

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 18 (1963)  
**Heft:** 3  
  
**Rubrik:** Kleine Mitteilungen

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

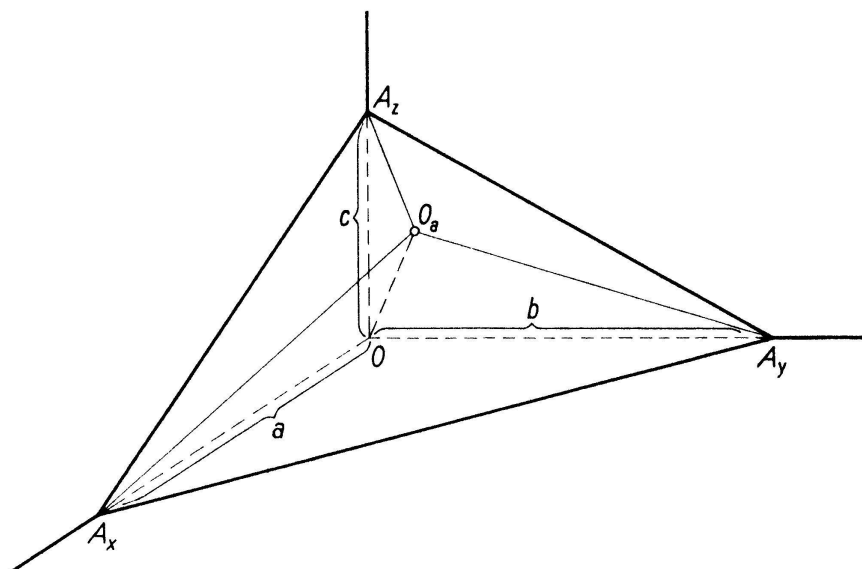
**Download PDF:** 12.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**



Punktes  $O$  von der Bildebene der Wert

$$d = \left( \frac{1}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} \right)^{1/2}. \quad (2)$$



Ist anderseits  $(\xi, \eta, \zeta)$  das Koordinatentripel des Punktes  $O_a$ , so lassen sich die Quadrate der Verkürzungsverhältnisse  $q_x, q_y, q_z$  durch die Formeln

$$q_x^2 = \frac{\overline{O_a A_x}^2}{\overline{O A_x}^2} = \frac{(\xi - a)^2 + \eta^2 + \zeta^2}{a^2},$$

$$q_y^2 = \frac{\overline{O_a A_y}^2}{\overline{O A_y}^2} = \frac{\xi^2 + (\eta - b)^2 + \zeta^2}{b^2},$$

$$q_z^2 = \frac{\overline{O_a A_z}^2}{\overline{O A_z}^2} = \frac{\xi^2 + \eta^2 + (\zeta - c)^2}{c^2}$$

ausdrücken. Führt man die Bezeichnung  $t = \overline{O O_a}$  ein, so wird

$$q_x^2 = \frac{t^2}{a^2} - \frac{2\xi}{a} + 1,$$

$$q_y^2 = \frac{t^2}{b^2} - \frac{2\eta}{b} + 1,$$

$$q_z^2 = \frac{t^2}{c^2} - \frac{2\zeta}{c} + 1,$$

woraus sich wegen (2) und (1)

$$q_x^2 + q_y^2 + q_z^2 = t^2 \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) - 2 \left( \frac{\xi}{a} + \frac{\eta}{b} + \frac{\zeta}{c} \right) + 3 = \frac{t^2}{d^2} - 2 + 3 = \frac{t^2}{d^2} + 1$$

ergibt. Da  $t \geq d$  immer und  $t = d$  genau für den Fall der normalen Axonometrie gilt, haben wir den folgenden Satz bewiesen:

**Satz 1.** Die Quadratsumme der Verkürzungsverhältnisse ist im Fall einer normalen Axonometrie – und nur in diesem Fall – gleich 2, aber im Fall einer nichtnormalen Axonometrie immer grösser als 2.

3. Es ist leicht einzusehen, dass für die Summe der Verkürzungsverhältnisse im allgemeinen keine obere Schranke angegeben werden kann; im Fall einer normalen Axonometrie aber ist diese Summe offenbar kleiner als 3. Wir zeigen folgendes:

Satz 2. Die Summe der Verkürzungsverhältnisse ist im Fall einer normalen Axonometrie höchstens gleich  $\sqrt{6}$ .

