Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 19 (1964)
Heft: 1

Artikel: Über die gruppenalgebraische Struktur der Elementargeometrie
Autor: Jeger, M.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-23294

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrer

Publiziert mit Unterstützung des Schweizerischen Nationalfonds
zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung

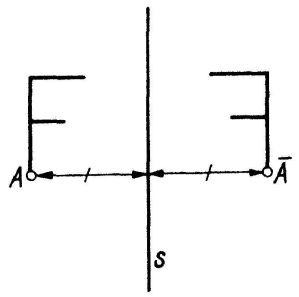
El. Math. Band XIX Nr. 1 Seiten 1–24 Basel, 10. Januar 1964

Über die gruppenalgebraische Struktur der Elementargeometrie[1])

Mit den folgenden Gedanken sollen – ausgehend von der gruppenalgebraischen Struktur der Elementargeometrie – einige neue Arbeitsprinzipien in der elementaren und in der wissenschaftlichen Geometrie dargestellt werden. Wir folgen dabei einer Linie, die aus der Schulmathematik heraus an eine Frontstelle der aktuellen geometrischen Forschung führt.

1. Die Kongruenzabbildungen in der ebenen Geometrie

Wir rufen zunächst einige elementargeometrische Tatsachen in Erinnerung. In der Zeichenebene sei eine Gerade s vorgegeben. Ordnet man einem Punkt A der Ebene den symmetrischen Punkt $\bar{A}$ bezüglich s zu, so gelangt man zu einer eineindeutigen Abbildung der Ebene auf sich selbst. Wir nennen diese Abbildung die *Spiegelung an der Geraden s*. Original und Bild einer Figur sind deckungsgleich oder kongruent. Um dies einzusehen, genügt der Hinweis, dass sich unsere Abbildung durch eine Umwendung an der Geraden s realisieren lässt. Diese Operation üben wir aus, wenn wir in einem Buch eine Seite umblättern. Die Spiegelung an s wollen wir fortan mit Σ_s bezeichnen.

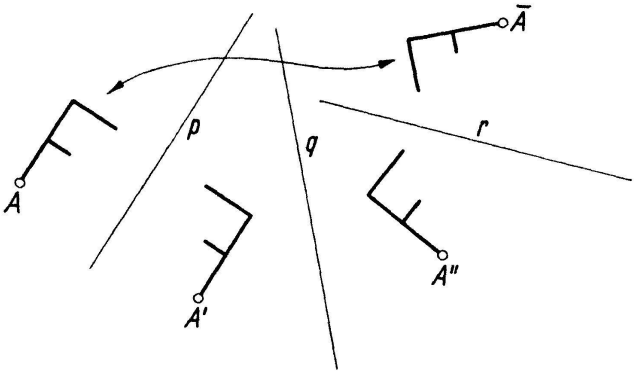


Figur 1

[1]) Für den Druck bearbeitete Fassung der Antrittsvorlesung vom 2. 2. 1963 an der Eidg. Techn. Hochschule in Zürich.

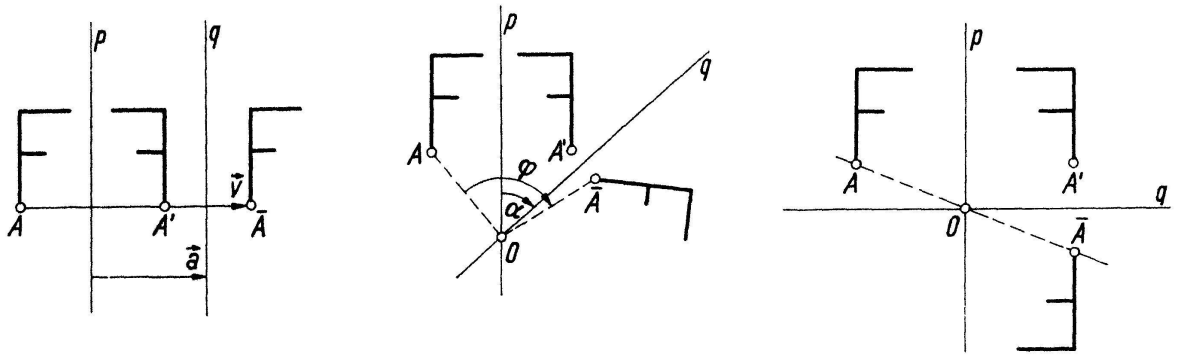
Führt man endlich viele Geradenspiegelungen nacheinander aus, so gewinnt man eine neue Abbildung der Ebene auf sich selbst. Da offenbar auch bei der durch diesen Zusammensetzungsprozess gewonnenen Abbildung Original und Bild einer Figur kongruent sind, nennen wir sie eine *Kongruenzabbildung* oder kürzer eine *Kongruenz*.

