Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 18 (1963)
Heft: 3

Artikel: Trois nombres tétraédraux en progression arithmétique
Autor: Sierpiski, W.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-22636

Sonderbarerweise ist diese anscheinend recht grobe Abschätzung in dem folgenden Sinne scharf:

(i) Es gibt ein $\gamma > 0$, so dass für jedes Tripel A, B, C, das die Voraussetzungen (12) und (15) erfüllt, gilt

$$A(n) + B(n) + C(n) < \frac{3}{2}\,n - \gamma\, n^{2/3}.$$

(ii) Es gibt ein von n unabhängiges $\alpha > 0$ und zu jedem n drei Mengen A, B, C, die (12) und (15) befriedigen, so dass

$$A(n) + B(n) + C(n) > \frac{3}{2}\,n - \alpha\, n^{2/3}.$$

PETER SCHERK, University of Toronto, Kanada

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. S. BESICOVITCH, *On the density of the sum of two sequences of integers.* J. London Math. Soc. *10* (1935), 246–248.
[2] P. ERDÖS and P. SCHERK, *On a question of additive number theory.* Acta Arithmetica *5* (1958), 45–55.
[3] J. H. B. KEMPERMAN and P. SCHERK, *On sums of integers.* Canad. J. Math. *6* (1954), 238–252.
[4] A. KHINTCHINE, *Zur additiven Zahlentheorie.* Mat. Sbornik *39* (1932), 27–34.
[5] H. B. MANN, *A proof of the fundamental theorem on the density of sums of sets of positive integers.* Ann. of Math. *43* (1942), 523–527.

Trois nombres tétraédraux en progression arithmétique

Le but de cette note est de donner une démonstration élémentaire de la proposition suivante:

THÉORÈME. *Il existe une infinité de progressions arithmétiques formées de trois nombres tétraédraux distincts*[1].

Démonstration. Définissons les suites infinies d'entiers positifs a_n et b_n ($n = 1, 2, \ldots$) par les conditions:

$$a_1 = 2, \quad b_1 = 1, \quad a_{n+1} = 73\,a_n + 148\,b_n, \quad b_{n+1} = 36\,a_n + 73\,b_n. \tag{1}$$

On aura évidemment

$$a_n > b_n \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{2}$$

On vérifie sans peine l'identité

$$[3\,(73\,a + 148\,b)]^2 - 37\,(36\,a + 73\,b)^2 = (3\,a)^2 - 37\,b^2$$

d'après laquelle il résulte de (1) que

$$(3\,a_{n+1})^2 - 37\,b_{n+1}^2 + 1 = (3\,a_n)^2 - 37\,b_n^2 + 1 \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, \ldots,$$

et, comme $(3\,a_1)^2 - 37\,b_1^2 + 1 = 6^2 - 37 + 1 = 0$, il résulte par l'induction que

$$(3\,a_n)^2 - 37\,b_n^2 + 1 = 0 \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{3}$$

[1]) On appelle *tétraédral* (ou *pyramidal*) tout nombre de la forme $T_n = [(n+1)^3 - (n+1)]/6$. Voir ma note dans les Elemente der Math. XVII (1962), p. 29.

Posons maintenant

$$u_n = 3\,b_n - a_n, \quad v_n = 4\,b_n, \quad w_n = 3\,b_n + a_n \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{4}$$

D'après (1) et (2) on a $u_n < v_n < w_n$ pour $n = 1, 2, \ldots$ et $u_1 = 1$, $v_1 = 4$, $w_1 = 5$, $u_{n+1} = 3\,b_{n+1} - a_{n+1} = 35\,a_n + 71\,b_n$ pour $n = 1, 2, \ldots$, donc les nombres u_n, v_n, w_n sont, pour $n = 2, 3, \ldots$, des entiers > 1 et, les nombres b_n croissant avec n, on a $v_{n+1} > v_n$ pour $n = 1, 2, \ldots$

Or, d'après (4), on trouve pour $n = 1, 2, \ldots$

$$u_n^3 + w_n^3 - 2\,v_n^3 - u_n - w_n + 2\,v_n = 2\,b_n\,[(3\,a_n)^2 - 37\,b_n^2 + 1],$$

donc, d'après (3):

$$u_n^3 + w_n^3 - 2\,v_n^3 - u_n - w_n + 2\,v_n = 0 \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, \ldots,$$

d'où

$$\frac{u_n^3 - u_n}{6} + \frac{w_n^3 - w_n}{6} = 2\,\frac{v_n^3 - v_n}{6} \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, \ldots,$$

donc

$$T_{u_n - 1} + T_{w_n - 1} = 2\,T_{v_n - 1} \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{5}$$

ce qui prouve que, pour $n = 1, 2, \ldots$, les trois nombres tétraédraux

$$T_{u_n - 1}, \quad T_{v_n - 1} \quad \text{et} \quad T_{w_n - 1}$$

forment une progression arithmétique. Comme $u_n < v_n < w_n$ et $v_{n+1} > v_n$ pour $n = 1, 2, \ldots$, il en résulte notre théorème. Pour $n = 2$ on obtient $T_{140} + T_{728} = 2\,T_{579}$.

Pour $n = 1$ on a $u_1 = 1$, $v_1 = 4$, $w_1 = 5$ et la formule (5) donne $T_4 = 2\,T_3$. Dans ma note citée j'ai posé le problème s'il existe d'autres solutions en nombres naturels m et n de l'équation $T_m = 2\,T_n$. M. S. L. SEGAL a démontré récemment qu'il n'existe pas d'autres solutions[2]). Or, il mentionne aussi (l.c., p. 638) que M. S. CHOWLA a démontré récemment qu'il existe une infinité de nombres tétraédraux qui sont sommes de deux nombres tétraédraux (ce que j'ai démontré dans ma note citée des Elemente der Math.). La démonstration de M. CHOWLA m'est inconnue.

Il est encore à remarquer qu'il existent d'autres solutions de l'équation $T_x + T_y = 2\,T_z$ outre celles que nous avons trouvées, par exemple $T_4 + T_{10} = 2\,T_8$.

Or, M. A. MĄKOWSKI a posé le problème suivant, dont la solution me semble être difficile: *Existe-t-il pour tout nombre naturel k une infinité de solutions de l'équation* $T_x + T_y = k\,T_z$ *en entiers positifs* x, y et z*?*

Je sais démontrer (ce que je ferai ailleurs) qu'il existe une infinité de nombres naturels k pour lesquels cela est vrai.

W. SIERPIŃSKI (Varsovie)

On the Diameter and Triameter of a Convex Body

1. By a *convex body* in Euclidean n-dimensional space E_n we shall mean a compact, convex subset with interior points. One phase of the theory of convex bodies seeks to establish inequalities between the geometrical invariants associated with these bodies.

---

[2]) S. L. SEGAL, *A note on pyramidal numbers*, Amer. Math. Monthly 69 (1962), p. 637.