Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 19 (1964)
Heft: 2

Artikel: Über Würfel- und Raumzerlegungen
Autor: Groemer, Helmut
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-23295

ELEMENTE DER MATHEMATIK
Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrer

Publiziert mit Unterstützung des Schweizerischen Nationalfonds
zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung

El. Math. Band XIX Nr. 2 Seiten 25–48 Basel, 10. März 1964

Über Würfel- und Raumzerlegungen

Mit R^n werde der n-dimensionale Euklidische Raum bezeichnet. K bedeute ein beschränktes Polyeder im R^n. Lässt sich K in endlich viele Teilpolyeder zerlegen, die mittels geeigneter Translationen und Rotationen zu einem Würfel W zusammengesetzt werden können, so sagt man, dass das Polyeder K mit dem Würfel W zerlegungsgleich sei. Hat andrerseits ein beschränktes Polyeder K, welches innere Punkte besitzt, die Eigenschaft, dass man den R^n mit zu K kongruenten Exemplaren lückenlos und ohne Überlappung ausfüllen kann, so heisse K ein Zerlegungspolyeder des R^n. Für geeignete zu K kongruente K_i hat man also in diesem Falle

$$R^n = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i\,, \qquad I(K_k) \cap I(K_l) = 0 \qquad (k \neq l)\,, \tag{1}$$

wobei 0 die leere Menge und $I(K_k)$ das Innere von K_k bezeichnet. Die Menge K_i aller in (1) vorkommenden K_i heisst eine Zerlegung des R^n.

H. HADWIGER [2][1]) stellte unlängst die Frage, ob alle Zerlegungspolyeder des R^n mit einem n-dimensionalen Würfel zerlegungsgleich seien. Es soll hier gezeigt werden, dass es – unter Verwendung von bekannten ziemlich tief liegenden Sätzen über Bewegungsgruppen des R^n und über die Zerlegungsgleichheit von Polyedern – nicht schwierig ist, diese Frage für eine sehr umfangreiche Klasse von Zerlegungspolyedern bejahend zu beantworten. Es handelt sich dabei um diejenigen Zerlegungspolyeder, welche Raumzerlegungen ergeben, die eine gewisse gruppentheoretisch definierte Regularitätseigenschaft haben. Diese Eigenschaft ist jedoch so allgemein, dass es schwierig sein dürfte, ein Beispiel für ein Zerlegungspolyeder zu finden, das nur solche Raumzerlegungen ermöglicht, die diese Regularitätsbedingung nicht erfüllen.

In dem nachstehenden Satz, welcher das angekündigte Resultat enthält, wird von der folgenden Definition Gebrauch gemacht: Eine Menge $\{G_i\}$ von einander nicht überlappenden Polyedern des R^n heisse eine *reguläre Lagerung*, wenn $\{G_i\}$ eine transitive Gruppe von Deckbewegungen besitzt. Es soll also eine Bewegungsgruppe Γ des R^n geben, so dass für alle $G_j \in \{G_i\}$ und alle $\gamma \in \Gamma$ das durch Anwendung von γ auf G_j entstehende γG_j wieder in $\{G_i\}$ liegt und zu jedem Paar G_j, G_k von Polyedern aus $\{G_i\}$ ein $\gamma \in \Gamma$ mit $G_j = \gamma G_k$ existiert. Hängen $\{G_i\}$ und Γ auf die eben beschriebene Weise zusammen, so werde gesagt, dass $\{G_i\}$ zur Gruppe Γ gehöre.

---

[1]) Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 27.

Satz. *Es sei* K *ein beschränktes Polyeder mit inneren Punkten und* $\{K_i\}$ *eine Zerlegung des* R^n *in zu* K *kongruente Polyeder* K_i. *Ist* $\{K_i\}$ *eine reguläre Lagerung oder zumindest die Vereinigung von endlich vielen (zur selben Gruppe gehörigen) regulären Lagerungen, so ist* K *mit einem Würfel zerlegungsgleich.*

Bemerkung 1. K. REINHARDT [4] fand als Lösung eines bekannten Problems von HILBERT ein Zerlegungspolyeder, das keiner regulären Raumzerlegung fähig ist. Es ermöglicht jedoch eine Raumzerlegung, die die Vereinigung von zwei regulären Lagerungen ist, so dass der angeführte Satz auch in diesem Falle angewendet werden kann.