Die Figur 2 zeigt die Verknüpfung von drei Geradenspiegelungen. Wir schreiben für die resultierende Abbildung $\Phi = \Sigma_p \circ \Sigma_q \circ \Sigma_r$. In dieser Schreibweise soll zum Ausdruck kommen, dass zuerst an der Geraden p, dann an q und zuletzt an r gespiegelt wird.



Figur 2

Durch Zusammensetzung von zwei Geradenspiegelungen lassen sich zwei Typen von Kongruenzabbildungen erzeugen. Sind die Geraden p und q parallel, so stellt $\Sigma_p \circ \Sigma_q$ eine *Translation* dar; der Schubvektor $\boldsymbol{v}$ ist doppelt so lang und gleichgerichtet wie der Abstandsvektor $\boldsymbol{a}$ der beiden Spiegelachsen. Schneiden sich dagegen p und q in einem Punkt O, dann ist $\Sigma_p \circ \Sigma_q$ eine *Drehung* mit dem Fixpunkt O; der Drehwinkel ist doppelt so gross wie der orientierte Winkel zwischen den beiden Geraden p und q. Aus zwei Spiegelungen an senkrechten Geraden entsteht demnach eine 180°-Drehung um den Schnittpunkt O. Diese spezielle Drehung wird als *Punktspiegelung* bezeichnet; wir verwenden dafür das Symbol Σ_O.

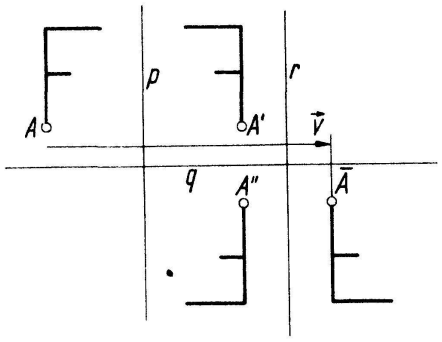


Figur 3

Wir weisen noch darauf hin, dass eine bestimmte Translation oder Drehung auf unendlich viele Arten als Produkt von zwei Geradenspiegelungen geschrieben werden kann.

Als Beispiel einer 3-spiegeligen Kongruenz $\Phi = \Sigma_p \circ \Sigma_p \circ \Sigma_r$ erwähnen wir die Abbildung, die aus zwei Parallelen p, r und einer dazu senkrechten Geraden q hervorgeht (Figur 4). Man kann diese Abbildung auch durch Kombination von Σ_q mit der

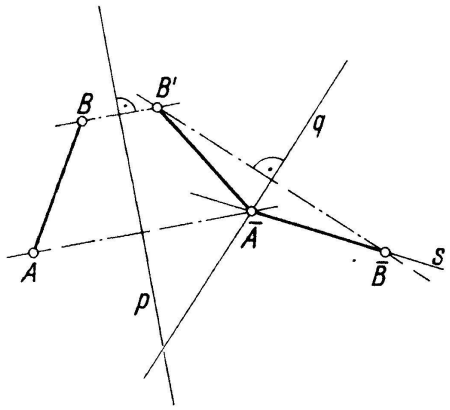
Translation $T = \Sigma_p \circ \Sigma_r$ (Vektor $\boldsymbol{v} \parallel s$) erhalten, wobei diese beiden Teile vertauschbar sind. Die Kongruenz Φ heisst in diesem Falle eine *Schubspiegelung*. Sie ist gekennzeichnet durch die Schubachse q und den Schubvektor $\boldsymbol{v}$.



