppenelemente als Geraden und Punkte bezeichnet. Wir wollen diese Begriffe hier ausschliesslich für geometrische Objekte reservieren.