Da im Fall einer normalen Axonometrie mit  $q_x = q_y = q_z$  in der Tat  $q_x + q_y + q_z = \sqrt{6}$  gilt, ist die angegebene obere Schranke die kleinstmögliche.

Es bezeichne  $s$  die Summe der Verkürzungsverhältnisse. Im Fall einer normalen Axonometrie kann  $s$  als Funktion von  $q_x$  und  $q_y$  betrachtet werden, da (nach dem wohlbekannten Teil des Satzes 1)

$$s = q_x + q_y + \sqrt{2 - q_x^2 - q_y^2}$$

ist. Diese Funktion ist in dem (zu untersuchenden) Bereich  $0 \leq q_x, q_y \leq 1$  stetig, und auch ihre ersten und zweiten partiellen Ableitungen sind in diesem Bereich – vom Punkt  $(q_x, q_y) = (1, 1)$  abgesehen – überall stetig. Dementsprechend können wir für das Ausrechnen der (lokalen) Maxima die übliche Methode anwenden. Da

$$\frac{\partial s}{\partial q_x} = 1 - \frac{q_x}{\sqrt{2 - q_x^2 - q_y^2}}, \quad \frac{\partial s}{\partial q_y} = 1 - \frac{q_y}{\sqrt{2 - q_x^2 - q_y^2}}$$

und

$$\frac{\partial^2 s}{\partial q_x^2} = -\frac{2 - q_y^2}{(2 - q_x^2 - q_y^2)^{3/2}}, \quad \frac{\partial^2 s}{\partial q_y^2} = -\frac{2 - q_x^2}{(2 - q_x^2 - q_y^2)^{3/2}},$$

$$\frac{\partial^2 s}{\partial q_x \partial q_y} = \frac{\partial^2 s}{\partial q_y \partial q_x} = -\frac{q_x q_y}{(2 - q_x^2 - q_y^2)^{3/2}}$$

gilt, so ergibt sich, dass die Funktion  $s = s(q_x, q_y)$  ihr einziges (lokales) Maximum für

$$q_x = q_y = \sqrt{2 - q_x^2 - q_y^2},$$

das heisst für

$$q_x = q_y = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

annimmt. Daraus folgt, wegen der oben genannten Eigenschaften der Funktion  $s$ , dass dieses lokale Maximum auch das absolute Maximum von  $s$  im Bereich  $0 \leq q_x, q_y \leq 1$  ist. Somit haben wir Satz 2 bewiesen.

4. Da im Fall einer normalen Axonometrie jedes Verkürzungsverhältnis kleiner als 1 ist, gilt offenbar

$$s = q_x + q_y + q_z \geq q_x^2 + q_y^2 + q_z^2 = 2.$$

Wir vermuten, dass die Ungleichung  $s \geq 2$  auch für nichtnormale Axonometrien gültig ist.

G. Szász, Szeged/Ungarn

### Bemerkung zu einer Arbeit von W. NOHL

W. NOHL hat in einer kürzlich in dieser Zeitschrift erschienenen Arbeit<sup>1)</sup> das innere axiale Symmetriemass  $\alpha(k)$  eines ebenen Eibereiches  $k$  definiert und für zentrisches  $k$  die scharfe Ungleichung  $\alpha(k) \geq 2(\sqrt{2} - 1)$  gefunden. Es wird am Schlusse der Arbeit dann erwähnt, dass sich durch Kombination dieses Resultates mit einem Resultat von BESICOVITCH eine untere Abschätzung für das innere axiale Symmetriemass eines beliebigen ebenen Eibereiches gewinnen lässt. Offenbar ist damit die Ungleichung

$$\alpha(k) \geq \frac{2}{3} \cdot (2\sqrt{2} - 2) \approx 0,552$$

gemeint. Es ist nun nicht schwer, diese Abschätzung etwas zu verbessern. Wir zeigen nämlich im folgenden, dass man immer

$$\alpha(k) \geq \frac{5}{8} = 0,625$$

hat.

<sup>1)</sup> Die innere axiale Symmetrie zentrischer Eibereiche der Euklidischen Ebene, *El. Math.* 17 (1962), 59–63.

