

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 18 (1963)  
**Heft:** 2  
  
**Rubrik:** Kleine Mitteilungen

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 11.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Für diese fünf Polyeder lässt sich die Zerlegungsgleichheit mit Würfeln direkt bestätigen. Allgemeiner gilt für beliebige totalsymmetrische konvexe Polyeder des gewöhnlichen Raumes, dass diese mit Würfeln sogar translativ-zerlegungsgleich sind, so dass die Teilpolyeder, welche die Zerlegungsgleichheit realisieren, nicht nur kongruent, sondern sogar translationsgleich sind<sup>5)</sup>. Im Falle  $n > 3$  scheinen verwinkelte Verhältnisse vorzuliegen. Allgemein für  $n \geq 2$  gültige und weitergreifende Resultate hat kürzlich H. GROEMER gewonnen<sup>6)</sup>. Er zeigte, dass bei einer Parkettierung des Raumes durch gleichmässig beschränkte Polyeder, die mit einem konvexen Polyeder  $P$  lediglich homothetisch sind, wieder auf die Zentralsymmetrie von  $P$  selbst und seiner Seitenflächen geschlossen werden kann. Ob hier im Falle  $n > 3$  noch die translativen Zerlegungsgleichheit von  $P$  mit einem Würfel  $W$  besteht, ist fraglich. Herrn GROEMER verdanken wir den Hinweis<sup>7)</sup>, dass schon DELAUNAY vierdimensionale konvexe Polyeder angegeben hat, welche die Parkettierungseigenschaft aufweisen und deren zweidimensionale Kanten Dreiecke sind. Vgl. hierzu auch eine Vermerkung von COXETER<sup>8)</sup>. Diese Tatsache zeigt, dass die höher dimensionalen Paralleloteder nicht in dem Sinne totalzentralsymmetrisch sind, dass die Kanten aller Dimensionen diese gleiche Symmetrie besitzen, wie der Unterzeichneter fälschlicherweise annahm.

Bei dem hier vorgelegten Problem handelt es sich nun darum zu entscheiden, ob der oben formulierte Satz betreffend die Zerlegungsgleichheit von Parkettierungspolyedern mit Würfeln richtig ist oder nicht. H. HADWIGER

## Kleine Mitteilungen

### Einige Dreiecksungleichungen

Bei  $i = 1, 2, 3$  seien  $a_i$ ,  $h_i$ ,  $m_i$  und  $\alpha_i$  die Seiten, Höhen, Schwerelinien und Winkel eines Dreiecks mit  $r$  und  $R$  als In- und Umkreisradius. Es gilt die Abschätzung

$$\frac{\sqrt{3}}{R} \leq \sum_{i=1}^3 \frac{1}{a_i} \leq \frac{\sqrt{3}}{2r} \quad (1)$$

von KUBOTA [1]<sup>9)</sup> (linke Seite)/LEUENBERGER [2] (rechte Seite). Letzterer gab in Amer. Math. Monthly 1960, S. 692, erstmals

$$M_1(h) \leq \frac{\sqrt{3}}{2} M_1(a) \quad (2)$$

an.  $M_k(x)$  bedeutet das  $k$ -te Potenzmittel der Grössen  $x_i$ , und (2) ist der rechten Seite von (1) äquivalent. Schliesslich zeigte MAKOWSKI [3], dass

$$\left. \begin{aligned} M_k(h) &\leq \frac{\sqrt{3}}{2} M_k(a) \\ M_{-k}(h) &\leq \frac{\sqrt{3}}{2} M_{-k}(a) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

und

<sup>5)</sup> Vgl. hierzu H. HADWIGER, *Mittelpunktpolyeder und translativen Zerlegungsgleichheit*; Math. Nachr. 8, 53–58, 1953.

<sup>6)</sup> Über Zerlegungen des euklidischen Raumes; Math. Z. 79, 364–375, 1962.

<sup>7)</sup> Brief vom 26. 10. 1962.

<sup>8)</sup> J. de Math. 41, 125, 1962.

<sup>9)</sup> Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 33.

äquivalente Ungleichungen sind. Damit folgerte er aus (2) die Gültigkeit von

$$M_{-1}(h) \leq \frac{\sqrt{3}}{2} M_{-1}(a). \quad (4)$$

*Satz 1:* (3) gilt auch für  $k = 2$ .