Figur 4

Unsere Definition der Kongruenzabbildungen lässt zunächst eine grössere Zahl von verschiedenen Abbildungstypen erwarten. Überraschenderweise sind nun aber mit den angeführten Beispielen bereits alle Möglichkeiten erschöpft: *Die Kongruenzabbildungen der Ebene auf sich selbst bestehen aus Translationen, Drehungen, Geradenspiegelungen und Schubspiegelungen.*

Wir zeigen zuerst, dass jede Kongruenz auf ein Produkt aus höchstens drei Geradenspiegelungen reduzierbar ist. Die Kongruenz Φ' bilde etwa die Strecke AB auf die gleichlange (kongruente) Strecke $\bar{A}\bar{B}$ ab. Ist p die Mittelsenkrechte von $A\bar{A}$, so lässt sich durch Σ_p der Punkt A bereits in die Endlage $\bar{A}$ bringen (Figur 5). B' sei das Bild von B bei Σ_p. Wir führen nun noch die Mittelsenkrechte q von B' und $\bar{B}$ ein. Es ist jetzt evident, dass die Abbildung $\Sigma_p \circ \Sigma_q$ die Strecke AB in $\bar{A}\bar{B}$ überführt.



Figur 5

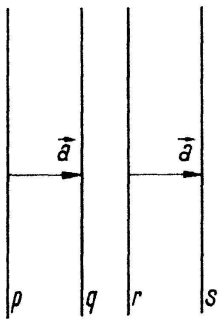
Falls nun die gegebene Kongruenz Φ' das Produkt aus einer geraden Anzahl von Geradenspiegelungen ist, so lässt sie die Orientierung invariant. Es ist aber auch $\Sigma_p \circ \Sigma_q$ eine gleichsinnige Kongruenz, so dass $\Phi' = \Sigma_p \circ \Sigma_q$ ist.

Liegt andererseits in Φ' ein Produkt aus einer ungeraden Anzahl von Geradenspiegelungen vor, so muss die Orientierung noch in Einklang gebracht werden. Dies gelingt mit einer zusätzlichen Spiegelung an der Geraden s durch die Punkte $\bar{A}$ und $\bar{B}$. Für die ungleichsinnige Kongruenz Φ' ist damit die Darstellung $\Phi' = \Sigma_p \circ \Sigma_q \circ \Sigma_s$ gewonnen. Die 2-spiegeligen Kongruenzen sind Translationen und Drehungen. Es bleibt

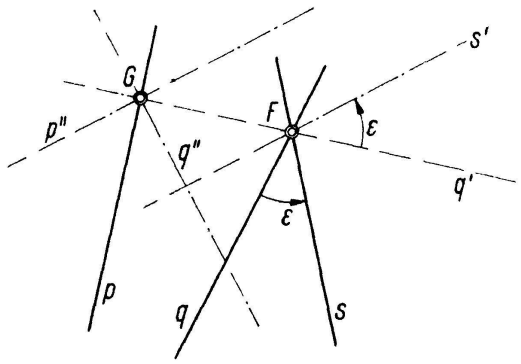
noch zu zeigen, dass jede 3-spiegelige Kongruenz eine Schubspiegelung darstellt. Sind bei $\Phi' = \Sigma_p \circ \Sigma_q \circ \Sigma_s$ die Geraden p, q, s parallel, so können wir für die Translation $T = \Sigma_p \circ \Sigma_q$ das Produkt $\Sigma_r \circ \Sigma_s$ setzen (Figur 6a) und erhalten dann

$$\Phi' = \Sigma_p \circ \Sigma_q \circ \Sigma_s = \Sigma_r \circ \Sigma_s \circ \Sigma_s = \Sigma_r \circ I = \Sigma_r \text{ [2]}.$$

