

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 18 (1963)
Heft: 2

Rubrik: Ungelöste Probleme

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

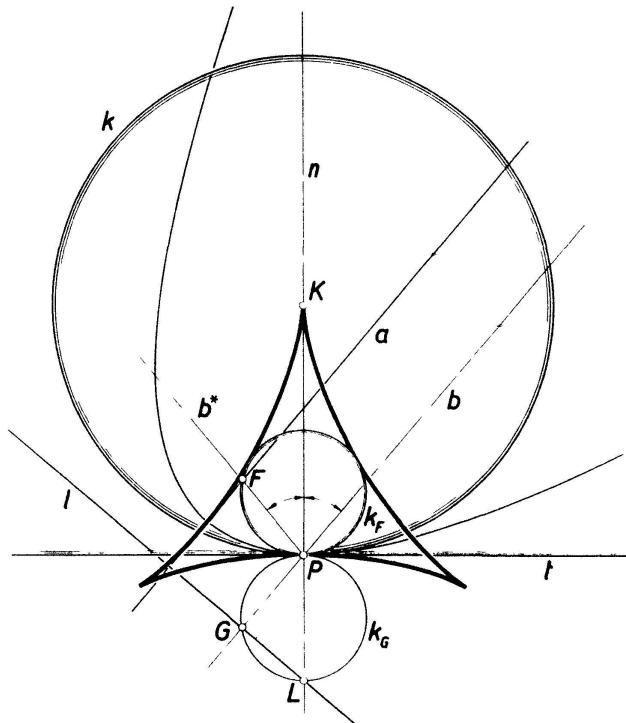
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 23.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>



Mit der Wahl der Achsenrichtung durch den Brennstrahl $b = [GP]$ ist jeweils eine Parabel der Oskulationsschar bestimmt. Die Parabelachse a können wir nun nach der folgenden Vorschrift \mathfrak{B} finden:

Durch Spiegelung des Brennstrahles b an der Kurvennormalen n im Punkte P erhalten wir den zweiten Brennstrahl b^* , der den Kreis k_F im Brennpunkt F schneidet. Die Parabelachse a ist die durch F gehende Parallelle zu b .

Damit ist aber bereits gezeigt, dass die Parabelachsen a eine dreispitzige Hypozykloide einhüllen. Lassen wir nämlich die Gerade b das Büschel $P(b)$ durchlaufen, so stimmt die Vorschrift \mathfrak{B} mit der von H. SCHRÖTER stammenden Definition dieser Kurve überein (vgl. [3]).

W. KICKINGER, Wien

LITERATURHINWEISE

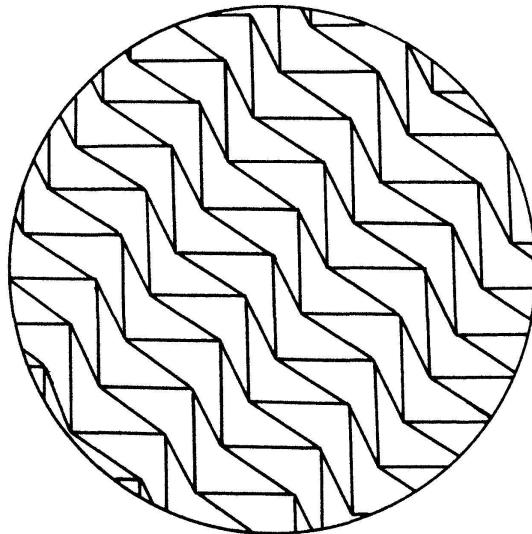
- [1] F. LAURENTI, *Sopra una proprietà dell'ipocicloide tricuspidata*, Periodico Mat. IV. Ser. 38 (1960), 155–158.
- [2] F. LAURENTI, *Sopra una proprietà dell'ipocicloide tricuspidata*, Archimede 12 (1960), 253–256.
- [3] H. SCHRÖTER, *Über die Erzeugung krummer projektivischer Gebilde*, CRELLE-J. 54 (1857), 31.

Ungelöste Probleme

Nr. 45. Es sei $n \geq 2$ und P ein kompaktes Polyeder des n -dimensionalen euklidischen Raumes, und es sei möglich, den ganzen Raum mit abzählbar unendlich vielen mit P kongruenten Polyedern zu parkettieren. Unter einer Parkettierung verstehen wir eine Überdeckung des Raumes durch Polyeder, die paarweise höchstens Randpunkte gemeinsam haben. Gitterförmige Anordnung der Polyeder ist in unserem Fall nicht verlangt. Im Gegensatz zu der innerhalb des vorliegenden Problemkreises in der Regel üblichen Einschränkung braucht P nicht notwendigerweise konvex zu sein und darf auch als unzusammenhängend angenommen werden. Unsere Abbildung

zeigt eine Parkettierung der Ebene mit nichtkonvexen Vierecken. – Es scheint nun, dass der folgende Satz gilt:

Ein Polyeder P mit der Parkettierungseigenschaft ist im Sinne der Elementargeometrie zerlegungsgleich mit einem Würfel W .



Zwei Polyeder A und B heissen im Sinne der Elementargeometrie zerlegungsgleich, geschrieben $A \sim B$, wenn sie elementargeometrisch in gleich viele und paarweise kongruente Teilpolyeder zerlegt werden können.