*Beweis:*  $M_2(h) \leq M_2(a) \sqrt{3}/2$  folgt unmittelbar aus der trivialen Ungleichung

$$\sum_{i=1}^3 h_i^2 \leq \sum_{i=1}^3 m_i^2$$

und der wohlbekannten Beziehung

$$\sum_{i=1}^3 m_i^2 = \frac{3}{4} \sum_{i=1}^3 a_i^2.$$

Damit gilt nach (3)

$$M_k(h) \leq \frac{\sqrt{3}}{2} M_k(a) \text{ für } |k| = 2. \quad (5)$$

Die Frage, für welche  $k$  wohl (3) überhaupt gilt, ist natürlich im allgemeinen noch offen. Dagegen bestätigen wir eine Vermutung von MAKOWSKI [3] in

*Satz 2:*

$$\text{Genau für } k \leq \frac{\log 9 - \log 4}{\log 4 - \log 3}$$

gilt

$$M_k(a) \leq R \sqrt{3}. \quad (6)$$

*Beweis:* Wegen  $a_i = 2 R \sin \alpha_i$  ist  $M_k(a) \leq R \sqrt{3}$  mit  $M_k(\sin \alpha) \leq \sqrt{3}/2$  äquivalent, so dass wir nur abzuklären haben, für welche  $k$  die letzte Ungleichung gilt. Sei  $k > 2$ ; für kleinere  $k$  ist (6) bekannt und folgt dann überdies aus einer bekannten Potenzmittel-eigenschaft ohne weiteres.

a) Dreieck stumpfwinklig,  $\alpha_1 > 90^\circ$ , womit  $\alpha_2 + \alpha_3 < 90^\circ$ . Gilt simultan  $\alpha_1 - \varepsilon > 90^\circ$  und  $\alpha_2 + \varepsilon < 90^\circ$ , so ist

$$\sum_{i=1}^3 \sin^k \alpha_i < \sin^k(\alpha_1 - \varepsilon) + \sin^k(\alpha_2 + \varepsilon) + \sin^k \alpha_3.$$

b) Dreieck rechtwinklig,  $\alpha_1 = 90^\circ$ ,  $\alpha_2 = \alpha$ . Es folgt

$$1 + \sin^k \alpha + \cos^k \alpha \leq 1 + \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 2. \text{ Max. für } \alpha_2 = 90^\circ.$$

c) Dreieck spitzwinklig,  $\alpha_1 < 90^\circ$ ,  $\alpha_2 < 90^\circ$ ,  $\alpha_1 + \alpha_2 > 90^\circ$ . Die notwendigen Bedingungen für ein relatives Maximum von

$$f(\alpha_1, \alpha_2) = \sin^k \alpha_1 + \sin^k \alpha_2 + \sin^k(\alpha_1 + \alpha_2)$$

in einem inneren Punkte sind

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha_1} = k \sin^{k-1} \alpha_1 \cos \alpha_1 + k \sin^{k-1}(\alpha_1 + \alpha_2) \cos(\alpha_1 + \alpha_2) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha_2} = k \sin^{k-1} \alpha_2 \cos \alpha_2 + k \sin^{k-1}(\alpha_1 + \alpha_2) \cos(\alpha_1 + \alpha_2) = 0,$$

das heisst

$$\sin^{k-1} \alpha_1 \cos \alpha_1 = \sin^{k-1} \alpha_2 \cos \alpha_2 = \sin^{k-1} [\pi - (\alpha_1 + \alpha_2)] \cos [\pi - (\alpha_1 + \alpha_2)]. \quad (7)$$

Mit  $z = \arctg \sqrt{k-1}$  nimmt  $f(x) = \sin^{k-1} x \cos x$  in  $(0, z)$  monoton zu und in  $(z, \pi/2)$  monoton ab, womit (7) im interessanten  $k$ -Bereich  $\alpha_i \equiv 60^\circ$  für das Maximaldreieck liefert.

Da zudem a) durch b) verbessert wird, kann durch direkte Rechnung geprüft werden, wann das gleichseitige Dreieck vom Randextremum bei b) abgelöst wird. Das grösstmögliche  $k$  für die Gültigkeit von (6) erhalten wir offenbar aus  $3 \sin^k \pi/3 = 2$ , was uns wie behauptet  $k = (\log 9 - \log 4)/(\log 4 - \log 3)$  liefert. J. BERKES, Szeged

## LITERATURVERZEICHNIS

- [1] T. KUBOTA, Tôhoku Math. Journ. 25 (1925), 122–126, vgl. [3].  
 [2] F. LEUENBERGER, *Dreieck und Viereck als Extremalpolygone*. El. Math. 15 (1960), 77–79  
 [3] A. MAKOWSKI, *Some Geometric Inequalities*. El. Math. 17 (1962), 40–41.