Φ' ist in diesem Falle eine Geradenspiegelung (spezielle Schubspiegelung). Wir setzen jetzt voraus, dass p und s nicht zugleich parallel zu q sind; in der Figur 6b wurde angenommen, dass sich q und s im Punkt F schneiden. $\Sigma_q \circ \Sigma_s$ ist dann eine Drehung, die wir auch durch zwei andere Geradenspiegelungen erzeugen können. Wir wählen



Figur 6a



Figur 6b

als neue Spiegelachsen die Geraden q' und s', wobei q' senkrecht auf p steht. $\Sigma_p \circ \Sigma_{q'}$ ist die Spiegelung am Schnittpunkt G von p und q'. Es sei jetzt p'' die Parallele zu s' durch G und q'' die Senkrechte dazu durch G. Dann gilt

$$\Phi' = \Sigma_p \circ \Sigma_q \circ \Sigma_s = \Sigma_p \circ \Sigma_{q'} \circ \Sigma_{s'} = \Sigma_{p''} \circ \Sigma_{q''} \circ \Sigma_{s'}.$$

p'', q'', s' sind in der Situation der drei Spiegelachsen in der Figur 4. Die 3-spiegelige Kongruenz Φ' ist damit in jedem Falle als Schubspiegelung erkannt.

2. Der Gruppenbegriff in der Geometrie

Wir fassen jetzt die Menge $\mathfrak{K}$ aller endlichen Produkte aus Geradenspiegelungen ins Auge. Mit der durch das Symbol $\circ$ bezeichneten Verknüpfung von Abbildungen bestehen in $\mathfrak{K}$ die folgenden Tatbestände:

I. *Sind $\Phi_1, \Phi_2 \in \mathfrak{K}$, so ist auch $\Phi_3 = \Phi_1 \circ \Phi_2 \in \mathfrak{K}$.*

II. *Die Identität ist Element von $\mathfrak{K}$; es ist etwa $\Sigma_s \circ \Sigma_s = I$.*

III. *Für jedes $\Phi \in \mathfrak{K}$ ist auch $\Phi^{-1} \in \mathfrak{K}$.*
Ist etwa $\Phi = \Sigma_p \circ \Sigma_q \circ \Sigma_r$, so entnimmt man aus Figur 2 für die Inverse die Darstellung $\Phi^{-1} = \Sigma_r \circ \Sigma_q \circ \Sigma_p$.

IV. *Die Verknüpfung ist assoziativ, das heisst*

$$\Phi_1 \circ (\Phi_2 \circ \Phi_3) = (\Phi_1 \circ \Phi_2) \circ \Phi_3.$$

Ein Objektbereich mit einer Verknüpfung wird bei Vorliegen dieser vier Gesetze als Gruppe bezeichnet.

---

[2]) I bezeichnet die identische Abbildung oder Identität.

$\mathfrak{K}$ ist die ebene *Kongruenzgruppe*. Sie beherrscht ein weites Feld der Elementargeometrie. Die Aussage, dass ein Dreieck durch die Vorgabe seiner drei Seiten vollständig bestimmt sei, umschreibt die Tatsache, dass es zu zwei aus den gegebenen Seiten in der gleichen Ebene konstruierten Dreiecken stets eine Abbildung aus $\mathfrak{K}$ gibt, die das eine in das andere überführt. Die beiden Dreiecke sind in bezug auf die Gruppe $\mathfrak{K}$ äquivalente Figuren.

FELIX KLEIN (1849–1925) erkannte als erster die Bedeutung des Gruppenbegriffs für die Geometrie. In seinem berühmt gewordenen Erlanger-Programm aus dem Jahre 1872 führte er die Gruppe als ordnendes Prinzip in die Geometrie ein. *Unter einer Geometrie versteht* KLEIN *das Studium jener Eigenschaften der Figuren, die einer bestimmten Abbildungsgruppe gegenüber invariant sind.* Zur Gruppe $\mathfrak{K}$ gehört die Kongruenzgeometrie, zur Gruppe der Ähnlichkeitsabbildungen die Ähnlichkeitsgeometrie, zur Gruppe der geradentreuen Abbildungen mit Erhaltung der Parallelität die Affingeometrie, und aus der Gruppe der allgemeinsten geradentreuen Abbildungen erwächst die projektive Geometrie. Die eben genannten Abbildungsgruppen stehen in enger Beziehung zueinander; sie bilden eine aufsteigende Kette von Inklusionen:

$$\underset{\text{Kongruenzgruppe}}{\mathfrak{K}} \subset \underset{\substack{\text{Ähnlichkeitsgruppe}\\ \text{oder Hauptgruppe}}}{\mathfrak{H}} \subset \underset{\text{affine Gruppe}}{\mathfrak{A}} \subset \underset{\text{projektive Gruppe}}{\mathfrak{P}} .$$

