

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 18 (1963)  
**Heft:** 4

**Artikel:** Zwei instruktive Trugschlüsse  
**Autor:** Wunderlich, W.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-22638>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 25.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

*Zeitschrift zur Pflege der Mathematik  
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts  
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrer*

Publiziert mit Unterstützung des Schweizerischen Nationalfonds  
zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung

---

El. Math.	Band XVIII	Nr. 4	Seiten 73–96	Basel, 10. Juli 1963
-----------	------------	-------	--------------	----------------------

---

## Zwei instruktive Trugschlüsse

### I

Die ebene Kinematik beruht letzten Endes auf der grundlegenden Tatsache, dass *irgend zwei Lagen eines starren, in der Ebene bewegten Systems stets durch eine Drehung (im Grenzfall durch eine Schiebung) ineinander übergeführt werden können.*

Wie man sich bald überzeugt, wird der Beweis für diesen elementaren Satz in den meisten Büchern folgendermassen geführt: Sind die beiden Systemlagen wie üblich durch zwei entsprechende, kongruente Strecken  $A_1B_1$  und  $A_2B_2$  der Ebene gegeben, und wird die zum Grenzfall führende gleichsinnig-parallele Lage von vornherein ausgeschlossen, so schneiden einander die Streckensymmetralen von  $A_1A_2$  und  $B_1B_2$  in einem eigentlichen Punkt  $M$ . Es gilt daher  $\overline{MA_1} = \overline{MA_2}$  und  $\overline{MB_1} = \overline{MB_2}$ , was zusammen mit der Voraussetzung  $A_1B_1 = A_2B_2$  die Kongruenz der Dreiecke  $MA_1B_1$  und  $MA_2B_2$  ergibt. Dreht man nun das erste Dreieck so lange um  $M$ , bis  $A_1$  mit  $A_2$  zur Deckung kommt, dann gelangt auch  $B_1$  nach  $B_2$ , und damit ist die erste Systemlage durch Drehung um  $M$  in die zweite Lage übergeführt.

Dieser Schluss enthält jedoch eine bedenkliche Lücke, denn er ist nur dann stichhaltig, wenn gesichert ist, dass die beiden Dreiecke  $MA_1B_1$  und  $MA_2B_2$  *gleichsinnig-kongruent* sind, was durch den blossen Längenvergleich der Seiten niemals festzustellen ist!

Der obige «Beweis» bedarf mithin einer notwendigen Ergänzung, die leicht indirekt zu erbringen ist. Nehmen wir an, die beiden Dreiecke  $MA_1B_1$  und  $MA_2B_2$  wären *gegensinnig-kongruent*: Sie müssten dann spiegelbildlich zur gemeinsamen Symmetrale der Winkel  $A_1MA_2$  und  $B_1MB_2$  liegen, die benützten Streckensymmetralen von  $A_1A_2$  und  $B_1B_2$  würden also zusammenfallen und ihr Schnittpunkt wäre (vorläufig) unbestimmt. Dieser Fall kann offenbar nur ausnahmsweise eintreten. Sind mithin die beiden Streckensymmetralen voneinander verschieden, so muss sicher der Fall gleichsinniger Kongruenz vorliegen. Sind sie jedoch einmal identisch, so darf auf ihnen das Drehzentrum  $M$  nicht beliebig gewählt werden, sondern es ist im Schnitt der Geraden  $A_1B_1$  und  $A_2B_2$  anzunehmen, wie leicht zu erkennen ist. Damit ist die Existenz eines eindeutig bestimmten Drehzentrums  $M$  in allen Fällen sichergestellt.

Wie gefährlich die aufgezeigte Beweislücke tatsächlich ist, zeigt sich, wenn man eine Dimension höhersteigt. Betrachten wir nämlich zwei Bewegungslagen eines starren *Raumsystems*, festgelegt durch zwei entsprechende kongruente Dreiecke  $A_1B_1C_1$  und  $A_2B_2C_2$ : Bezeichnet  $M$  den Schnittpunkt der drei Symmetralebenen von  $A_1A_2$ ,  $B_1B_2$

und  $C_1C_2$ , so haben wir zwei *kongruente* Pyramiden  $MA_1B_1C_1$  und  $MA_2B_2C_2$ . Nehmen wir stillschweigend wieder an, dass diese Pyramiden gleichsinnig-kongruent sind, so könnten wir weiterfolgern, dass sie und damit die beiden Systemlagen durch *Drehung um eine Achse* des Bündels  $M$  ineinander überzuführen sind. Dies ist aber im allgemeinen falsch, da bekanntlich zwei Lagen eines bewegten Raumsystems im allgemeinen durch eine *Schraubung* zusammenhängen!