## Bemerkung zu zwei Arbeiten von A. MAKOWSKI und J. BERKES

Auf der Seite  $a_i$  eines Dreiecks mit Umkreisradius  $R$  stehe die Höhe  $h_i$ , während  $w_i$  den Gegenwinkel von  $a_i$  halbiere. Bedeutet  $M_k(x)$  das  $k$ -te Potenzmittel der Größen  $x_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), so zeigte A. MAKOWSKI [1]<sup>1)</sup> in dieser Zeitschrift, dass

$$M_k(h) \leq \frac{\sqrt{3}}{2} M_k(a) \quad \text{und} \quad M_{-k}(h) \leq \frac{\sqrt{3}}{2} M_{-k}(a)$$

äquivalente Aussagen sind. Die *Gültigkeit* der Ungleichungen wird dabei einzig für die beiden *diskreten* Ordnungszahlen  $k = 0$  und  $k = 1$  dargetan. Nun ist es aber sehr einfach, ihr Bestehen in einem ganzen *Intervall* nachzuweisen:

$$\text{Für } 1 \leq |k| \leq 2 \text{ gilt } M_k(h) \leq \frac{\sqrt{3}}{2} M_k(a). \quad (1)$$

Dank MAKOWSKIS Resultat brauchen wir es nur für  $1 \leq k \leq 2$  zu beweisen.

Ist  $s$  der halbe Dreiecksumfang, so gilt [2]

$$w_i^2 \leq s(s - a_i)$$

und damit

$$\sum w_i^2 \leq s^2$$

oder

$$M_2(w) \leq \frac{s}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} M_1(a).$$

Unter Beachtung der Verschiedenheit der Ordnungszahlen und wegen  $h_i \leq w_i$  liegt damit die Begründung von (1) schon vor, da  $M_m(x) \leq M_n(x)$  für  $m < n$  wohlbekannt ist.

Expliziter als bei MAKOWSKI wird neuerdings die Frage, für welche  $k$  die Ungleichung (1) überhaupt gelte, in vorstehender Arbeit von BERKES aufgeworfen. In Satz 1 zeigt dieser, dass  $|k| = 2$  gesetzt werden darf. Einerseits ist dieses Resultat natürlich ein Spezialfall unserer Ungleichung (1), andererseits kann aber auch diese gerade dank Satz 2 von BERKES nochmals wie folgt erweitert werden:

Es gilt

$$M_k(h) \leq \frac{\sqrt{3}}{2} M_k(a) \quad \text{für } |k| \leq \frac{\log 9 - \log 4}{\log 4 - \log 3} = K \approx 2,8188. \quad (2)$$

Nach BERKES erlangt nämlich  $M_k(a) \leq R\sqrt{3}$  genau für  $k \leq K$  Gültigkeit<sup>2)</sup>.

Aus

$$\sum h_i^k = (2R)^{-k} \sum_{i < j} a_i^k a_j^k$$

folgt wegen

$$3xy = xy + 2xy \leq \frac{1}{2} (x^2 + y^2) + 2xy \quad (*)$$

sofort

$$\sum h_i^k \leq \frac{1}{3} (2R)^{-k} \left( \sum a_i^k \right)^2$$

<sup>1)</sup> Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 34.

<sup>2)</sup> Der Vollständigkeit halber sei bemerkt, dass für  $k > K$  die Relation  $M_k(a) < 2R(2/3)^{1/k} < 2R(3)$  gilt. Dem Beweis des Satzes 2 von BERKES entnimmt man dieses Resultat mühelos, da für  $k > K$  das (gleichschenklige) Extremaldreieck nahezu den Umkreisdurchmesser als Schenkel aufweist. Damit ist die von  $k$  abhängige Abschätzung (3) aber auch scharf.

und damit aber für  $k \leq K$  nach Satz 2 von BERKES

$$\sum h_i^k \leq \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^k \sum a_i^k,$$

was mit  $M_k(h) \leq M_k(a) \sqrt{3}/2$  gleichbedeutend ist. Nach der zu Beginn angeführten Äquivalenzbeziehung von MAKOWSKI haben wir den Beweis von (2) vollständig erbracht. Dabei zeigen (\*) und Satz 2 von BERKES, dass Gleichheit nur im regulären Dreieck besteht.

