

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 18 (1963)  
**Heft:** 4  
  
**Rubrik:** Literaturüberschau

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 22.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

► In der Ebene der komplexen Zahlen sind die Ecken  $z = \varepsilon_k$  die Wurzeln der Gleichung  $z^n - 1 = 0$ , ( $k = 0; 1; \dots; n-1$ ). Für die Abstände des Punktes  $\varepsilon_0 = 1$  von den anderen gilt

$$d_k = |1 - \varepsilon_k|, \quad (k = 1; 2; \dots; n-1).$$

$z^n - 1 = 0$  hat die Wurzel  $z = 1$ , folglich besitzt

$$\frac{z^n - 1}{z - 1} \equiv z^{n-1} + z^{n-2} + \dots + z + 1 = 0$$

die Wurzeln  $z = \varepsilon_k$ , ( $k = 1; 2; \dots; n-1$ ); demnach ist

$$z^{n-1} + z^{n-2} + \dots + z + 1 = (z - \varepsilon_1)(z - \varepsilon_2) \dots (z - \varepsilon_{n-1}).$$

Für  $z = 1$  folgt hieraus

$$(1 - \varepsilon_1)(1 - \varepsilon_2) \dots (1 - \varepsilon_{n-1}) = n,$$

also ist auch  $d_1 d_2 \dots d_{n-1} = n$ , und das gesuchte geometrische Mittel hat den Wert  $\sqrt[n-1]{n}$ .

## Literaturüberschau

*Inequalities.* Von E. F. BECKENBACH und R. BELLMAN. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete Neue Folge Heft 30. XII und 198 Seiten mit 6 Abbildungen. DM 48.60. Springer Verlag, Berlin 1961.

1934 erschien das heute klassische Werk gleichen Titels von HARDY, LITTLEWOOD und POLYÁ, das wohl zum ersten Mal eine Systematik in das aus vielen Einzelresultaten bestehende Spezialgebiet der Ungleichungen brachte. Seither ist die Bedeutung der Ungleichungen ständig gewachsen, vor allem im Hinblick auf viele moderne Anwendungsbereiche der Mathematik (Spieltheorie, Lineare Programmierung, Ökonometrie etc.). Wie sehr die allgemeine Entwicklung der Algebra und Analysis auch diesem Forschungsgebiet zugute gekommen ist, wird aus dem vorliegenden Heft ersichtlich, das ein modernes Sammelwerk von Resultaten und Methoden in übersichtlicher Form darstellt.

Die klassischen Ungleichungen haben weitgehende Verallgemeinerungen und Verschärfungen erfahren. Darüber orientiert das 1. Kapitel, in dem der Leser auch viele in letzter Zeit entdeckte Ungleichungen kennlernt. Die Beweise sind hier meistens angegeben; für die Ungleichung zwischen dem arithmetischen und geometrischen Mittel sogar deren zwölf.

Neuartige Typen von Ordnungsbeziehungen treten im hyperkomplexen Bereich auf. Das wird im 2. Kapitel gezeigt, dessen Hauptgegenstand die Matrizen sind. Der grundlegende Begriff der positiven Zahl kann hier auf verschiedene Arten erweitert werden.

Im 3. Kapitel über Momentenräume kommen geometrische Gesichtspunkte aus der Theorie der konvexen Körper zur Anwendung. Einem Funktionenraum, der mit  $f(x)$  und  $g(x)$  auch alle  $\lambda f(x) + (1 - \lambda) g(x)$ ,  $0 \leq \lambda \leq 1$ , enthält, entspricht nämlich ein konvexes Gebiet in einem  $R_n$ , wenn als Koordinaten eines Punktes die (sehr allgemein definierten) ersten  $n$  Momente von  $f(x)$  genommen werden. Die einfache geometrische Bemerkung, dass die Distanz zwischen einem ausserhalb eines Eibereichs  $\mathfrak{B}$  liegenden Punkt  $P$  und einem Punkt der Begrenzung von  $\mathfrak{B}$  dort minimal wird, wo der Abstand von  $P$  von den Tangentialebenen von  $\mathfrak{B}$  ein (lokales) Maximum hat, zeigt die Äquivalenz zwischen gewissen Maximal- und Minimalproblemen, die in abstrakten Räumen zu wichtigen Resultaten führt.

Gegenstand des 4. Kapitels sind Differentialoperatoren  $L$ . Unter gewissen Voraussetzungen gelten Sätze von folgendem Typus: Aus  $L(u) \geq 0$  folgt  $u \geq 0$ , oder aus  $L(u) > 0$  und  $L(v) = 0$  folgt  $u > v$ .

Im letzten Kapitel werden Differentialungleichungen behandelt, die eng mit der Theorie der linearen Differentialgleichungen zusammenhängen. Typisch ist folgendes Resultat: Gehört  $u$  dem linearen normierten Raum  $L^p[0, \infty]$  mit  $p \geq 1$  und  $u''$  dem Raum  $L^r$  mit  $r \geq 1$  an, so liegt  $u'$  für  $m \geq \max(p, r)$  in  $L^m$ , das heisst, das von 0 bis  $\infty$  erstreckte

Integral über  $|u'|^m$  ist  $< +\infty$ . Man findet hier auch Beweise bzw. Verallgemeinerungen für die interessanten Integralungleichungen von WIRTINGER und CARLSON.

