

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 19 (1964)
Heft: 1

Rubrik: Kleine Mitteilungen

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 22.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

drei Spiegelungen Σ_f , Σ_a und Σ_h . Unter Berücksichtigung von (2) und (4) findet man nun

$$\begin{aligned}\Sigma_g \circ \Sigma_B \circ \Sigma_g &= \Sigma_h \circ \Sigma_a \circ \underbrace{\Sigma_f \circ \Sigma_B \circ \Sigma_f \circ \Sigma_a \circ \Sigma_h}_{\Sigma_A} = \Sigma_h \circ \Sigma_a \circ \underbrace{\Sigma_A \circ \Sigma_a \circ \Sigma_h}_{\Sigma_C} \\ &= \Sigma_h \circ \Sigma_A \circ \Sigma_h = \Sigma_C\end{aligned}$$

oder $\Sigma_C \circ \Sigma_g \circ \Sigma_B \circ \Sigma_g = I$. Dies besagt nun aber gerade, dass g die Mittelsenkrechte von BC ist.

Wir beschliessen diese Betrachtungen zur Elementargeometrie mit der Bemerkung, dass der Komplex \mathfrak{S} der Geradenspiegelungen ein *invariantes Erzeugendensystem* der Gruppe \mathfrak{A} darstellt³⁾. (Fortsetzung im nächsten Heft) M. JEGER, Luzern/Zürich

Kleine Mitteilungen

Wissenswertes um das Dreieck

a) Zielsetzung

Wir beabsichtigen, in dieser Note einige Abschätzungen der Seiten- und Eckenabstandssummen der vier wesentlichsten *merkwürdigen Punkte* des *spitzwinkligen* Dreiecks mitzuteilen. Viele der folgenden Resultate werden hier erstmals ausgesprochen. Der interessierte Leser kann aus den Beweisführungen und mit Hilfe des Literaturverzeichnisses selbst abklären, welche der mitgeteilten Größenbeziehungen im *beliebigen* Dreieck gelten.

Im Dreieck $A_1A_2A_3$ mit dem Umkreisradius R und dem Inkreisradius ϱ liege die Seite a_i der Ecke A_i gegenüber, während der Gegenwinkel von a_i mit α_i bezeichnet sei. Mit O , I , S , H werden in dieser Reihenfolge Umkreis-, Inkreismittelpunkt, Schwerpunkt und Höhenschnittpunkt bezeichnet. Ferner sei $Q_i = \overline{IA_i}$, $T_i = \overline{SA_i}$, $L_i = \overline{HA_i}$, wogegen p_i , t_i , l_i jeweils den Abstand von O , S , H zu a_i angebe. In b) legen wir dar, dass

$$\sum l_i \leq 3\varrho \leq \sum t_i \leq \sum p_i \quad (1)$$

und

$$\sum Q_i \leq \sum L_i \leq 3R \quad (2)$$

mit Gleichheit stets nur im gleichseitigen Dreieck gilt. In (2) fehlt $\sum T_i$, weil eine Einordnung nicht möglich ist.

Schliesslich kommen in c) mit dem Vorhergehenden verknüpfte Resultate und Folgerungen zur Sprache.

b) Beweisführungen

In $\sum l_i = 2R \sum_{i < j} \cos \alpha_i \cos \alpha_j$ hat $\sum_{i < j}$ den Wert

$$\frac{\varrho^2 + R(r + 2\varrho)}{2R^2}$$

mit r als Inkreisradius des Höhenfusspunkt Dreiecks, was schon in der ersten Hälfte des letzten Jahrhunderts bekannt war [1]¹⁾. Also gilt

$$\sum l_i = \frac{\varrho^2}{R} + \frac{Rr}{R} + 2\varrho.$$

³⁾ Ist \mathfrak{G} eine Gruppe, so heisst der Komplex $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{G}$ ein Erzeugendensystem von \mathfrak{G} , wenn jedes Element von \mathfrak{G} als endliches Produkt von Elementen aus \mathfrak{S} und deren Inversen darstellbar ist. \mathfrak{S} heisst ein invariantes Erzeugendensystem, wenn für jedes $\Phi \in \mathfrak{G}$ die Beziehung $\Phi^{-1} \circ \mathfrak{S} \circ \Phi = \mathfrak{S}$ besteht.