Die Theorie der Differentialinvarianten über $\mathfrak{K}$ ist die klassische oder euklidische Differentialgeometrie in der Ebene; für die Gruppen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{P}$ führt derselbe Gedanke auf die ebene affine und die ebene projektive Differentialgeometrie.

Zu einem Körper K gehört eine projektive Gruppe der Dimension n, die wir etwa mit $\mathfrak{P}(n, K)$ bezeichnen wollen; für die bereits erwähnte projektive Gruppe ist $n = 2$ und K der Körper der reellen Zahlen. Der Erfolg der Kleinschen Ideen ist vor allem darin zu sehen, dass sich weite Gebiete der Geometrie durch Untergruppen der $\mathfrak{P}(n, K)$ charakterisieren lassen. Der projektiven Geometrie wird dadurch eine zentrale Rolle zugewiesen. Wir erwähnen als Beispiele die beiden ebenen nichteuklidischen Geometrien, die sich aus zwei Untergruppen von $\mathfrak{P}$ heraus entwickeln lassen.

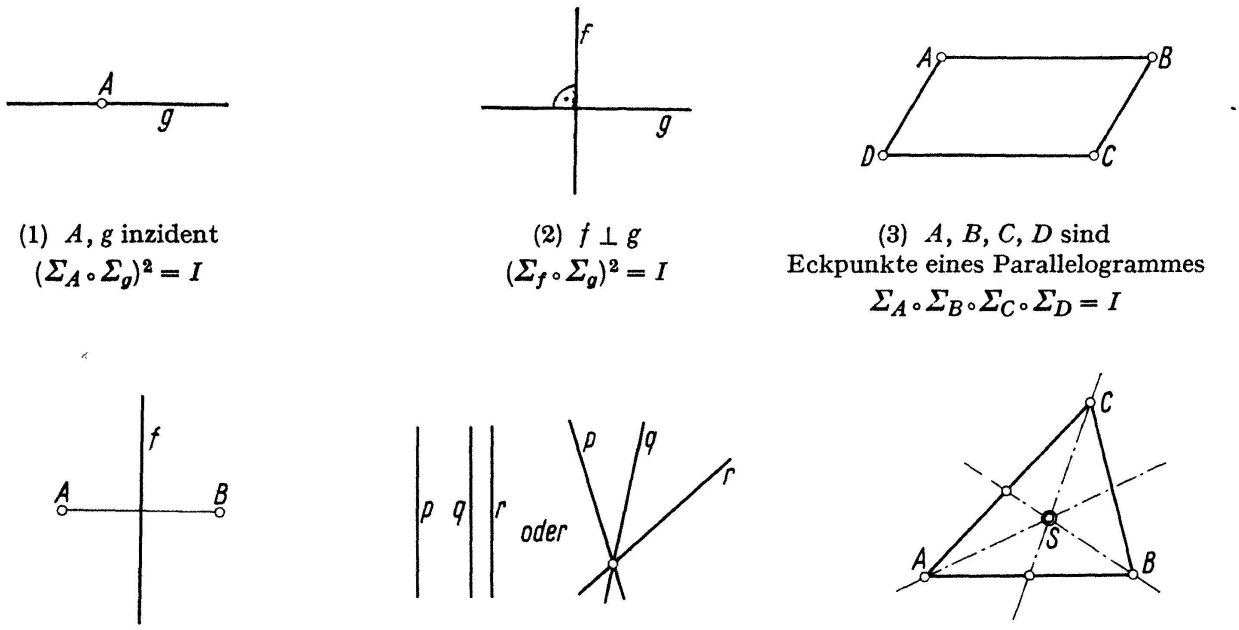
Die Elementargeometrie wird üblicherweise mit der Gruppe $\mathfrak{H}$ abgeschlossen; KLEIN bezeichnete sie entsprechend ihrer Bedeutung für den geometrischen Schulunterricht als *Hauptgruppe*. Wenn wir nun auf die gruppenalgebraische Struktur der Elementargeometrie eingehen wollen, so soll die Grenzlinie in unserer Kette etwas weiter links gezogen werden. Wir beschränken uns auf die Geometrie über der Gruppe $\mathfrak{K}$.