Der Text ist in über 200 kurze Abschnitte aufgeteilt. Hinweise auf die überaus reichhaltige Bibliographie ersetzen in vielen Fällen die Beweise. Die Verfasser, die an der Entwicklung des in ihrem Buch behandelten Gegenstandes selber massgebend beteiligt waren, haben es geschickt vermieden, dem Leser die Freude an der Fülle faszinierender Resultate durch zuviele technische Einzelheiten zu trüben.

E. TROST

*Lectures on Modular Forms.* Von R. C. GUNNING. 86 Seiten. \$ 2.75. Princeton University Press, Princeton 1962.

Die vorliegende Schrift enthält den Stoff, den GUNNING in einer Vorlesung des Jahres 1959 in Princeton dargeboten hat.

Schon früher wurden quadratische Formen im Zusammenhang mit den automorphen Funktionen untersucht (vgl. FRICKE/KLEIN, Vorlesungen über automorphe Funktionen). Neue Ansätze und Resultate von SELBERG und EICHLER haben dem ganzen damit zusammenhängenden Fragenkomplex grosse Bedeutung verliehen.

Um einen Zugang zu diesen Theorien zu gewinnen, ist es u. a. nötig, die sogenannten Modulformen (modular forms) zu studieren. Während automorphe Funktionen  $f(z)$  invariant sind gegenüber der Gruppe  $\Gamma$  der linearen Substitutionen  $z \rightarrow (az + b)/(cz + d)$  ( $a, b, c, d$  ganzrational,  $ad - bc = 1$ ) oder gegenüber einer Untergruppe  $G$  von  $\Gamma$ , also  $f((az + b)/(cz + d)) = f(z)$ , so definiert GUNNING als Modulform vom Gewicht  $k$  (ganz rational) bezüglich der Untergruppe  $G$  die in der oberen komplexen Halbebene meromorphen Funktionen  $f(z)$ , für die gilt  $f((az + b)/(cz + d)) = (cz + d)^k f(z)$ .

Hauptsächliches Mittel zur Konstruktion solcher Funktionen sind die sogenannten POINCARESchen Reihen. GUNNING geht ausführlich auf sie ein. Für die Modulformen hat HECKE 1937 einen sehr wichtigen Ring von Operatoren angegeben; dessen Theorie ist hier ein wesentliches Kapitel gewidmet. Im letzten Abschnitt gibt GUNNING als Anwendung der bisher entwickelten funktionentheoretischen Ergebnisse die Darstellungsanzahlen von Zahlen durch gewisse Klassen von ganzzahligen quadratischen Formen an.

Diese Abhandlung ist ein Mittelding zwischen einem Enzyklopädieartikel und einem Lehrbuch und ist in ihrer Art ein sehr gut gelungenes Werk. Es füllt die Lücke aus, die von all denen empfunden wird, die den Wunsch hegen, eine einführende Wegleitung zum Studium der Arbeiten SIEGELS, EICHLERS usw. in die Hand zu bekommen.

Wo GUNNING wegen der Beschränktheit des Buchumfangs nicht allzuweit ausholen will, verweist er auf die einschlägige Literatur, die am Ende jedes der sechs Kapitel aufgeführt wird.

G. AEBERLI

*Elementary Mathematical Analysis.* Von A. E. LABARRE, JR. 706 Seiten mit 323 Figuren. \$ 7.75. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass., London 1961.

Das vorliegende Buch enthält den Stoff eines einjährigen College-Grundkurses, der von der elementaren Algebra zur Infinitesimalrechnung führt. Darin ist auch Trigonometrie und analytische Geometrie eingeschlossen. Besonders erwähnt seien folgende Kapitel: Mengen (Elemente der Booleschen Algebra), Vektoren und komplexe Zahlen, Determinanten und Matrizen, Funktionen zweier Veränderlicher, Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Für die Hälfte der vielen gut ausgewählten Übungsaufgaben ist die Lösung angegeben. Die Darstellung ist sorgfältig, klar und anschaulich, so dass das Buch sich auch gut zum Selbststudium eignet.

E. TROST

*Mathematik für Chemiker.* Von G. ALEXITS und S. FENYÖ. Dritte, verbesserte Ausgabe. VIII und 449 Seiten mit 238 Abbildungen. DM 37.50. Akademische Verlagsgesellschaft Geest und Portig, Leipzig 1962.