Erwünscht wäre nach wie vor eine *systematische* Untersuchung für beliebiges  $k$ , welche vielleicht zu Vergleichszwecken neben den Höhen die Winkelhalbierenden beziehen würde.

F. LEUENBERGER, Feldmeilen

#### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] A. MAKOWSKI, *Some Geometric Inequalities*, El. Math. 17 (1962), 40–41.
- [2] Aufgaben für die Schule, Lösung zu Nr. 3, El. Math. 17 (1962), 45–46.

#### Ergänzende Bemerkungen zu der Arbeit von A. MAKOWSKI<sup>1)</sup> «Some geometric inequalities»

Das Potenzmittel  $n$ -ter Ordnung dreier positiver Zahlen  $x_1, x_2, x_3$  ist durch den Ausdruck

$$M(n, x_i) = \begin{cases} \left(\frac{1}{3} \sum x_i^n\right)^{1/n}, & \text{falls } n \neq 0 \\ (\prod x_i)^{1/3}, & \text{falls } n = 0 \end{cases}$$

für alle reellen Zahlen  $n$  definiert.  $M(n, x_i)$  ist bekanntlich in  $-\infty < n < \infty$  eine positive, stetige und monoton wachsende Funktion der Variablen  $n$ , und es ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} M(n, x_i) = \text{Max } x_i$ ,  $\lim_{n \rightarrow -\infty} M(n, x_i) = \text{Min } x_i$ .

In der genannten Abhandlung vergleicht MAKOWSKI die Potenzmittel der Seiten  $a_i$  und der Höhen  $h_i$  eines Dreiecks, mit dem Ergebnis

$$M(n, h_i) \leq \frac{1}{2} \sqrt{3} M(n, a_i) \text{ für } n = 0, 1 \text{ und } -1.$$

Es erhebt sich die Frage, ob bzw. unter welchen Bedingungen diese Ungleichung auch noch für andere Ordnungen  $n$  gilt. In der Tat lässt sich zeigen, dass obige Ungleichung für gewisse Dreiecke sogar für jedes reelle  $n$  besteht. Zunächst beweisen wir folgenden Satz: Sind  $a_i$  die Seiten,  $h_i$  die Höhen und  $F$  der Inhalt eines Dreiecks, dann gilt die Doppelungleichung

$$\alpha M(n, a_i) \leq M(n, h_i) \leq \beta M(n, a_i)$$

mit  $\alpha = 2F \text{Min}[(\prod a_i)^{-2/3}; (\text{Max } a_i \text{Min } a_i)^{-1}]$  und  $\beta = 2F \text{Max}[(\prod a_i)^{-2/3}; (\text{Max } a_i \text{Min } a_i)^{-1}]$  für jedes reelle  $n$ .

*Beweis:* Wegen  $h_i = 2F a_i^{-1}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) ist

$$q(n) = \frac{M(n, h_i)}{M(n, a_i)} = \frac{M(n, 2F a_i^{-1})}{M(n, a_i)} = 2F \frac{M(n, a_i^{-1})}{M(n, a_i)} = \frac{2F}{M(n, a_i) M(-n, a_i)}.$$

Aus dieser Darstellung ergeben sich unmittelbar folgende Eigenschaften von  $q(n)$ :

$$q(-n) = q(n). \quad (1)$$

$$q(0) = \lim_{n \rightarrow 0} q(n) = \frac{2F}{(\prod a_i)^{2/3}}. \quad (2)$$

$$q(\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} q(n) = \frac{2F}{\text{Max } a_i \text{Min } a_i}. \quad (3)$$

<sup>1)</sup> El. Math. 17 (1962), 40-41.

Ausserdem lässt sich zeigen, dass der Wertevorrat von  $q(n)$  zwischen  $q(0)$  und  $q(\infty)$  liegt. Zum Nachweis dieser Eigenschaft ziehen wir die Darstellung

$$q(n) = \frac{2F}{\prod a_i} \cdot \frac{M(n, a_i a_{i+1})}{M(n, a_i)}$$

heran, die aus der Identität  $M(n, a_i^{-1}) = (\prod a_i)^{-1} M(n, a_i a_{i+1})$  folgt. Die Dreiecksseiten seien der Grösse nach geordnet, etwa  $a_1 \leqq a_2 \leqq a_3$ , und wir setzen zunächst voraus, dass die Ungleichung  $a_1 a_3 \leqq a_2^2$  bestehe. Dann ist  $M(n, a_i a_{i+1}) \leqq a_2 M(n, a_i)$ , also  $q(n) \leqq 2F a_2 / \prod a_i = q(\infty)$ .