3. Spiegelungszyklen

Die Übertragung des Gruppenbegriffes auf die Geometrie bestand bei KLEIN nicht darin, dass er die tiefgehenden Ergebnisse der Gruppentheorie in ein geometrisches Gewand steckte. Es steht vielmehr die *Gruppe als System mit einer Verknüpfung* im Vordergrund, und von besonderem Interesse sind nur die Unter- und Obergruppen.

Um die Jahrhundertwende tritt nun aber in Arbeiten von H. WIENER und J. HJELMSLEV ein neuer Gedanke hinzu. Diesen beiden Geometern ist die Einsicht zu verdanken, dass die geometrisch bedeutungsvollen Struktureigenschaften der Kongruenzgruppen weniger durch ihre kontinuierlichen Untergruppen, als vielmehr durch das Verhalten ihrer *involutorischen Elemente* zum Ausdruck kommen.

In unserer Gruppe $\mathfrak{K}$ kommen zwei Arten involutorischer Elemente vor; es sind dies die Geradenspiegelungen $\Sigma_p, \Sigma_q, \Sigma_r, \ldots$ und die Punktspiegelungen $\Sigma_A, \Sigma_B, \Sigma_C, \ldots$, denen wir bei der Aufzählung der Abbildungstypen in $\mathfrak{K}$ bereits begegnet sind. Diese einfachen Abbildungen stehen in enger Beziehung zu den geometrischen Grundelementen in der Ebene, nämlich den Geraden und den Punkten. Jeder Geraden und jedem Punkt lässt sich in eineindeutiger Weise ein involutorisches Element aus $\mathfrak{K}$ gegenüberstellen, der Geraden s die Geradenspiegelung Σ_s, dem Punkt G die Punktspiegelung Σ_G. Den geometrischen Lagebeziehungen zwischen Punkten und Geraden entsprechen dabei Gruppenrelationen zwischen den zugeordneten Spiegelungen. Auf dieser Basis kann man nun geometrische Aussagen in der Sprache der Algebra formulieren. Wir geben dazu einige Beispiele.



(1) A, g inzident
$(\Sigma_A \circ \Sigma_g)^2 = I$

(2) $f \perp g$
$(\Sigma_f \circ \Sigma_g)^2 = I$

(3) A, B, C, D sind Eckpunkte eines Parallelogrammes
$\Sigma_A \circ \Sigma_B \circ \Sigma_C \circ \Sigma_D = I$

(4) f Mittelsenkrechte von $\overline{AB}$
$\Sigma_A \circ \Sigma_f \circ \Sigma_B \Sigma \circ \Sigma_f = I$

(5) Die Geraden p, q, r liegen im Büschel
$(\Sigma_p \circ \Sigma_q \circ \Sigma_r)^2 = I$

(6) S ist Schwerpunkt des Dreiecks ABC
$\Sigma_A \circ \Sigma_S \circ \Sigma_B \circ \Sigma_S \circ \Sigma_C \circ \Sigma_S = I$