Für das Bestehen der oben vermuteten Zerlegungsgleichheit $P \sim W$ gibt es in der Tat zahlreiche Indizien. So trifft sie insbesondere in verschiedenen Sonderfällen zu. Ist $n = 2$, so ist der Satz trivial richtig, da nach einem altbekannten Sachverhalt flächengleiche Polygone stets zerlegungsgleich sind, so dass insbesondere jedes Polygon mit einem Quadrat zerlegungsgleich ist. Für $n = 3$ ist besonders im Fall der Raumparkettierung mit translationsgleichen konvexen Polyedern viel bekannt. Unter einem Paralleloloeder versteht man hier ein konkaves Polyeder, das die Eigenschaft besitzt, eine Parkettierung des Raumes zu ergeben, wenn man translationsgleiche Exemplare längs übereinstimmender Seitenflächen aneinander legt¹⁾. Nach klassischen Ergebnissen von H. MINKOWSKI²⁾ und B. N. DELAUNAY³⁾ sind die Paralleloloeder totalsymmetrisch, das heißt sie und alle ihre Seitenflächen weisen Zentralsymmetrie auf. Es gibt bekanntlich fünf Paralleloloedertypen. Kürzlich hat H. S. M. COXETER eine kurze Herleitung dieser Typen gegeben⁴⁾. Die folgende Tafel enthält zu jedem Typ einen besonderen Vertreter:

| Typ | Polyeder | Berandung |
|-----|--------------------------------|--------------------------|
| 1 | Würfel | 6 Quadrate |
| 2 | Sechseckiges Prisma | 2 Sechsecke; 6 Rechtecke |
| 3 | Rhombendodekaeder | 12 Rhomben |
| 4 | Verlängertes Rhombendodekaeder | 4 Sechsecke; 8 Rhomben |
| 5 | Kubooktaeder (Koloktaeder) | 8 Sechsecke; 6 Quadrate |

¹⁾ Vgl. hierzu A. D. ALEXANDROW, *Konvexe Polyeder*; Akademie Verlag, Berlin 1958, Kap. 8, S. 308–317.

²⁾ *Dichteste gitterförmige Lagerung kongruenter Körper*. Ges. Abh. Leipzig-Berlin 1911, Bd. 2, S. 3–42.

³⁾ *Sur la théorie des paralléloèdres*. Comptes Rendus Acad. Sci. Paris 183, 464–467, 1926.

⁴⁾ *The classification of zonohedra by means of projective diagrams*; Vortrag an der Tagung über diskrete Geometrie in Oberwolfach im Sommer 1962.

Für diese fünf Polyeder lässt sich die Zerlegungsgleichheit mit Würfeln direkt bestätigen. Allgemeiner gilt für beliebige totalsymmetrische konvexe Polyeder des gewöhnlichen Raumes, dass diese mit Würfeln sogar translativ-zerlegungsgleich sind, so dass die Teilpolyeder, welche die Zerlegungsgleichheit realisieren, nicht nur kongruent, sondern sogar translationsgleich sind⁵⁾. Im Falle $n > 3$ scheinen verwinkeltere Verhältnisse vorzuliegen. Allgemein für $n \geq 2$ gültige und weitergreifende Resultate hat kürzlich H. GROEMER gewonnen⁶⁾. Er zeigte, dass bei einer Parkettierung des Raumes durch gleichmässig beschränkte Polyeder, die mit einem konvexen Polyeder P lediglich homothetisch sind, wieder auf die Zentralsymmetrie von P selbst und seiner Seitenflächen geschlossen werden kann. Ob hier im Falle $n > 3$ noch die translativen Zerlegungsgleichheit von P mit einem Würfel W besteht, ist fraglich. Herrn GROEMER verdanken wir den Hinweis⁷⁾, dass schon DELAUNAY vierdimensionale konvexe Polyeder angegeben hat, welche die Parkettierungseigenschaft aufweisen und deren zweidimensionale Kanten Dreiecke sind. Vgl. hierzu auch eine Vermerkung von COXETER⁸⁾. Diese Tatsache zeigt, dass die höher dimensionalen Paralleloteder nicht in dem Sinne totalzentralsymmetrisch sind, dass die Kanten aller Dimensionen diese gleiche Symmetrie besitzen, wie der Unterzeichnete fälschlicherweise annahm.

Bei dem hier vorgelegten Problem handelt es sich nun darum zu entscheiden, ob der oben formulierte Satz betreffend die Zerlegungsgleichheit von Parkettierungspolyedern mit Würfeln richtig ist oder nicht. H. HADWIGER

Kleine Mitteilungen

Einige Dreiecksungleichungen

Bei $i = 1, 2, 3$ seien a_i, h_i, m_i und α_i die Seiten, Höhen, Schwerelinien und Winkel eines Dreiecks mit r und R als In- und Umkreisradius. Es gilt die Abschätzung

$$\frac{\sqrt{3}}{R} \leqq \sum_{i=1}^3 \frac{1}{a_i} \leqq \frac{\sqrt{3}}{2r} \quad (1)$$

von KUBOTA [1]⁹⁾ (linke Seite)/LEUENBERGER [2] (rechte Seite). Letzterer gab in Amer. Math. Monthly 1960, S. 692, erstmals

$$M_1(h) \leqq \frac{\sqrt{3}}{2} M_1(a) \quad (2)$$

an. $M_k(x)$ bedeutet das k -te Potenzmittel der Grössen x_i , und (2) ist der rechten Seite von (1) äquivalent. Schliesslich zeigte MAKOWSKI [3], dass

$$\left. \begin{aligned} M_k(h) &\leqq \frac{\sqrt{3}}{2} M_k(a) \\ M_{-k}(h) &\leqq \frac{\sqrt{3}}{2} M_{-k}(a) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

und

⁵⁾ Vgl. hierzu H. HADWIGER, *Mittelpunktpolyeder und translativen Zerlegungsgleichheit*; Math. Nachr. 8, 53–58, 1953.

⁶⁾ Über Zerlegungen des euklidischen Raumes; Math. Z. 79, 364–375, 1962.

⁷⁾ Brief vom 26. 10. 1962.

⁸⁾ J. de Math. 41, 125, 1962.

⁹⁾ Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 33.