¹⁾ Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 10.

Wegen $\varrho \leq R/2$ resultiert wirklich $\sum l_i \leq 3\varrho$, wenn wir nur beweisen können, dass $Rr \leq \varrho^2$:

Im Dreieck OIH trifft die von I ausgehende Schwerelinie die Gegenseite \overline{OH} im Mittelpunkt F des Feuerbachkreises des Dreiecks $A_1A_2A_3$, was zu

$$\overline{IF^2} = \frac{1}{2} (\overline{IH^2} + \overline{IO^2}) - \frac{1}{4} \overline{OH^2} = \frac{1}{2} (\overline{IH^2} + \overline{IO^2}) - \overline{FH^2}$$

führt.

Damit ist

$$\overline{IH^2} = 2(\overline{IF^2} + \overline{FH^2}) - \overline{IO^2}.$$

Weil sich aber Inkreis und Feuerbachkreis berühren und dieser den Radius $R/2$ aufweist, ist $\overline{IF} = R/2 - \varrho$. Ferner folgt aus der wohlbekannten Abstandsformel von Um- und Inkreismittelpunkt, angewandt auf Dreieck $A_1A_2A_3$, sowie dessen Höhenfusspunkt Dreieck (die Höhen eines spitzwinkligen Dreiecks sind Innenwinkelhalbierende des Höhenfusspunkt Dreiecks)

$$\overline{IO^2} = R^2 - 2R\varrho \quad \text{und} \quad \overline{FH^2} = \frac{R^2}{4} - Rr.$$

Einsetzen ergibt damit

$$\overline{IH^2} = 2(\varrho^2 - Rr).$$

Daraus aber entnimmt man unmittelbar $Rr \leq \varrho^2$.

$\sum l_i \leq 3\varrho$ haben wir damit verifiziert. In $\varrho \leq R/2$ und $Rr \leq \varrho^2$ gilt das Gleichheitszeichen nur im gleichseitigen Dreieck.

Die weiteren Beweise erledigen sich einfacher: Ist h_i die von A_i ausgehende Dreieckshöhe, so gilt offenbar $t_i = h_i/3$ und $\sum t_i = \frac{1}{3} \sum h_i$. Der letzte Ausdruck ist aber in der Tat mindestens so gross wie 3ϱ ([2], verschärft in [3] und verallgemeinert in [4]). Zum vollständigen Beweis von (1) ist damit nur noch die Gültigkeit von $\sum t_i = \frac{1}{3} \sum h_i \leq \sum p_i$ darzutun. Bekanntlich ist $\sum p_i = R + \varrho$. Nun ist aber das arithmetische Mittel der Winkelhalbierenden höchstens so gross wie $R + \varrho$ [5], was für dasjenige der Höhen natürlich erst recht gilt.

$\sum Q_i \leq \sum L_i$ ist bekannt [6], $\sum L_i = 2(R + \varrho)$ im spitzwinkligen Dreieck ebenso. $\sum L_i \leq 3R$ folgt damit sofort aus $2\varrho \leq R$, womit auch (2) bewiesen ist.