Bemerkung 2. Bei den am eingehendsten untersuchten Raumzerlegungen sind die K_i untereinander translationsgleiche konvexe Polyeder, die so angeordnet sind, dass je zwei, deren Durchschnitt $(n-1)$-dimensional ist, eine volle Seitenfläche gemeinsam haben. Die K_i heissen in diesem Falle Paralleloeder. Man erkennt sofort, dass Raumzerlegungen dieser Art reguläre Lagerungen sind. Alle Paralleloeder sind demnach mit einem Würfel zerlegungsgleich.

Beweis des Satzes. Da die K_i innere Punkte haben, ist klar, dass Γ eine diskrete Gruppe sein muss. Zwei Punkte P, Q des R^n (oder zwei Polyeder K_j, K_k aus $\{K_i\}$) sollen Γ-äquivalent heissen, wenn es ein $\gamma \in \Gamma$ mit $P = \gamma\, Q$ (bzw. $K_j = \gamma\, K_k$) gibt. $\boldsymbol{M}_1, \boldsymbol{M}_2, \ldots \boldsymbol{M}_d$ seien die im Satz genannten regulären Lagerungen, deren Vereinigung $\{K_i\}$ ist. Bei passender Numerierung kann man annehmen, dass für $l = 1, 2, \ldots d$ $K_l \in \boldsymbol{M}_l$ gilt. Dieses vorausgesetzt, sei $M = K_1 \cup K_2 \cup \cdots \cup K_d$ gesetzt. M enthält dann zu jedem $P \in R^n$ einen zu P Γ-äquivalenten Punkt. Dies ergibt sich daraus, weil wegen (1) für ein gewisses $K_j \in \{K_i\}$ und $k \leqq d$ $P \in K_j \in \boldsymbol{M}_k$ ist, so dass es wegen der Regularität von $\boldsymbol{M}_k$ ein $\gamma \in \Gamma$ gibt, für das $P \in \gamma\, K_k \subset \gamma\, M$, also $\gamma^{-1} P \in M$ gilt. L. BIEBERBACH [1] (siehe insbesondere den Beweis von Satz XV, Seite 333–334) bewies, dass eine diskrete Bewegungsgruppe, die nicht n linear unabhängige Translationen enthält, die Eigenschaft hat, dass jede Teilmenge des R^n, die zu jedem Punkt einen dazu äquivalenten enthält, unbeschränkt ist. Da M beschränkt ist, gibt es daher eine Untergruppe T von Γ, die von n linear unabhängigen Translationen erzeugt wird. Da es sich bei der T-Äquivalenz offenkundig um eine Äquivalenzrelation handelt, kann man $\{K_i\}$ so in paarweise elementfremde Klassen $\boldsymbol{L}_1, \boldsymbol{L}_2, \ldots \boldsymbol{L}_m$ einteilen, dass zwei K_i genau dann in derselben Klasse liegen, wenn sie T-äquivalent sind. Dass dabei die Anzahl der Klassen endlich ist, folgt unmittelbar daraus, dass es für ein hinreichend grosses (aber beschränktes) Gebiet in jeder Klasse $\boldsymbol{L}_s$ ein K_i gibt, das gänzlich in diesem Gebiet liegt. Ohne die Allgemeinheit einzuschränken, kann vorausgesetzt werden, dass $K_s \in \boldsymbol{L}_s$ gilt. Setzt man

$$L = K_1 \cup K_2 \cup \ldots \cup K_m, \tag{2}$$

so erkennt man genauso wie vorhin für M, dass L zu jedem Punkt des R^n einen dazu T-äquivalenten Punkt enthält. Andererseits kann es im Innern von L nicht zwei T-äquivalente Punkte geben. Denn wäre $P \in I(L)$, $\tau\, P \in I(L)$ mit einem $\tau \in T$ ($\tau \neq e$ = Einheitselement von T), so hätte man für gewisse s und t ($s \leqq m, t \leqq m$) $P \in I(K_s)$, $\tau\, P \in I(K_t)$, also auch $P \in I(\tau^{-1} K_t)$. Wegen (1) wäre dann $K_s = \tau^{-1} K_t$. Daraus folgte zunächst, dass K_s und K_t in derselben Klasse $\boldsymbol{L}_s$ lägen. $s \leqq m$, $t \leqq m$ ergäben dann $K_s = K_t$ und somit, weil τ eine Translation ist, $\tau = e$.