Nach C. RADZISZEWSKI<sup>2)</sup> gibt es zu jedem eigentlichen Eibereich  $k$  ein einbeschriebenes Rechteck, dessen Fläche mindestens halb so gross ist wie diejenige von  $k$ . Sei  $r$  ein solches Rechteck,  $A, B, C, D$  seine Ecken,  $a, b, c, d$  die vier ausserhalb  $r$  liegenden Reststücke von  $k$  und  $F(a \cup c) \geq F(b \cup d)$ . Somit hat man wegen

$$F(a \cup c) + F(b \cup d) = F(k) - F(r)$$

die Ungleichung

$$2 F(a \cup c) \geq F(k) - F(r).$$

Ferner seien  $E$  und  $F$  die Schnittpunkte der durch  $a$  und  $c$  gehenden Symmetrieachse von  $r$  mit der Berandung von  $k$ . Eine einfache Betrachtung lehrt, dass  $F(\triangle AEB) \geq F(a)/2$  und  $F(\triangle CFD) \geq F(c)/2$ . Nun ist das Sechseck  $AEBCFD$  axialsymmetrisch, und man bestätigt sofort für seine Fläche die Abschätzungen

$$F(AEBCFD) \geq F(r) + \frac{1}{2} F(a \cup c) \geq \frac{3}{4} F(r) + \frac{1}{4} F(k) \geq \frac{3}{8} F(k) + \frac{1}{4} F(k) = \frac{5}{8} F(k).$$

Mithin gilt  $\alpha(k) \geq 5/8$ .

FRED KRAKOWSKI, Davis, USA

### Eine einfache Integrationsformel hoher Genauigkeit

1. Bekanntlich erhält man für den Spezialfall  $y' = f(x)$  aus den Formeln von RUNGE-KUTTA zur Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung die *Simpson-Regel*.

ERWIN FEHLBERG [1]<sup>1)</sup> hat im Jahre 1958 mit Hilfe einer einfachen Transformation neue Runge-Kutta-Fehlberg-Formeln zur Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungen  $n$ -ter Ordnung aufgestellt, die die *Lösungsfunktion selbst um zwei  $h$ -Potenzen* ( $h$  = Schrittweite) und die *Ableitung der Lösungsfunktion um eine  $h$ -Potenz* genauer als die Formeln von RUNGE-KUTTA-ZURMÜHL liefern. Es ist offenbar bisher nicht bemerkt worden, dass sich diese Formeln im Sonderfall  $y' = f(x)$  mit besonderem Vorteil zur numerischen Quadratur verwenden lassen, weil dann die Mehrarbeit durch die Transformation nicht ins Gewicht fällt.

Aus den Formeln von RUNGE-KUTTA-FEHLBERG für gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung (vgl. [1]) erhalten wir unmittelbar die Integrationsformel

$$Y = \int_{x_0}^{x_1} y(x) dx \approx \frac{h}{1152} (500 y_1 + 375 y_2 + 64 y_3) + R, \quad (1)$$

wobei

$$x_1 = x_0 + h,$$

$$y_1 = y\left(x_0 + \frac{2}{5}h\right), \quad y_2 = y\left(x_0 + \frac{4}{5}h\right) \quad \text{und} \quad y_3 = y(x_0 + h)$$

bedeutet. Für das Restglied  $R$  ergibt sich

$$R = - \frac{h^7}{3780000} y^{(6)}(\xi) \pm \dots (x_0 < \xi < x_1). \quad (2)$$

Die Integrationsformel (1) und das Restglied (2) gelten natürlich nur für die folgendermassen transformierten stetigen und wenigstens einmal stetig differenzierbaren Funktionen  $y(x)$ :

$$y(x) = \bar{y}(x) - \bar{y}(x_0) - \bar{y}'(x_0)(x - x_0), \quad (3)$$

<sup>2)</sup> C. RADZISZEWSKI, *Sur un problème extrémal relatif aux figures inscrites dans les figures convexes*, C. R. Acad. Sci. Paris 235 (1952), 771–773.

<sup>1)</sup> Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 63.

dabei stellt  $\bar{y}(x)$  die gegebene und zu integrierende Funktion dar. Am Ende eines Integrationsschrittes führt man die Rücktransformation

$$\bar{Y} = Y + \bar{y}(x_0) (x_1 - x_0) + \frac{1}{2} \bar{y}'(x_0) (x_1 - x_0)^2 \quad (4)$$

durch.

2. Vier einfache Beispiele sollen die hohe Genauigkeit und den geringen Arbeitsaufwand der Integrationsformel (1) zeigen:

#### Beispiel 1

Man berechne das bestimmte Integral

$$Y = \int_0^{\frac{1}{2}} e^x dx = 0,648721.$$

Als Schrittweite wählen wir  $h = 1/2$ .

