

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 18 (1963)  
**Heft:** 5

**Artikel:** Über die Summe beliebiger und die Differenz aufeinanderfolgender Primzahlen  
**Autor:** Rieger, G.J.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-22645>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 08.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

bisherigen Ergebnisse können wir auch die Lösung dieser abgeänderten Aufgabe angeben. Haben nämlich die 3 rationalen Nullstellen von  $f(x)$  und die 2 rationalen Nullstellen von  $f'(x)$  den Hauptnenner  $n$ , so setzen wir  $x = \tilde{x}/n$  und erhalten  $f(x) = f(\tilde{x}/n) = \tilde{f}(\tilde{x})$ . Die Funktionen  $\tilde{f}(\tilde{x})$  und  $\tilde{f}'(\tilde{x})$  besitzen dann lauter ganzzahlige Nullstellen. Für die Nullstellen von  $\tilde{f}(\tilde{x})$  gelten damit die in (5) gegebenen Darstellungen. Wegen  $x = \tilde{x}/n$  erhält man die Nullstellen von  $f(x)$  aus denen von  $\tilde{f}(\tilde{x})$  durch Division mit der natürlichen Zahl  $n$ .

KARL ZUSER, Ingolstadt

## Über die Summe beliebiger und die Differenz aufeinanderfolgender Primzahlen

Wir bezeichnen mit kleinen lateinischen Buchstaben natürliche Zahlen, mit  $p$  eine Primzahl, mit  $:=$  Gleichheit nach Definition, mit  $\wedge$  das «und» der Logik, mit  $A \{ * : \dots \}$  die Anzahl der  $*$  mit den Eigenschaften  $\dots$  und mit  $C$  eine absolute positive Konstante.

Wir gehen aus von zwei geläufigen Ergebnissen der elementaren additiven Primzahltheorie. SCHNIRELMANN<sup>1)</sup> hat bewiesen, dass die Folge der Zahlen der Gestalt  $p_1 + p_2$  ( $p_{1,2}$  prim) positive asymptotische Dichte hat; PRACHAR<sup>2)</sup> hat gezeigt, dass die Folge der Zahlen der Gestalt  $p^+ - p$ , wenn  $p^+$  die der Primzahl  $p$  folgende Primzahl bezeichnet, positive asymptotische Dichte hat. Wir nehmen beide Fragestellungen zusammen und beweisen einen verwandten Satz für Zahlenpaare in der Ebene:

**Satz 1.** *Es gibt positive Konstanten  $C_1, C_2, C_3$  derart, dass aus  $x > C_1$  folgt*

$$A \{ m, n : m < x \wedge n < C_2 \log x \wedge m = p_1 + p_2 \wedge n = p_2^+ - p_2 \wedge p_{1,2} \text{ prim} \} > C_3 x \log x. \quad (1)$$

*Beweis.* Mit

$$f(m, n) := A \{ p_1, p_2 : p_1 + p_2 = m \wedge p_2^+ - p_2 = n \}$$

kann man für (1) auch

$$B(x) := A \{ m, n : m < x \wedge n < C_2 \log x \wedge f(m, n) > 0 \} > C_3 x \log x \quad (2)$$

schreiben. Nach der Schwarzschen Ungleichung ist

$$\left( \sum_{m < x} \sum_{n < C_2 \log x} f(m, n) \right)^2 \leq B(x) \sum_{m < x} \sum_{n < C_2 \log x} f^2(m, n). \quad (3)$$

Es ist

$$\begin{aligned} f(m, n) &\leq A \{ p : p < m \wedge (p \wedge m - p \wedge n + p \text{ prim}) \} \\ &< C_4 \frac{x}{\log^3 x} \prod_{p | m n (m+n)} \left( 1 + \frac{1}{p} \right)^2 \quad (m < x, x > 2) \end{aligned}$$

nach der Brunschen Siebmethode<sup>3)</sup>. Mit

$$P_m := \prod_{p | m} \left( 1 + \frac{1}{p} \right)^4 \quad (4)$$

<sup>1)</sup> Vgl. etwa [1], 150–153.

<sup>2)</sup> Vgl. etwa [1], 154–155.

<sup>3)</sup> Vgl. [1], II. Satz 4.2 und I. (5.23).

folgt

$$\sum_{m < x} \sum_{n < C_2 \log x} f^2(m, n) < C_4^2 \frac{x^2}{\log^6 x} \sum_{m < x} \sum_{n < C_2 \log x} P_m P_n P_{m+n}. \quad (5)$$

Nach der Schwarzschen Ungleichung ist

$$\left. \begin{aligned} \sum_{m < u} \sum_{n < v} P_m P_n P_{m+n} &\leq \sum_{n < v} P_n \left( \sum_{m < u} P_m^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{m < u} P_{m+n}^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \sum_{n < v} P_n \sum_{j < u+v} P_j^2 < C_5 v (u + v) \end{aligned} \right\} (6)$$

wegen (4) und

$$\sum_{j < w} \prod_{p|j} \left( 1 + \frac{1}{p} \right)^s < C(s) w$$

mit einer nur von s abhängigen positiven Konstanten C(s)<sup>4</sup>). Aus (5) und (6) folgt

$$\sum_{m < x} \sum_{n < C_2 \log x} f^2(m, n) < C_6 \frac{x^3}{\log^5 x} \quad (x > 2). \quad (7)$$

Ferner ist

$$\left. \begin{aligned} \sum_{m < x} \sum_{n < C_2 \log x} f(m, n) &= A \{p_1, p_2 : p_1 + p_2 < x \wedge p_2^+ - p_2 < C_2 \log x\} \\ &\geq A \left\{ p_1 : p_1 < \frac{x}{2} \right\} A \left\{ p_2 : p_2 < \frac{x}{2} \wedge p_2^+ - p_2 < C_2 \log x \right\} \\ &> C_8 \left( \frac{x}{\log x} \right)^2 \quad (x > C_7) \end{aligned} \right\} (8)$$

wegen der Čebyshev'schen Formel

$$A \{p : p < y\} > C_9 \frac{y}{\log y} \quad (y > 2)$$

und wegen

$$A \{p : p < y \wedge p^+ - p < C_2 \log y\} > C_{11} \frac{y}{\log y} \quad (y > C_{10})$$

bei geeignetem C<sub>2</sub> > 0<sup>5</sup>). Aus (3), (7) und (8) folgt (2) und damit die Behauptung.

Man gelangt zu einigen interessanten Verallgemeinerungen von Satz 1, wenn man zum obigen Beweis frühere Überlegungen<sup>6</sup>) hinzunimmt. G. J. RIEGER, München<sup>7</sup>)

#### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] KARL PRACHAR, *Primzahlverteilung* (Springer-Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1957).
- [2] G. J. RIEGER, *Über ein lineares Gleichungssystem von Prachar mit Primzahlen* (Erscheint im Journal für die reine und angewandte Mathematik).
- [3] G. J. RIEGER, *Über die Differenzen von drei aufeinanderfolgenden Primzahlen* (Erscheint in der Math. Zeitschrift).

<sup>4</sup>) Vgl. [1], 151 für s = 2; der Beweis für beliebiges s verläuft genau so.

<sup>5</sup>) Vgl. [1], V. (4. 4).

<sup>6</sup>) Vgl. [2] und [3].

<sup>7</sup>) Mein Dank gilt der National Science Foundation für finanzielle Unterstützung (Grant G-16305).