Die Ursache des Trugschlusses liegt auf der Hand: Die beiden Pyramiden  $MA_1B_1C_1$  und  $MA_2B_2C_2$  sind eben nicht gleichsinnig-kongruent (wenn der Schnittpunkt der benützten Symmetralebenen eindeutig ausfällt), sondern *gegensinnig-kongruent*, was aber durch blossen Längenvergleich der Kanten nicht festzustellen ist.

## II

Als «*Gewindeflächen*» bezeichnet man solche Strahlflächen (Regelflächen), deren sämtliche Erzeugende einem *linearen Strahlkomplex* (*Gewinde*) angehören. Hierunter fallen beispielsweise alle algebraischen Strahlflächen bis zum 4. Grade, die Strahlschraubflächen u. a. Für windschiefe Gewindeflächen hat S. LIE die Existenz *ausgezeichneter Schmieglinien* (Haupttangentialkurven, Asymptotenlinien) nachgewiesen, die sich ohne Integrationsprozess finden lassen<sup>1)</sup>.

Zu den Lieschen Schmieglinien einer Gewindefläche  $F$  – die der Einfachheit halber als analytisch vorausgesetzt sei – kommt man auf die folgende Weise. Bezeichne  $\mathfrak{G}$  das die Strahlfläche  $F$  enthaltende Gewinde oder, falls  $F$  mehreren Gewinden angehört, ein bestimmtes unter denselben<sup>2)</sup>. Sei  $g \in \mathfrak{G}$  eine allgemeine Erzeugende von  $F$ . Sämtliche durch einen Punkt  $T$  von  $g$  gehenden Gewindestrahlen bilden bekanntlich ein Strahlbüschel, dessen Ebene  $\tau'$  natürlich auch die Erzeugende  $g$  enthält und daher die Fläche  $F$  in einem bestimmten Punkt  $T'$  von  $g$  berührt. Die Zuordnung  $T \rightarrow T'$  auf  $g$  ist wegen des projektiven Charakters der Nullkorrelation  $T \rightarrow \tau'$  und der Berührungskorrelation  $\tau' \rightarrow T'$  eine *Projektivität*, und zwar eine *Involution*. Für jeden der beiden (nicht unbedingt reellen) Doppelpunkte  $T_1 = T'_1$ ,  $T_2 = T'_2$  ist also die Nullebene gleichzeitig Tangentialebene. Alle in  $T_1$  oder  $T_2$  berührenden Flächentangenten sind mithin Gewindestrahlen, darunter insbesondere auch die Tangenten der beiden Ortslinien  $h_1$  von  $T_1$  und  $h_2$  von  $T_2$ . Diese Flächenkurven  $h_1$ ,  $h_2$  (die auch bloss zwei Zweige einer einzigen Kurve sein können) sind mithin *Gewindekurven*. Von solchen Kurven weiss man aber, dass die Nullebenen ihrer Punkte die Schmiegeebenen sind. Daraus folgt nun schliesslich, dass  $h_1$  und  $h_2$  *Schmieglinien* der Fläche  $F$  sind, nachdem in jedem ihrer Punkte die Schmiegeebene gleichzeitig Tangentialebene ist.

Die angestellten Überlegungen verlocken zur nachstehenden *Verallgemeinerung auf beliebige krumme Flächen*. Sei jetzt  $F$  eine beliebige, der Einfachheit halber wieder als analytisch vorausgesetzte Fläche, und  $\mathfrak{G}$  ein beliebiges, von  $F$  ganz unabhängiges Gewinde. Jedem Flächenpunkt  $T$  wird vermöge  $F$  eine Tangentialebene  $\tau$  und vermöge  $\mathfrak{G}$  eine Nullebene  $\tau'$  zugewiesen. Ordnet man nun jedem Punkt  $T$  den Winkelwert  $\omega = \angle \tau \tau'$  zu, so entsteht auf  $F$  ein analytisches *Skalarfeld*  $\omega(T)$ . Wir betrach-

<sup>1)</sup> Vgl. etwa E. KRUPPA: *Analytische und konstruktive Differentialgeometrie* (Wien 1957), 87 ff. und 133 ff.