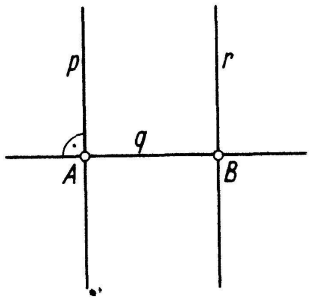
Figur 7

Die Äquivalenz (3) können wir etwa auf folgende Weise einsehen. Das Produkt aus zwei Punktspiegelungen $\Sigma_A \circ \Sigma_B$ ist eine Translation mit dem Vektor $\boldsymbol{v} = 2\,\overrightarrow{AB}$. Man schliesst dies sofort aus einer geeigneten Zerlegung der beiden Punktspiegelungen in je zwei Geradenspiegelungen gemäss Fig. 8; es ist

$$\Sigma_A \circ \Sigma_B = (\Sigma_p \circ \Sigma_q) \circ (\Sigma_q \circ \Sigma_r) = \Sigma_p \circ \Sigma_r .$$

Das Viereck $ABCD$ ist nun aber genau dann ein (eventuell zusammengeklapptes) Parallelogramm, wenn $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ bzw. $\Sigma_A \circ \Sigma_B = \Sigma_D \circ \Sigma_C$ ist. Dies kann man auch in der Gestalt $\Sigma_A \circ \Sigma_B \circ \Sigma_C \circ \Sigma_D = I$ schreiben. Nach einem Vorschlag von G. THOMSEN bezeichnet man Produkte aus Spiegelungen, welche die Identität darstellen, als *Spiegelungszyklen*. In der Figur 7 sind die den geometrischen Konfigurationen entsprechenden Gruppenbeziehungen einheitlich als Spiegelungszyklen geschrieben.

Von THOMSEN stammt die Idee, hieraus für die Geometrie ein Beweis- und *Rechenverfahren auf gruppenalgebraischer Basis* zu entwickeln, das der Descartesschen

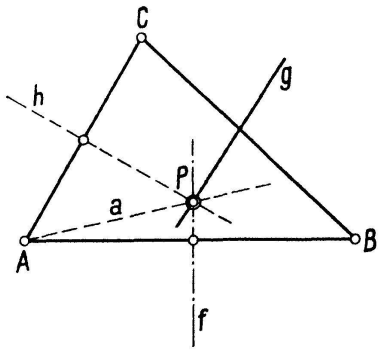


Figur 8

Methode des Koordinatenrechnens ebenbürtig zur Seite steht. Ein auf dem Operieren mit Spiegelungsprodukten aufgebauter Kalkül bietet gegenüber der Descartesschen Methode gewisse Vorteile. Wegen der Willkür des Koordinatensystems verwendet die klassische analytische Geometrie stets ein Zuviel an Rechengrössen, das nachher durch eine Invariantentheorie wieder eliminiert werden muss. Bei der gruppenalgebraischen Darstellung der Lagebeziehungen ist von Anfang an kein überzähliges Element in der Rechnung. Ein weiterer Vorteil liegt darin, dass der Kalkül mit Abbildungen nur eine einzige Rechenverknüpfung erfordert, nämlich jene der Gruppenmultiplikation. Es sei dieser Gedanke von THOMSEN noch mit einem Beispiel belegt; wir wollen den gruppenalgebraischen Beweis eines elementargeometrischen Satzes skizzieren.

Wir wählen den *Satz über die Inzidenz der Mittelsenkrechten in einem Dreieck.* f und h seien die Mittelsenkrechten zu den Seiten AB und AC (Figur 9); P sei der Schnittpunkt von f und h. Führen wir noch die Verbindungsgerade a von P und A ein, so besteht jetzt auf Grund der Äquivalenz (5) die Beziehung

$$(\Sigma_f \circ \Sigma_a \circ \Sigma_h)^2 = I\,.$$



Figur 9

Das Produkt in der Klammer stellt eine ungleichsinnige Kongruenz dar. Eine involutorische ungleichsinnige Kongruenz ist aber notwendigerweise eine Geradenspiegelung, so dass wir

$$\Sigma_f \circ \Sigma_a \circ \Sigma_h = \Sigma_g$$

setzen können. g ist eine noch nicht näher bekannte Gerade durch den Fixpunkt P der

drei Spiegelungen Σ_f, Σ_a und Σ_h. Unter Berücksichtigung von (2) und (4) findet man nun

$$\Sigma_g \circ \Sigma_B \circ \Sigma_g = \Sigma_h \circ \Sigma_a \circ \underbrace{\Sigma_f \circ \Sigma_B \circ \Sigma_f} \circ \Sigma_a \circ \Sigma_h = \Sigma_h \circ \underbrace{\Sigma_a \circ \Sigma_A \circ \Sigma_a} \circ \Sigma_h$$
$$= \Sigma_h \circ \Sigma_A \circ \Sigma_h = \Sigma_C$$

oder $\Sigma_C \circ \Sigma_g \circ \Sigma_B \circ \Sigma_g = I$. Dies besagt nun aber gerade, dass g die Mittelsenkrechte von BC ist.