Wegen

$$(a_1^2 - a_2 a_3) (a_2^2 - a_1 a_3) (a_3^2 - a_1 a_2) + \sum (a_i a_{i+1})^3 \equiv \prod a_i \cdot \sum a_i^3$$

folgt aus  $a_1 a_3 \leqq a_2^2$  andererseits

$$\sum (a_i a_{i+1})^3 \geqq \prod a_i \cdot \sum a_i^3 \text{ also } \frac{M(3, a_i a_{i+1})}{M(3, a_i)} \geqq (\prod a_i)^{1/3}.$$

Setzen wir  $A_i = a_i^{n/3}$  mit  $n \geqq 0$ , dann genügen die Grössen  $A_i$  ebenfalls der Ungleichung  $A_1 A_3 \leqq A_2^2$ , so dass entsprechend

$$\frac{M(3, A_i A_{i+1})}{M(3, A_i)} \geqq (\prod A_i)^{1/3}$$

ist. Somit wird

$$\frac{M(n, a_i a_{i+1})}{M(n, a_i)} = \left[ \frac{M(3, A_i A_{i+1})}{M(3, A_i)} \right]^{3/n} \geqq (\prod A_i)^{1/n} = (\prod a_i)^{1/3},$$

also  $q(n) \geqq \frac{2F}{\prod a_i} (\prod a_i)^{1/3} = q(0)$ ,

für  $n \geqq 0$  und wegen (1) sogar für alle  $n$ . Es gilt also  $q(0) \leqq q(n) \leqq q(\infty)$  für alle  $n$ , falls  $a_1 a_3 \leqq a_2^2$ .

Ist dagegen  $a_1 a_3 \geqq a_2^2$ , dann lässt sich analog zeigen, dass  $q(0) \geqq q(n) \geqq q(\infty)$  ist für alle  $n$ . Jedenfalls gilt also  $\alpha \leqq q(n) \leqq \beta$  mit  $\alpha = \text{Min}[q(0); q(\infty)]$  und  $\beta = \text{Max}[q(0); q(\infty)]$ , q. e. d.

Wir ziehen nun noch eine Folgerung aus dem eben bewiesenen Satz, indem wir die bekannte Ungleichung

$$2F \leqq \frac{1}{2} \sqrt[3]{(\prod a_i)^{2/3}}$$

heranziehen. Daraus folgt zunächst  $\beta \leqq \text{Max}[1; (\prod a_i)^{2/3} (\text{Max } a_i \text{ Min } a_i)^{-1}] \sqrt[3]{2}$ . Wenn nun  $a_2^2 \leqq a_1 a_3$  ist, das heisst, wenn die «mittlere» Dreiecksseite höchstens gleich dem geometrischen Mittel der beiden extremen Dreiecksseiten ist, dann ist  $(\prod a_i)^{2/3} (\text{Max } a_i \text{ Min } a_i)^{-1} \leqq 1$  und damit  $\beta \leqq \sqrt[3]{2}$ . Für solche Dreiecke gilt also die Ungleichung  $M(n, h_i) \leqq M(n, a_i) \sqrt[3]{2}$  für jedes reelle  $n$ . O. REUTTER, Ochsenhausen

### Kleiner Beitrag zur elementaren Dreiecksgeometrie

Als Mittelschullehrer muss man sich immer wieder wundern, dass einfachste Grössenverhältnisse im Dreieck nicht bekannt zu sein scheinen. So sollen in dieser Note zwei Sachverhalte zur Sprache kommen, welche erneut<sup>1)</sup> die Diskrepanz zwischen den Winkel- und Seitenhalbierenden aufzeigen.

Als erstes behaupten wir:

Das Quadrat über dem halben Umfang ist *mindestens* so gross wie die Quadratsumme der Winkelhalbierenden, aber *höchstens* so gross wie diejenige der Seitenhalbierenden:

$$\sum w_i^2 \leqq s^2 \leqq \sum m_i^2. \quad (1)$$

<sup>1)</sup> Vgl. dazu unter anderem F. LEUENBERGER, Zum Mordellschen Beweis einer Ungleichung von ERDÖS, El. Math. 17 (1962), 15–17.

