Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 18 (1963)

Heft: 6

Artikel: Sur l'équation diophantienne [Formel]

Autor: Sierpiski, W. / Schinzel, A.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-22649

Sur l'équation diophantienne $(x^2-1)(y^2-1) = \left[\left(\frac{y-x}{2}\right)^2 - 1\right]^2$

Le but de cet article est de trouver toutes les solutions de l'équation

$$(x^2-1)(y^2-1) = \left[\left(\frac{y-x}{2}\right)^2 - 1\right]^2 \tag{1}$$

en nombres naturels x et y, où $x < y$.

Vu l'identité

$$(x^2-1)(y^2-1) - \left[\left(\frac{y-x}{2}\right)^2 - 1\right]^2 = -\frac{1}{16}(x+y)^2(x^2-6xy+y^2+8)$$

l'équation (1) équivaut (pour x et y positifs) à l'équation

$$x^2 - 6xy + y^2 + 8 = 0, \tag{2}$$

c'est-à-dire a l'équation

$$(y-3x)^2 = 8(x^2-1). \tag{3}$$

Il résulte de (3) que l'entier $y - 3x$ est divisible par 4, donc $y - 3x = 4z$, où z est un entier et (3) donne

$$x^2 - 2z^2 = 1. \tag{4}$$

D'autre part, soit x un nombre naturel et z un entier satisfaisant à l'équation (4). On aura donc $x > \sqrt{2}\,|z|$, d'où $3x > 3\sqrt{2}\,|z| > 4\,|z|$ et le nombre $y = 3x + 4z$ sera naturel, et l'équation (4) donne l'équation (3), donc aussi l'équation (1).

Or, si $y > x$, on a $3x + 4z > x$, donc $x + 2z > 0$. S'il était $z < 0$, on aurait $-2z < x$, d'où $4z^2 < x^2 = 1 + 2z^2$, d'où $2z^2 < 1$, ce qui est impossible. On a donc $z \geq 0$.

On obtient donc toutes les solutions de l'équation (1) en nombres naturels x et $y > x$ en trouvant toutes les solutions de l'équation (4), où x est un nombre naturel et z un entier ≥ 0, et en posant $y = 3x + 4z$.

Pour $z = 0$ on trouve $x = 1$, donc $y = 3$. Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante:

On obtient toutes les solutions de l'équation (1) *en nombres naturels x et $y > x$, autres que la solution $x = 1$, $y = 3$, en trouvant toutes les solutions de l'équation* (4) *en nombres naturels x et z et en posant $y = 3x + 4z$.*

Les solutions de l'équation (4) en nombres naturels x et z sont bien connues. Comme on sait, elles sont toutes contenues dans la suite infinie (x_n, z_n) $(n = 1, 2, \ldots)$, où

$$x_1 = 3, \quad z_1 = 2 \quad \text{et} \quad x_{n+1} = 3x_n + 4z_n, \quad z_{n+1} = 2x_n + 3z_n$$

D'après notre proposition, si (x_n, z_n) est une solution de l'équation (4), x_n et $y_n = 3x_n + 4z_n = x_{n+1}$ est une solution de l'équation (1).

Les formules $x_{n+1} = 3\,x_n + 4\,z_n$, $x_{n+2} = 3\,x_{n+1} + 4\,z_{n+1}$ et $z_{n+1} = 2\,x_n + 3\,z_n$ donnent tout de suite $x_{n+2} = 6\,x_{n+1} - x_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Nous obtenons ainsi le théorème suivant:

Toutes les solutions de l'équation (1) *en nombres naturels x et y, où $x < y$, sont*

$$x = x_n, \quad y = x_{n+1}, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{5}$$

où x_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ est la suite infinie déterminée par les conditions

$$x_0 = 1, \quad x_1 = 3, \quad x_{n+2} = 6\,x_{n+1} - x_n \ (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{6}$$

Il résulte des formules (6) (par exemple par l'induction) que pour n pairs les nombres x_n sont de la forme $4\,t + 1$, et pour n impairs de la forme $4\,t + 3$. Les nombres $x_{n+1} - x_n$, où $n = 0, 1, 2, \ldots$, sont donc toujours pairs, non divisibles par 4, et les nombres $(x_{n+1} - x_n)/2$ sont donc tous impairs. En posant

$$x = x_n, \quad y = x_{n+1}, \quad z = \frac{x_{n+1} - x_n}{2}$$

pour $n = 0, 1, 2, \ldots$ on obtient donc toujours une solution de l'équation

$$(x^2 - 1)\,(y^2 - 1) = (z^2 - 1)^2 \tag{7}$$

en nombres impairs x, y, z*).

L'équation (7) a donc une infinité de solutions en nombres impairs x, y, z, où $0 < x < y$, ce qui est d'ailleurs connu (voir [1] et [2]).

Or, il est à remarquer que K. SZYMICZEK a trouvé une solution de l'équation (7), où le nombre x est pair et les nombres y et z sont impairs, notamment $x = 4$, $y = 31$, $z = 11$. Nous ne savons pas s'il existe une infinité de telles solutions de l'équation (7) ni si elle a une solution en nombres pairs distincts.

Remarquons qu'on peut démontrer de la façon très simple suivante que l'équation (1), ou, ce qui revient au même, l'équation (2), a une infinité de solutions en nombres naturels x et $y > x$. Vu l'identité

$$y^2 - 6\,y\,(6\,y - x) + (6\,y - x)^2 + 8 = x^2 - 6\,x\,y + y^2 + 8,$$

si x et $y > x$ sont des nombres naturels satisfaisant à l'équation (2), les nombres $u = y$ et $v = 6\,y - x$ satisfont à l'équation $u^2 - 6\,u\,v + v^2 + 8 = 0$ et on a $v > u$. Les nombres $u = y > x$ et $v = y + (5\,y - x) > y$ représentent donc une solution de l'équation (2) en nombres naturels respectivement plus grands que x et y. Vu que l'équation (2) a évidemment la solution $x = 1$, $y = 3$, on en conclut qu'elle a une infinité de solutions en nombres x et $y > x$, c.q.f.d.

A. SCHINZEL et W. SIERPIŃSKI, Varsovie

TRAVAUX CITÉS

[1] K. SZYMICZEK, *L'équation $u\,v = w^2$ en nombres triangulaires*, Publikaije Elektrotehn. Fakulteta Univerziteta u Beogradu (à paraître).

[2] A. SCHINZEL i W. SIERPIŃSKI, O równaniu $x^2 - 2\,y^2 = k$, Wiadomości Matematyczne (à paraître).

*) Ajouté pendant la correction des épreuves) Cf. la solution du problème 5020 de M. J. A. H. HUNTER (Amer. Math. Monthly *70*, 574 (1963)).