

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 18 (1963)
Heft: 6

Artikel: Sur l'équation diophantienne [Formel]
Autor: Sierpiski, W. / Schinzel, A.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-22649>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 29.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Sur l'équation diophantienne

$$(x^2 - 1)(y^2 - 1) = \left[\left(\frac{y-x}{2} \right)^2 - 1 \right]^2$$

Le but de cet article est de trouver toutes les solutions de l'équation

$$(x^2 - 1)(y^2 - 1) = \left[\left(\frac{y-x}{2} \right)^2 - 1 \right]^2 \quad (1)$$

en nombres naturels x et y , où $x < y$.

Vu l'identité

$$(x^2 - 1)(y^2 - 1) - \left[\left(\frac{y-x}{2} \right)^2 - 1 \right]^2 = -\frac{1}{16}(x+y)^2(x^2 - 6xy + y^2 + 8)$$

l'équation (1) équivaut (pour x et y positifs) à l'équation

$$x^2 - 6xy + y^2 + 8 = 0, \quad (2)$$

c'est-à-dire à l'équation

$$(y - 3x)^2 = 8(x^2 - 1). \quad (3)$$

Il résulte de (3) que l'entier $y - 3x$ est divisible par 4, donc $y - 3x = 4z$, où z est un entier et (3) donne

$$x^2 - 2z^2 = 1. \quad (4)$$

D'autre part, soit x un nombre naturel et z un entier satisfaisant à l'équation (4). On aura donc $x > \sqrt{2}|z|$, d'où $3x > 3\sqrt{2}|z| > 4|z|$ et le nombre $y = 3x + 4z$ sera naturel, et l'équation (4) donne l'équation (3), donc aussi l'équation (1).

Or, si $y > x$, on a $3x + 4z > x$, donc $x + 2z > 0$. S'il était $z < 0$, on aurait $-2z < x$, d'où $4z^2 < x^2 = 1 + 2z^2$, d'où $2z^2 < 1$, ce qui est impossible. On a donc $z \geq 0$.

On obtient donc toutes les solutions de l'équation (1) en nombres naturels x et $y > x$ en trouvant toutes les solutions de l'équation (4), où x est un nombre naturel et z un entier ≥ 0 , et en posant $y = 3x + 4z$.

Pour $z = 0$ on trouve $x = 1$, donc $y = 3$. Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

On obtient toutes les solutions de l'équation (1) en nombres naturels x et $y > x$, autres que la solution $x = 1, y = 3$, en trouvant toutes les solutions de l'équation (4) en nombres naturels x et z et en posant $y = 3x + 4z$.

Les solutions de l'équation (4) en nombres naturels x et z sont bien connues. Comme on sait, elles sont toutes contenues dans la suite infinie (x_n, z_n) ($n = 1, 2, \dots$), où

$$x_1 = 3, \quad z_1 = 2 \quad \text{et} \quad x_{n+1} = 3x_n + 4z_n, \quad z_{n+1} = 2x_n + 3z_n$$

D'après notre proposition, si (x_n, z_n) est une solution de l'équation (4), x_n et $y_n = 3x_n + 4z_n = x_{n+1}$ est une solution de l'équation (1).

Les formules $x_{n+1} = 3x_n + 4z_n$, $x_{n+2} = 3x_{n+1} + 4z_{n+1}$ et $z_{n+1} = 2x_n + 3z_n$ donnent tout de suite $x_{n+2} = 6x_{n+1} - x_n$ ($n = 1, 2, \dots$).

Nous obtenons ainsi le théorème suivant:

Toutes les solutions de l'équation (1) en nombres naturels x et y , où $x < y$, sont

$$x = x_n, \quad y = x_{n+1}, \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (5)$$

où x_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) est la suite infinie déterminée par les conditions

$$x_0 = 1, \quad x_1 = 3, \quad x_{n+2} = 6x_{n+1} - x_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (6)$$

Il résulte des formules (6) (par exemple par l'induction) que pour n pairs les nombres x_n sont de la forme $4t + 1$, et pour n impairs de la forme $4t + 3$. Les nombres $x_{n+1} - x_n$, où $n = 0, 1, 2, \dots$, sont donc toujours pairs, non divisibles par 4, et les nombres $(x_{n+1} - x_n)/2$ sont donc tous impairs. En posant

$$x = x_n, \quad y = x_{n+1}, \quad z = \frac{x_{n+1} - x_n}{2}$$

pour $n = 0, 1, 2, \dots$ on obtient donc toujours une solution de l'équation

$$(x^2 - 1)(y^2 - 1) = (z^2 - 1)^2 \quad (7)$$

en nombres impairs x, y, z^* .

L'équation (7) a donc une infinité de solutions en nombres impairs x, y, z , où $0 < x < y$, ce qui est d'ailleurs connu (voir [1] et [2]).

Or, il est à remarquer que K. SZYMICZEK a trouvé une solution de l'équation (7), où le nombre x est pair et les nombres y et z sont impairs, notamment $x = 4$, $y = 31$, $z = 11$. Nous ne savons pas s'il existe une infinité de telles solutions de l'équation (7) ni si elle a une solution en nombres pairs distincts.

Remarquons qu'on peut démontrer de la façon très simple suivante que l'équation (1), ou, ce qui revient au même, l'équation (2), a une infinité de solutions en nombres naturels x et $y > x$. Vu l'identité

$$y^2 - 6y(6y - x) + (6y - x)^2 + 8 = x^2 - 6xy + y^2 + 8,$$

si x et $y > x$ sont des nombres naturels satisfaisant à l'équation (2), les nombres $u = y$ et $v = 6y - x$ satisfont à l'équation $u^2 - 6uv + v^2 + 8 = 0$ et on a $v > u$. Les nombres $u = y > x$ et $v = y + (5y - x) > y$ représentent donc une solution de l'équation (2) en nombres naturels respectivement plus grands que x et y . Vu que l'équation (2) a évidemment la solution $x = 1$, $y = 3$, on en conclut qu'elle a une infinité de solutions en nombres x et $y > x$, c.q.f.d.

A. SCHINZEL et W. SIERPIŃSKI, Varsovie

TRAVAUX CITÉS

- [1] K. SZYMICZEK, *L'équation $uv = w^2$ en nombres triangulaires*, Publikacije Elektrotehn. Fakulteta Univerziteta u Beogradu (à paraître).
- [2] A. SCHINZEL i W. SIERPIŃSKI, O równaniu $x^2 - 2y^2 = k$, Wiadomości Matematyczne (à paraître).

*) Ajouté pendant la correction des épreuves) Cf. la solution du problème 5020 de M. J. A. H. HUNTER (Amer. Math. Monthly 70, 574 (1963)).