Es seien jetzt $u_1, u_2, \ldots u_n$ diejenigen n linear unabhängigen Vektoren, welche den Anfangspunkt im Koordinatenursprung O und als Endpunkte die Punkte $\tau_1 O, \tau_2 O, \ldots \tau_n O$ haben; die τ_i sind dabei die oben genannten Translationen, die T erzeugen. F bedeute das von den Vektoren $u_1, u_2, \ldots u_n$ aufgespannte Parallelotop. Man erkennt ohne weiteres, dass die Parallelotope τF $(\tau \in T)$ eine zu T gehörige Zerlegung des R^n ergeben und im Innern von F keine zwei voneinander verschiedene T-äquivalente Punkte liegen. Man betrachte nun diejenigen τF $(\tau \in T)$, für welche $L \cap \tau F$ innere Punkte enthält. Es gibt, da L ersichtlich beschränkt ist, nur endlich viele solche τF. L wird somit in die endlich vielen Teile $L_\tau = L \cap \tau F$ $(I(L_\tau) \neq 0)$ zerlegt. Wendet man auf jedes L_τ die Translation τ^{-1} an, so sind alle $\tau^{-1} L_\tau$ in F enthalten. Je zwei $\tau^{-1} L_\tau$ können sich nicht überlappen, weil sonst L zwei T-äquivalente Punkte im Innern enthielte. Andrerseits liegt jeder innere Punkt von F in mindestens einem $\tau^{-1} L_\tau$, weil es in L einen dazu T-äquivalenten Punkt gibt und F keine zwei T-äquivalenten Punkte im Innern enthält. L und das Parallelotop F sind demnach zerlegungsgleich. Aus der allgemeinen Theorie zerlegungsgleicher Polyeder (siehe HADWIGER [3], insbesondere S. 20–49) ergibt sich nun sofort, dass F und damit L mit der Vereinigungsmenge von m kongruenten Würfeln zerlegungsgleich ist und dass dies wegen (2) die Zerlegungsgleichheit von K_1 mit einem dieser Würfel zur Folge hat.

HELMUT GROEMER[1]), Corvallis, Ore., USA

LITERATUR

[1] BIEBERBACH, L.: *Über die Bewegungsgruppen der Euklidischen Räume I.*, Math. Ann. *70*, 297–336 (1911).
[2] HADWIGER, H.: *Ungelöste Probleme, Nr. 45.* El. Math. *18*, 29–31 (1963).
[3] HADWIGER, H.: *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. 93 (Springer-Verlag, Berlin 1957).
[4] REINHARDT, K.: *Zur Zerlegung der Euklidischen Räume in kongruente Polytope*, Sitzber. Akad., Berlin *1928*, 150–155.

Sur une propriété des nombres naturels

Le but de cet article est de démontrer d'une façon élémentaire le théorème suivant:

Théorème: Tout nombre naturel est d'une infinité de manières une différence de deux nombres naturels dépourvus de diviseurs premiers carrés.

Démonstration: n étant un nombre naturel donné, désignons par $Q(n)$ le nombre de tous les nombres naturels $\leq n$ dépourvus de diviseurs premiers carrés. Soit q_n le plus grand nombre impair dont le carré est $\leq n$. Si l'on supprime dans la suite $1, 2, \ldots, n$ tous les nombres divisibles par un quelconque des nombres 2^2 et $(2k+1)^2$, où k est un nombre naturel tel que $2k+1 \leq q_n$, il restera dans notre suite évidemment seulement les nombres dépourvus de diviseurs premiers carrés. Or, les nombres naturels $\leq n$ divisibles par un nombre naturel donné d sont de la forme dk, où k est un nombre naturel et $dk \leq n$, donc $k \leq n/d$; le nombre de tels nombres est donc $\leq n/d$. Le nombre des nombres de la suite $1, 2, \ldots, n$ qui sont divisibles par un

[1]) Der Verfasser dankt der National Science Foundation für finanzielle Unterstützung (Research Grant GP-261).