<sup>2)</sup> Gehört eine Strahlfläche zwei Gewinden an, so treffen ihre Erzeugenden die beiden gemeinsamen reziproken Polaren, und sie ist «*Netzfläche*». Sie liegt dann in unendlich vielen Gewinden und ihre sämtlichen, von den Erzeugenden verschiedenen Schmieglinien sind Liesche. Beispiele hierfür sind etwa alle kubischen Strahlflächen.

ten nun die durch  $\omega = 0$  erklärte (nicht unbedingt reelle) *Niveaulinie*  $h$  dieses Feldes. In jedem Punkt von  $h$  ist  $\tau = \tau'$ , also die Tangentialebene identisch mit der Nullebene. Alle Tangenten von  $h$  sind daher Gewindestrahlen, und  $h$  ist demnach *Gewindekurve*. Wie vorhin schliesst man dann aus der Eigenschaft, dass die Schmiegeebenen einer Gewindekurve die Nullebenen der Kurvenpunkte sind, dass  $h$  eine *Schmieglinie* der Fläche  $F$  ist, weil in jedem ihrer Punkte die Schmiegeebene mit der Tangentialebene übereinstimmt. Damit scheint die Existenz von ausgezeichneten, ohne Integration einer Differentialgleichung auffindbaren Schmieglinien bei beliebigen krummen Flächen nachgewiesen zu sein!

Der berechtigte Verdacht, mit dieser verblüffenden Feststellung einem Trugschluss erlegen zu sein, steigert sich zur Überzeugung, sobald man das Gewinde  $\mathfrak{G}$  variieren lässt, weil man dadurch zu  $\infty^5$  Schmieglinien der Fläche gelangen würde, was offensichtlich unmöglich ist. Wo steckt nun der Fehler?

Der Fehler ist nicht ganz leicht zu entdecken, da er sich an einer recht unverfänglichen Stelle verbirgt: er liegt nämlich dort, wo aus  $\nless \tau \tau' = 0$  auf  $\tau = \tau'$  geschlossen wurde, was nur im Reellen zulässig ist. Berechnet man, gestützt auf ein lokales kartesisches Koordinatensystem  $Txyz$ , den (euklidischen) Winkel  $\omega$  der Ebenen

$$\tau \dots z = 0 \quad \text{und} \quad \tau' \dots ux + vy + wz = 0 \quad (1)$$

mittels der geläufigen Formel

$$\cos \omega = \frac{w}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}, \quad (2)$$

so erhält man  $\omega = 0$ , falls

$$u^2 + v^2 = 0, \quad \text{also} \quad u \pm iv = 0. \quad (3)$$

Geometrisch bedeutet das, dass die *Schnittgerade*  $g$  der Ebenen  $\tau, \tau'$  eine *Minimalgerade*  $x \pm iy = 0$  ist, also – unabhängig vom Koordinatensystem – eine *Treffgerade* des absoluten Kegelschnitts  $l$  ( $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ ) in der Fernebene. Im Komplexen können also zwei Ebenen einen verschwindenden Winkel einschliessen, ohne zusammenzufallen, wenn nur ihre Schnittgerade eine Minimalgerade ist.

Die nach allem im allgemeinen effektiv *existierende Niveaulinie*  $h$  ( $\omega = 0$ ) ist mithin der Ort aller Punkte auf  $F$ , in welchen eine dem Gewinde  $\mathfrak{G}$  angehörende und den absoluten Kegelschnitt treffende Flächentangente  $g$  vorhanden ist. Deuten wir in bekannter Weise das Gewinde  $\mathfrak{G}$  als Gesamtheit der  $\infty^3$  Bahnnormalen einer Schraubung mit der Achse  $a$  und der reduzierten Ganghöhe  $p$ , so sind die  $\infty^2$  den absoluten Kegelschnitt  $l$  treffenden Gewindestrahlen dadurch ausgezeichnet, dass sie den zu  $l$  nullpolaren *Drehzylinder*  $L$  mit der Achse  $a$  und dem Radius  $pi$  berühren; sie sind gleichzeitig – und das charakterisiert sie eindeutig – die Schraubtangente der Punkte des Zylinders  $L$ . Die Niveaulinie  $h$  ist demnach die auf  $F$  verlaufende Berührungskurve einer durch die Leitflächen  $F$  und  $L$  und die Leitlinie  $l$  bestimmten (isotropen) *Strahlfläche*  $H$ , deren Erzeugenden  $g$  die Kurve  $h$  nicht zu berühren brauchen. In den Punkten von  $h$  bilden die Ebenen  $\tau, \tau'$  zwar einen Winkel von der Grösse  $\omega = 0$ , sie fallen jedoch nicht zusammen. Die Flächenkurve  $h$  ist mithin im allgemeinen *keine Gewindekurve* und somit auch *keine Schmieglinie* von  $F$ . Das Gegenteil trifft nur ausnahmsweise zu, falls  $h$  die Berührungslinie zweier Mäntel von  $H$  ist, weil dann doch  $\tau = \tau'$  gilt. Dieser Umstand tritt beispielsweise bei den *Gewindeflächen* ein, aber auch