Während $\sum Q_i \leq \sum L_i$ sogar im *beliebigen* Dreieck gilt, lässt sich der Summe der oberen Schwerelinienabschnitte in (2) nicht einmal im *spitzwinkligen* Dreieck ein fester Platz zuordnen! Konvergiert die Basis eines gleichschenkligen Dreiecks bei konstanter Schenkelänge gegen Null, so vermutet man wegen $\sum Q_i \rightarrow 2R$, $\sum L_i \rightarrow 2R$ und $\sum T_i \rightarrow 8R/3$ vorerst $\sum Q_i \leq \sum L_i \leq \sum T_i$. Doch liefert das rechtwinklige, gleichschenklige Dreieck

$$\begin{aligned} \sum Q_i &= \varrho (2\sqrt{4+2\sqrt{2}} + \sqrt{2}) \approx \varrho \cdot 6,640 \\ \sum T_i &= \frac{2\varrho}{3} (\sqrt{10} + \sqrt{2} + 2\sqrt{5} + 1) \approx \varrho \cdot 6,699 \\ \sum L_i &= 2\varrho (2 + \sqrt{2}) \approx \varrho \cdot 6,828. \end{aligned}$$

Durch genügend kleine Deformation dieses Dreiecks findet man als Folge der stetigen Veränderung der Abstandssummen ohne weiteres ein Spitzwinkliges, für welches $\sum Q_i < \sum T_i < \sum L_i$ gilt, was die erste Vermutung widerlegt.

c) Schlusswort

Beziehung (1) enthält als Spezialfall [7] $\sum l_i \leq \sum p_i$. Ferner gewinnen wir aus

$$\sum p_i = R + \varrho, \quad \sum L_i = 2(R + \varrho)$$

und den Beziehungen (1) und (2) sofort

$$2 \sum l_i \leq 6\varrho \leq 2 \sum t_i \leq 2 \sum p_i = \sum L_i \leq 3R, \quad (3)$$

eine beachtenswerte Kette, an welcher Gleichheit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Gliedern an einer einzigen Stelle permanent, sonst aber nur im gleichseitigen Dreieck gilt.

Weil I stets im Innern des Dreiecks liegt, gilt nach ERDÖS-MORDELL $6 \varrho \leq \sum Q_i$, was für das spitzwinklige Dreieck die weitere Kette

$$2 \sum l_i \leq 6 \varrho \leq \sum Q_i \leq 2 \sum p_i = \sum L_i \leq 3 R \quad (4)$$

liefert. Über Gleichheit ist dasselbe wie bei (3) zu sagen. Hier erhalten wir als Spezialfall zum Beispiel [8] $2 \sum l_i \leq \sum Q_i$. Ein weiteres Herausschälen von Spezialfällen dürfte indessen nur bei besonderem Bedarf sinnvoll sein.

L. BERNSTEIN, Tel Aviv und J. STEINIG, Zürich

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] K. W. FEUERBACH, *Eigenschaften einiger merkwürdiger Punkte des geradlinigen Dreiecks* (Nürnberg 1822).
- [2] F. LEUENBERGER, *Einige Dreiecksungleichungen*, El. Math. 13, 121–126 (1958).
- [3] J. BERKES, *Bemerkungen zur Arbeit von F. Leuenberger über «Einige Dreiecksungleichungen»*, El. Math. 14, 62–64 (1959).
- [4] F. LEUENBERGER, *Extremaleigenschaften der Summe der wichtigsten Ecktransversalen des n -dimensionalen Simplex*, El. Math. 15, 81–82 (1960).
- [5] F. LEUENBERGER, *Kleiner Beitrag zur elementaren Dreiecksgeometrie*, El. Math. 18, 35–37 (1963).
- [6] Aufgabe Nr. E 1397 von L. BANKOFF, Amer. Math. Monthly 67, 82 (1960).
- [7] Aufgabe Nr. 444 von F. LEUENBERGER, El. Math. 18, 18 (1963).
- [8] Aufgabe Nr. E 1564 von L. BANKOFF, Amer. Math. Monthly 70, 210 (1963).