Die beiden Verfasser (beide sind Professoren für Mathematik an der Technischen Universität in Budapest) haben für Chemiker ein Mathematikbuch geschrieben, welches bei den grundlegenden Begriffen Zahl, Funktion und Kurve anfängt, dann die Differential- und Integralrechnung behandelt und abschliessend sich noch mit Nomographie, Wahrscheinlichkeitsrechnung und komplexen Zahlen befasst. Im speziellen sind darin sehr viele

physikalisch-chemische Anwendungsbeispiele eingeflochten. Häufig werden Begriffe oder Verfahren, welche eingeführt werden sollen, zuerst an physikalisch-chemischen Erfahrungstatsachen veranschaulicht, bevor sie streng mathematisch definiert werden. Diese Ausrichtung des Buches auf die Anwendungen wird der Chemiker sicher sehr begrüßen. Die Lesbarkeit würde aber noch verbessert, wenn die Buchstabsymbole für die in den Beispielen häufig vorkommenden gleichen Begriffe immer gleich lauten würden. (Das Volumen erhält z. B. auf Seite 36 den Buchstaben  $v$ , auf Seite 42 aber  $n$  und auf Seite 74 dann  $V$ ). Überdies würden die Beispiele eindeutiger, wenn sich die Autoren entschliessen könnten, die physikalischen Gleichungen als Grössengleichungen (statt Zahlengleichungen) zu schreiben.

Dass in diesem Buch mathematische Beweise, welche viel Platz und Zeit in Anspruch nehmen würden, nicht durchgeführt sind, wird der Chemiker kaum bedauern. Vielleicht vermisst er aber einen Abschnitt über die sog. Fehlerfortpflanzung. Auch der Chemiker wird heute die Fehler (Unsicherheiten) der einzelnen Messgrössen abschätzen und möchte dann ausrechnen, welchen Einfluss sie auf das Resultat seiner Untersuchungen ausüben. Dieses Thema würde sich sehr gut eignen, um den Begriff des totalen Differentials anzuwenden.

Durch seinen anschaulichen Stil trägt das Buch dazu bei, eine in Chemikerkreisen noch gelegentlich anzutreffende Scheu resp. Abneigung gegen höhere Mathematik zu zerstreuen. Es ist ihm deshalb eine weite Verbreitung zu wünschen. W. BANTLE

*An Introduction to Mathematical Probability.* Von J. L. COOLIDGE. Neudruck der 1. Auflage von 1925. 214 Seiten. \$ 1.35. Dover Publications, New York 1962.

Während heute die angelsächsische Literatur zur Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik ein fast unübersehbares Ausmass annimmt, existierten zur Zeit, da COOLIDGE zum ersten Mal seine Einführung herausgab, für den englischsprachigen Leser keine Werke, die ihm die Wahrscheinlichkeitsrechnung ungefähr auf dem durch anderssprachige Standardwerke (wir erinnern an BERTRAND, CZUBER, MARKHOFF, CASTELNUOVO) gegebenen Niveau näher bringen konnten. Diese Lücke hat damals COOLIDGE geschlossen; sein Buch fand auch in einer deutschen Übersetzung (Leipzig 1927) weite Verbreitung. Der vorliegende, *unveränderte* Neudruck trägt selbstverständlich ganz die Züge der damaligen Zeit. Im Anschluss an von MISES wird die Wahrscheinlichkeit als Grenzwert der relativen Häufigkeit eingeführt. Der Umfang ist der dazumal übliche: Grundlagen, Bernoullisches Theorem, Mittelwert und Streuung, Geometrische Wahrscheinlichkeiten, Wahrscheinlichkeit von Ursachen, Fehlerrechnung, Ausgleich von Beobachtungen, Anwendungen (Gastheorie, Lebensversicherung). Auf die Entwicklung dieser und verwandter Gebiete in den letzten vierzig Jahren wird nirgends eingegangen. R. INEICHEN

*The USSR Olympiad Problem Book.* Von D. O. SHKLARSKY, N. N. CHENTZOV und I. M. YAGLOM. Herausgegeben von I. SUSSMAN, übersetzt von J. MAYKOVICH. 452 Seiten. W. H. Freeman & Co., San Francisco und London 1962.

Mathematische Olympiaden sind nationale Wettbewerbe im Lösen von Problemen für mathematisch besonders begabte Schüler der Mittelschulstufe. Sie werden von Hochschullehrern organisiert, die auf diese Weise schon früh hervorragende Talente erkennen und fördern können. Das vorliegende Buch, das eine Übersetzung der dritten russischen Auflage ist, enthält 320 Aufgaben, hauptsächlich aus der Algebra und der elementaren Zahlentheorie, die an Moskauer Olympiaden oder an Veranstaltungen der Gesellschaft für Schulmathematik gestellt wurden. Neben einer ausführlichen Lösung ist für jede Aufgabe ein kurzer Lösungshinweis in einem besonderen Abschnitt gegeben, um dem Leser nötigenfalls weiterzuhelfen. Der Schwierigkeitsgrad der Probleme ist sehr unterschiedlich. So steht die Aufgabe über die Unendlichkeit der Menge der Primzahlen neben der Frage nach dem Beweis der Darstellbarkeit einer positiven rationalen Zahl als Summe von drei positiven rationalen Kuben. In solchen Fällen ist die Kennzeichnung schwierigerer Probleme durch einen oder zwei Sterne wertvoll. Das Buch bietet jedem Freund des mathematischen Denksportes reiche Betätigungs möglichkeiten. E. TROST