Der erste Teil von (1) wurde in anderem Zusammenhang<sup>2)</sup> bewiesen, der zweite kann auch einfach nachgewiesen werden. Es seien  $a_i$  die Dreiecksseiten und  $M_k(x)$  bedeute das  $k$ -te Potenzmittel der Größen  $x_i$ . Dann gilt

$$\sum m_i^2 = \frac{3}{4} \sum a_i^2 = \frac{9}{4} M_2^2(a) \geq \frac{9}{4} M_k(a)$$

für  $k < 2$  mit Gleichheit nur im gleichseitigen Dreieck. Speziell also

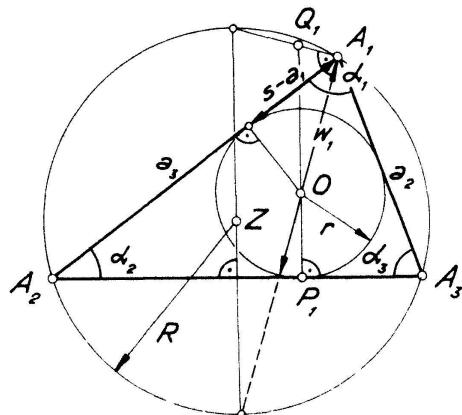
$$\sum m_i^2 \geq \frac{9}{4} M_1^2(a) = s^2.$$

Etwas weiter ausholen müssen wir, um folgenden Tatbestand einzusehen:

Das arithmetische Mittel der Winkelhalbierenden ist höchstens so gross wie die Summe aus Um- und Inkreisradius, das heisst

$$M_1(w) \leq R + r. \quad (2)$$

Die Seitenhalbierenden können nicht an die Stelle der Winkelhalbierenden gesetzt werden! Strebt nämlich die Basis eines gleichschenkligen Dreiecks bei konstanter Schenkellänge gegen 0, so kann  $M_1(m)$  beliebig nahe an  $R + R/3$  herangebracht werden, während  $r$  im Grenzfall verschwindet. Die Abschätzung (2) ist eine Verschärfung von  $\sum w_i \leq 4R + r$ , einer Formel, welche die «Stellvertretung» noch gestattet<sup>3)</sup> hat.



*Beweis von (2):*

Der Figur entnimmt man  $\angle A_1 O Q_1 = (\alpha_3 - \alpha_2)/2$  und ersichtlich gilt

$$w_1 \leq \overline{P_1 Q_1} = r + \frac{\overline{O A_1}}{\cos \frac{\alpha_3 - \alpha_2}{2}}. \quad (a)$$

Geläufige Überlegungen liefern

$$\frac{\overline{O A_1}}{\cos \frac{\alpha_3 - \alpha_2}{2}} = \frac{4R}{a_2 + a_3} \sqrt{\frac{a_2 a_3 (s - a_1)}{s}} \cos \frac{\alpha_1}{2},$$

was wegen der Ungleichung zwischen dem geometrischen und arithmetischen Mittel höchstens

$$2R \sqrt{\frac{s - a_1}{s}} \cos \frac{\alpha_1}{2} = 2R \sqrt{\tan \frac{\alpha_2}{2} \tan \frac{\alpha_3}{2} \cos \frac{\alpha_1}{2}}$$

betragen kann.

<sup>2)</sup> F. LEUENBERGER, Bemerkung zu zwei Arbeiten von A. MAKOWSKI und J. BERKES, dieses Heft S. 33.

<sup>3)</sup> F. LEUENBERGER, Gegensätzliches Verhalten der arithmetischen und geometrischen Mittel, El. Math. 16 (1961), 127-129.

Nochmalige Anwendung dieser Ungleichung führt zu

$$\begin{aligned} 2 R \sqrt{\operatorname{tg} \frac{\alpha_2}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha_3}{2} \cos \frac{\alpha_1}{2}} &= \frac{R}{6} \sqrt{18 \operatorname{tg} \frac{\alpha_2}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha_3}{2} \cdot 2 \sqrt{2} \cos \frac{\alpha_1}{2}} \\ &\leq \frac{R}{6} \left( 9 \operatorname{tg} \frac{\alpha_2}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha_3}{2} + 4 \cos^2 \frac{\alpha_1}{2} \right). \end{aligned} \quad (\text{b})$$

Wird (b) in (a) eingesetzt und addiert man die entsprechenden Resultate für  $w_2$  und  $w_3$ , so gewinnt man

$$\sum w_i \leq 3r + R \left[ \frac{3}{2} \left( \sum_{i<1} \operatorname{tg} \frac{\alpha_i}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha_j}{2} \right) + \frac{2}{3} \sum \cos^2 \frac{\alpha_i}{2} \right];$$