Wir beschliessen diese Betrachtungen zur Elementargeometrie mit der Bemerkung, dass der Komplex $\mathfrak{S}$ der Geradenspiegelungen ein *invariantes Erzeugendensystem* der Gruppe $\mathfrak{K}$ darstellt[3]). (Fortsetzung im nächsten Heft) M. JEGER, Luzern/Zürich

Kleine Mitteilungen

Wissenswertes um das Dreieck

a) Zielsetzung

Wir beabsichtigen, in dieser Note einige Abschätzungen der Seiten- und Eckenabstandssummen der vier wesentlichsten *merkwürdigen Punkte* des *spitzwinkligen* Dreiecks mitzuteilen. Viele der folgenden Resultate werden hier erstmals ausgesprochen. Der interessierte Leser kann aus den Beweisführungen und mit Hilfe des Literaturverzeichnisses selbst abklären, welche der mitgeteilten Grössenbeziehungen im *beliebigen* Dreieck gelten.

Im Dreieck $A_1A_2A_3$ mit dem Umkreisradius R und dem Inkreisradius ϱ liege die Seite a_i der Ecke A_i gegenüber, während der Gegenwinkel von a_i mit α_i bezeichnet sei. Mit O, I, S, H werden in dieser Reihenfolge Umkreis-, Inkreismittelpunkt, Schwerpunkt und Höhenschnittpunkt bezeichnet. Ferner sei $Q_i = \overline{IA_i}$, $T_i = \overline{SA_i}$, $L_i = \overline{HA_i}$, wogegen p_i, t_i, l_i jeweils den Abstand von O, S, H zu a_i angebe. In b) legen wir dar, dass

$$\Sigma\, l_i \leqq 3\,\varrho \leqq \Sigma\, t_i \leqq \Sigma\, p_i \tag{1}$$

und

$$\Sigma\, Q_i \leqq \Sigma\, L_i \leqq 3\,R \tag{2}$$

mit Gleichheit stets nur im gleichseitigen Dreieck gilt. In (2) fehlt $\Sigma\, T_i$, weil eine Einordnung nicht möglich ist.

Schliesslich kommen in c) mit dem Vorhergehenden verknüpfte Resultate und Folgerungen zur Sprache.

b) Beweisführungen

In $\Sigma\, l_i = 2\,R \sum\limits_{i<j} \cos\alpha_i \cos\alpha_j$ hat $\sum\limits_{i<j}$ den Wert

$$\frac{\varrho^2 + R\,(r + 2\,\varrho)}{2\,R^2}$$

mit r als Inkreisradius des Höhenfusspunktdreieckes, was schon in der ersten Hälfte des letzten Jahrhunderts bekannt war [1][1]). Also gilt

$$\Sigma\, l_i = \frac{\varrho^2}{R} + \frac{R\,r}{R} + 2\,\varrho\,.$$

---

[3]) Ist $\mathfrak{G}$ eine Gruppe, so heisst der Komplex $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{G}$ ein Erzeugendensystem von $\mathfrak{G}$, wenn jedes Element von $\mathfrak{G}$ als endliches Produkt von Elementen aus $\mathfrak{S}$ und deren Inversen darstellbar ist. $\mathfrak{S}$ heisst ein invariantes Erzeugendensystem, wenn für jedes $\Phi \in \mathfrak{G}$ die Beziehung $\Phi^{-1} \circ \mathfrak{S} \circ \Phi = \mathfrak{S}$ besteht.

[1]) Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 10.