Mit Hilfe von (3) erhält man

$$y(x) = e^x - x - 1.$$

Wir berechnen

- a)  $y_1 = y(0,20) = 0,021403$  ,
- b)  $y_2 = y(0,40) = 0,091825$  und
- c)  $y_3 = y(0,5) = 0,148721$ .

Damit erhalten wir mit (1)

$$Y = 0,023721$$

und daraus mit (4) den gesuchten Integralwert

$$\bar{Y} = 0,648721.$$

Die Simpson-Regel liefert bei dieser Schrittweite einen Wert von

$$\bar{\bar{Y}} = 0,648735.$$

#### Beispiel 2

Man bestimme den Wert des Integrals

$$\bar{Y} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} = 0,785398163.$$

Als Schrittweite wird  $h = 1$  gewählt.

Mit (3) erhält man hier

$$y(x) = \frac{1}{1+x^2} - 1$$

und daraus mittels (1)

$$Y = -0,214676$$

und somit mit Hilfe von (4) den gesuchten Integralwert

$$\bar{Y} = 0,785323.$$

Die Simpson-Regel liefert bei dieser Schrittweite den Wert

$$\bar{\bar{Y}} = 0,783333.$$

#### Beispiel 3

Man ermittle den Wert des bestimmten Integrals

$$\bar{Y} = \int_1^2 \frac{1}{x} dx = \ln 2 = 0,69314718.$$

Als Schrittweite wählen wir  $h = 1$ .

Nach der Integrationsformel (1) erhält man für das Integral den Wert

$$\bar{Y} = 0,693122.$$

Die Simpson-Regel liefert bei dieser Schrittweite den Wert

$$\bar{Y} = 0,694445.$$

Selbst bei einer Schrittweite von  $h = 0,1$  liefert die Simpson-Regel nur den Wert

$$Y = 0,693150$$

und die kombinierte Stirling-Bessel-Formel (vgl. [2], S. 218) bei einer Schrittweite von  $h = 0,1$  nur den Wert

$$\bar{Y} = 0,69314711.$$

#### Beispiel 4

Es soll das bestimmte Integral

$$Y = \int_0^1 e^{-x^2/2} dx$$

mit Hilfe der Integrationsformel (1) berechnet werden.

Als Schrittweite wird  $h = 1$  gewählt. Man erhält hier den Wert

$$\bar{Y} = 0,855626614.$$

Dagegen erhält man nach der Simpson-Regel für  $h = 0,2$  den Wert

$$Y = 0,8556262$$

und nach der Hermite-Formel (vgl. [2], S. 224) unter Verwendung der ersten Ableitung bei einer Schrittweite von  $h = 0,2$  den Wert

$$\bar{Y} = 0,8556244.$$

3. Folgerung: Die vier oben angeführten Beispiele zeigen sehr deutlich, dass die Integrationsformel (1) von sehr hoher Genauigkeit und geringem Arbeitsaufwand ist.

Über die Fehlergrösse der Integrationsformel (1) kann man nach dem Runge-Prinzip wenigstens eine angenäherte Aussage machen. Danach beträgt der Fehler nach zwei Schritten Feinrechnung (Schrittweite =  $h$ ) und einem Schritt Grobrechnung (Schrittweite =  $2h$ )

$$\delta y \approx \frac{1}{63} |Y_h - Y_{2h}|. \quad (5)$$

Eine Fehlerschranke liefert selbstverständlich auch das Restglied (2).

Eine eingehendere Untersuchung über den Genauigkeitsgewinn und die Zeitersparnis der Integrationsformel (1) gegenüber den bisher besten Integrationsformeln, wie zum Beispiel die Simpson-Regel, die Formeln von STIRLING und BESSEL, GAUSS und TSCHEBYSCHEFF sowie die MacLaurin-Formeln und die Formeln von HERMITE, in denen auch Ableitungen von  $y(x)$  herangezogen werden, ist im Gange.

S. FILIPPI, Aachen

#### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] E. FEHLBERG, *Eine Methode zur Fehlerverkleinerung beim Runge-Kutta-Verfahren*. ZAMM 38 (1958), 421–426.
- [2] R. ZURMÜHL, *Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker*. Dritte verbesserte Auflage, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1961.