Hieraus folgt wegen

$$\sum_{i<1} \operatorname{tg} \frac{\alpha_i}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha_j}{2} \equiv 1 \text{ für } \sum_1^3 \alpha_i = \pi$$

und

$$\sum \cos^2 \frac{\alpha_i}{2} = \frac{r+4R}{2R}$$

vorerst

$$\sum w_i \leq 3r + \frac{3}{2}R + \frac{r+4R}{3}.$$

Ersetzt man im dritten Summanden  $r$  noch durch den mindestens so grossen Ausdruck  $R/2$ , so ist der Beweis von (2) abgeschlossen. In (a) gilt Gleichheit für alle  $w_i$  nur, wenn  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$ , in (b) herrscht sie simultan genau dann, wenn  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$ . Bekanntlich gilt auch  $r = R/2$  nur im gleichseitigen Dreieck.

Zur Schärfe von  $\sum w_i \leq 3R + 3r$  darf festgestellt werden, dass bei ganzzahligen, positiven Koeffizienten von  $R$  und  $r$  keine bessere Abschätzung (von oben) gefunden werden kann. Dass  $2R + 5r$  unsinnig wäre, dokumentieren wir etwa so, dass wir die Gegenecke einer festen Dreiecksseite gegen den Mittelpunkt derselben konvergieren lassen:  $\sum w_i \rightarrow 8R/3$  bei  $r \rightarrow 0$ .

F. LEUENBERGER, Feldmeilen

### Sums of Products of Multinomial Coefficients

The familiar formula for the sum of the squares of the binomial coefficients of a given order

$$\sum_{r=0}^n \binom{n}{r}^2 = \binom{2n}{n} \quad (1)$$

suggests that it may be possible to find similar results for the multinomial coefficients.

Put

$$(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{(n_1 + n_2 + \dots + n_k)!}{n_1! n_2! \dots n_k!}.$$

We consider first the sum

$$S_{n,3} = \sum_{r+s+t=n} (r, s, t)^2.$$

Clearly

$$\begin{aligned} S_{n,3} &= \sum_{r+s \leq t} \left( \frac{n!}{r! s! (n-r-s)!} \right)^2 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 \sum_{r=0}^k \binom{k}{r}^2 \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 \binom{2k}{k} = \sum_{k=0}^n \frac{(-n)_k (-n)_k (1/2)_k}{k! k! k!} 2^{2k-1}, \end{aligned}$$

<sup>1)</sup>  $(a)_k = a(a+1)\dots(a+k-1)$ .

so that

$$S_{n,3} = {}_3F_2 \left[ \begin{matrix} -n, -n, 1/2; 4 \\ 1, 1 \end{matrix} \right] \quad (2)$$

in the usual notation of generalized hypergeometric series<sup>2)</sup>.

In the next place we have

$$\begin{aligned} S_{n,4} &= \sum_{r+s+t+u=n} (r, s, t, u)^2 = \sum_{j+k=n} \sum_{r+s=j} \sum_{t+u=k} (r, s, t, u)^2 \\ &= \sum_{i+k=n} \binom{n}{j}^2 \sum_{r+s=j} \binom{j}{r}^2 \sum_{t+u=k} \binom{k}{t}^2 = \sum_{j+k=n} \binom{n}{j}^2 \binom{2j}{j} \binom{2k}{k} \\ &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j}^2 \binom{2j}{j} \binom{2n-2j}{n-j} = \binom{2n}{n} \sum_{j=0}^n \frac{(-n)_j (-n)_j}{j! j!} \frac{(1/2)_j}{j!} \frac{(-n)_j}{(1/2-n)_j}, \end{aligned}$$

so that

$$S_{n,4} = \binom{2n}{n} {}_4F_3 \left[ \begin{matrix} -n, -n, -n, 1/2; \\ 1, 1, 1/2-n \end{matrix} \right]. \quad (3)$$

It does not seem possible to sum the hypergeometric series occurring in the right members of (2) and (3). If however we modify the sum somewhat, more satisfactory results can be obtained.