Bemerkung zur Formel von Herrn Unger

In seiner Lösung der Aufgabe 447¹⁾ hat Herr UNGER die Formel

$$\tan^2 \alpha = -DV (R_1, R_2; R_1^*, R_2^*)$$

angegeben, durch die der maximale Drehwinkel α zwischen den Hauptrichtungen zweier sich in einem Punkt berührender Flächen F, F^* aus ihren Hauptkrümmungsradien R_1, R_2 bzw. R_1^*, R_2^* bestimmt wird. Diese Beziehung kann sehr einfach *auf konstruktivem Wege* als Anwendung von [2]²⁾ hergeleitet werden; vor allem wird dabei erkennbar, wie das auftretende Doppelverhältnis zustande kommt:

Der Krümmungsradius \bar{R} des Normalumrisses einer Fläche F im Bildpunkt \bar{P} eines Umrisspunktes P von F ergibt sich aus den orientierten Hauptkrümmungsradien R_1, R_2 von F in P und dem orientierten Winkel φ zwischen der Projektionsrichtung l und der zu R_1 gehörigen Hauptkrümmungsrichtung von F in P nach der Formel von A. MANNHEIM [1]:

$$\bar{R} = R_1 \sin^2 \varphi + R_2 \cos^2 \varphi. \quad (1)$$

Trägt man in ein kartesisches Koordinatensystem (x, y) die Punkte $X_1(R_1, 0), X_2(R_2, 0)$ und den Thaleskreis k über $X_1 X_2$ ein (Abb. 1), so erhält man \bar{R} konstruktiv nach [2] als

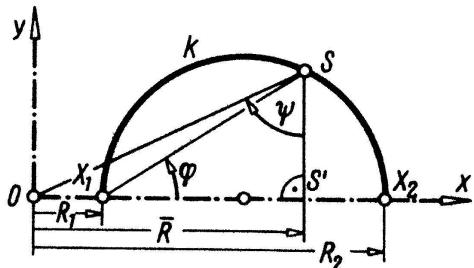


Abb. 1

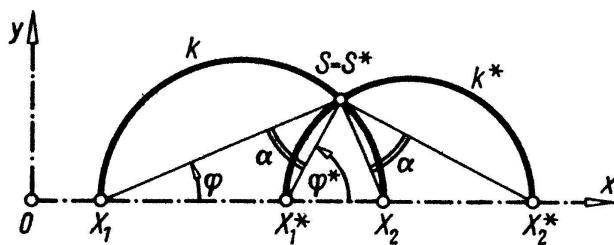


Abb. 2

¹⁾ Dieses Heft Seite 16.

²⁾ Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 12.

Abszisse des Schnittpunktes S von k mit jener Geraden, welche die x -Achse in X_1 unter dem Winkel φ schneidet ($S \neq X_1$ für $\varphi \neq \pi/2$)³⁾. Ist ψ der orientierte Winkel zwischen l und der zu l bezüglich F konjugierten Richtung, so gilt bekanntlich

$$\tan \varphi \tan(\varphi + \psi) = -R_2 : R_1. \quad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt

$$\tan \psi = \frac{\bar{R}}{(R_2 - R_1) \sin \varphi \cos \varphi}; \quad (3)$$

da der Nenner in (3) nach Abbildung 1 die Ordinate von S bedeutet, ist in Abbildung 1 $\psi = \angle O S S'$.

Bei der vorgelegten Aufgabe sei P der Berührpunkt der beiden gegebenen Flächenstücke F und F^* . Die zu F^* gehörigen Größen seien mit $*$ bezeichnet. Jedes der beiden Flächenstücke F , F^* liege ganz auf jener Seite seines oskulierenden Scheitelparaboloids Φ bzw. Φ^* in P , die der anderen Fläche abgewandt ist. Die Drehung kann dann genau soweit erfolgen, wie es Φ und Φ^* zulassen; in der kritischen Lage berühren sich Φ und Φ^* längs einer Parabel, deren Achse die Flächennormale in P ist. Da die zur Tangentialebene in P parallelen Schnitte von Φ bzw. Φ^* zu der Dupinschen Indikatrix i bzw. i^* von F bzw. F^* in P zentrisch ähnlich sind, berühren sich in dieser Lage auch i und i^* . Die Richtung ihrer Berührtangenten sei die Projektionsrichtung l . Dann stimmen einerseits die Krümmungsradien \bar{R} , \bar{R}^* der Normalumrisse von F , F^* in P überein:

$$\bar{R} = \bar{R}^*; \quad (4)$$

andererseits gilt, da die zu l bezüglich i und i^* konjugierten Richtungen zusammenfallen:

$$\psi = \psi^*. \quad (5)$$

Somit liegen die Punkte S und S^* vereint im Schnitt der beiden Thaleskreise k und k^* (Abb. 2), und da $\varphi^* = \angle S^* X_1^* x$ und $\alpha = \varphi^* - \varphi$ ist, kann der gesuchte Winkel α in Abbildung 2 unmittelbar abgelesen werden:

$$\alpha = \angle X_1^* S X_1 = \angle X_2^* S X_2. \quad (6)$$

Die beiden rechtwinkligen Geradenpaare $X_1 S X_2$ und $X_1^* S X_2^*$ sind gegeneinander um α gedreht und bilden daher das Doppelverhältnis $-\tan^2 \alpha$. Da dieses mit dem Doppelverhältnis der Schnittpunkte $X_1, X_2; X_1^*, X_2^*$ übereinstimmt, folgt die genannte Beziehung

$$\tan^2 \alpha = -DV(R_1, R_2; R_1^*, R_2^*). \quad (7)$$

Hieraus ergeben sich noch einige Folgerungen:

a) Reelle Drehwinkel $\alpha \neq 0, \neq \pi/2$ treten genau dann auf, wenn die Punktpaare X_1, X_2 und X_1^*, X_2^* einander trennen; im andern Fall sind F, F^* entweder frei drehbar oder sie durchdringen sich gegenseitig in jeder Drehlage.

b) Die Potenz von O bezüglich k ist $R_1 \cdot R_2$, also gleich dem Kehrwert der Gaußschen Krümmung K von F in P . Besitzen F, F^* in P dieselbe positive Gaußsche Krümmung $K = K^*$, so gehören k, k^* dem zum Kreis $(O, r = \sqrt{1/K})$ orthogonalen hyperbolischen Kreisbüschel mit der Achse x an; k und k^* besitzen daher keinen reellen Schnittpunkt S . Ist dagegen $K = K^* < 0$, so ist S reell und liegt auf der y -Achse im Abstand $\sqrt{1/(-K)}$ von O . Nach Abbildung 1 folgt daraus aber $\bar{R} = \bar{R}^* = 0$, und das bedeutet (vergleiche zum Beispiel [2, Seite 285]), dass l Schmiegerichtung von F, F^*, Φ und Φ^* in P ist. Φ und Φ^* berühren sich dann längs einer Scheitelerzeugenden, und i und i^* haben eine Asymptote gemeinsam.

c) Da das DV eine *projektive Invariante* ist, wird α durch eine projektive Transformation der x -Achse nicht geändert, und dies gilt insbesondere für die *Involution* $x' = x^{-1}$. Man kann daher statt der rechten Seite von (7) auch das Doppelverhältnis der entsprechenden Hauptkrümmungen setzen. Ebenso bleibt α gegen alle Translationen $x' = x + R_0$ invariant,

³⁾ Zum Nachweis dieser Konstruktion schreibe man (1) in der Form $\bar{R} = (R_2 - R_1) \cos^2 \varphi + R_1$. Im Fall eines parabolischen Flächenpunktes ($R_2 = \infty$) tritt anstelle von k das aus $x = R_1$ und der Ferngerade bestehende Geradenpaar.