Since

$$(x+y+z)^n = \sum_{r+s+t=n} (r, s, t) x^r y^s z^t, \quad (x+y+z)^{2n} = \sum_{r'+s'+t'=2n} (r', s', t') x^{r'} y^{s'} z^{t'}$$

it follows by taking the product that

$$(n, n, n) = \sum (r, s, t) (r', s', t'),$$

where the summation is over all non-negative  $r, s, t, r', s', t'$  such that

$$r+s+t=n, \quad r'+s'+t'=2n, \quad r+r'=s+s'=t+t'=n.$$

We therefore get

$$\sum_{r+s+t=n} (r, s, t) (n-r, n-s, n-t) = (n, n, n). \quad (4)$$

In the next place if we take the product of the expansions of

$$(x+y+z+w)^n, \quad (x+y+z+w)^{2n}$$

we find similarly that

$$\sum_{r+s+t+u=n} (r, s, t, u) (n-r, n-s, n-t, n-u) = (n, n, n, n). \quad (5)$$

If however we take the product of  $(x+y+z+w)^{2n}, (x+y+z+w)^{2n}$  we get

$$\sum_{r+s+t+u=2n} (r, s, t, u) (n-r, n-s, n-t, n-u) = (n, n, n, n). \quad (6)$$

It is now clear how to obtain the following general formula. Let  $k \geq 1$  and  $1 \leq r \leq k-1$  and consider the product of the multinomial expansions of

$$(x_1 + \dots + x_k)^{rn}, \quad (x_1 + \dots + x_k)^{(k-r)n}.$$

<sup>2)</sup> W. N. BAILEY, *Generalized hypergeometric series*, Cambridge, 1935.

Then

$$\sum_{s_1 + \dots + s_k = rn} (s_1, \dots, s_k) (n - s_1, \dots, n - s_k) = (n, \dots, n) = \frac{(k \cdot n)!}{(n!)^k}. \quad (7)$$

For  $k = 2, r = 1$ , (7) reduces to (1).

As an example of a slightly different formula that can be proved in a similar way we mention

$$\sum_{s_1 + \dots + s_k = kn} (s_1, \dots, s_k) (m + n - s_1, \dots, m + n - s_k) = (m + n, \dots, m + n). \quad (8)$$

The formula

$$\sum_{s_1 + \dots + s_k = rn + (k - r)m} (s_1, \dots, s_k) (m + n - s_1, \dots, m + n - s_k) = (m + n, \dots, m + n), \quad (9)$$

where  $0 \leq r \leq k$ , includes both (7) and (8).

We may also state the formula

$$\sum (s_1, \dots, s_k) (m_1 + n_1 - s_1, \dots, m_k + n_k - s_k) = (m_1 + n_1, \dots, m_k + n_k), \quad (10)$$

where the summation is over all non-negative  $s_1, \dots, s_k$  such that

$$s_1 + \dots + s_k = n_1 + \dots + n_k.$$

Returning to

$$S_{n,3} = \sum_{r+s+t=n} (r, s, t)^2$$

it is evident that  $S_{n,3}$  is the coefficient of  $x^n y^n z^n$  in the expansion of

$$(x + y + z)^n (y z + z x + x y)^n = (3 x y z + \sum x^2 y)^n.$$

If we let  $T_{n,3}$  denote the coefficient of  $x^n y^n z^n$  in the expansion of

$$(\sum x^2 y)^n = (x^2 y + x y^2 + x^2 z + x z^2 + y^2 z + y z^2)^n,$$

it follows that

$$S_{n,3} = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} 3^{n-r} T_{r,3}. \quad (11)$$

Similarly

$$S_{n,4} = \sum_{r+s+t+u=n} (r, s, t, u)^2$$

is the coefficient of  $(x y z w)^n$  in the expansion of

$$(x + y + z + w)^n (y z w + x z w + x y w + x y z)^n = (4 z y x w + \sum x^2 y z)^n.$$

If  $T_{n,4}$  denotes the coefficient of  $(x y z w)^n$  in the expansion of  $(\sum x^2 y z)^n$  it follows that

$$S_{n,4} = \sum_{r=0}^u \binom{n}{r} 4^{n-r} T_{r,4}. \quad (12)$$

The general formula of this kind can be stated without difficulty.

We remark that it follows from the identity

$(x + w y + w^2 z) (x + w^2 y + w z) = (x + y + z)^2 - 3 (y z + z x + x y)$ ,  $(w^2 + w + 1 = 0)$   
that

$$\begin{aligned} \sum_{s' \leq s, t' \leq t} (n - s - t, s, t) (n - s' - t', s', t') (s + t + s' + t', n - s - s', n - t - t') \\ = 3 S_{n,3} - (n, n, n). \end{aligned} \quad (13)$$