und daraus folgt, dass man den Ursprung O in Abbildung 2 nachträglich an beliebiger Stelle der x -Achse annehmen kann. Dies bedeutet den Übergang zu den Parallelflächen von F, F^* im Abstand R_0 . Durch geeignete Wahl von R_0 kann also stets erreicht werden, dass beide Parallelflächen in P elliptisch gekrümmmt sind.

d) Die Dupinschen Indikatren einer Schar von Parallelflächen in den Punkten einer gemeinsamen Flächennormale n werden in Richtung n normal projiziert als eine Schar konfokaler Kegelschnitte. Durch F und F^* sind zwei solche Scharen mit gemeinsamem Mittelpunkt P' und Scharparameter R_0 gegeben; ihre Achsen schneiden sich unter dem Winkel α . Aus unseren Überlegungen folgt nun: *Berühren die beiden durch $R_0 = 0$ bestimmten Scharkurven einander, so berührt jede Kurve der einen Schar die zum selben Parameter R_0 gehörige Kurve der anderen Schar, und dabei sind die Tangenten in den Berührpunkten alle parallel.*

H. SCHAAL, Stuttgart

LITERATUR

- [1] MANNHEIM, A.: Cours de géométrie descriptive. Paris 1880.
- [2] SCHAAL, H.: Zur Konstruktion der Krümmungskreise des scheinbaren Umrisses einer Fläche bei Zentral- oder Parallelprojektion. Sitzb. Bayer. Akad. Wiss., math.-nat. Kl. 1960, S. 277–310.
- [3] VOGLER, H.: Ein einfacher Beweis eines Satzes von H. Schaal über den Krümmungsmittelpunkt des scheinbaren Umrisses einer Fläche. Elem. Math. 17, 79–81 (1962).

Aufgaben

Aufgabe 444. Als «unterer Höhenabschnitt» im Dreieck sei der Abstand des Höhenschnittpunktes von der Dreiecksseite bezeichnet. Man zeige: Die Summe der unteren Höhenabschnitte ist höchstens so gross wie die Summe der Abstände des Umkreiszentrums von den Dreiecksseiten. Gleichheit tritt nur im gleichseitigen Dreieck auf.

F. LEUENBERGER, Feldmeilen

Solution: Let AD, BE, CF denote the altitudes and H the orthocenter of the triangle ABC ; let O denote the circumcenter and A', B', C' the midpoints of the sides of ABC . Then it is well known that

$$AH = 2 A'O, \quad BH = 2 B'O, \quad CH = 2 C'O.$$

Thus the stated inequality

$$HD + HE + HF \leq A'O + B'O + C'O, \quad (1)$$

with equality only when ABC is equilateral, is equivalent to

$$AH + BH + CH \geq 2(HD + HE + HF). \quad (2)$$

When the triangle ABC is acute, H is an interior point and therefore (2) is a special case of the ERDÖS theorem.

For the general case we make use of the relations

$$\begin{aligned} HD &= 2R \cos \beta \cos \gamma, \quad HE = 2R \cos \gamma \cos \alpha, \quad HF = 2R \cos \alpha \cos \beta, \\ A'O &= R \cos \alpha, \quad B'O = R \cos \beta, \quad C'O = R \cos \gamma, \end{aligned}$$

where R is the circumradius of ABC . Thus (1) is equivalent to

$$2 \sum \cos \beta \cos \gamma \leq \sum \cos \alpha. \quad (3)$$

It is only necessary to discuss the case $\alpha + \beta < 90^\circ$. We may replace (3) by

$$2 \cos \alpha \cos \beta + \cos(\alpha + \beta) \leq (\cos \alpha + \cos \beta)(1 + 2 \cos(\alpha + \beta)). \quad (4)$$

Now let $\alpha + \beta = 2\lambda$, where λ is fixed. Then

$$2 \cos \alpha \cos \beta + \cos(\alpha + \beta) \leq 2 \cos^2 \lambda + \cos 2\lambda = 1 + 2 \cos 2\lambda.$$