Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 18 (1963)

Heft: 2

Artikel: Einfacher Beweis eines Satzes von F. Laurenti über die Parabeln mit gemeinsamem Krümmungselement

Autor: Kickinger, W.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-22634

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 04.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Cas général. – Supposons la conique L donnée dans un système d'axes rectangulaires, par l'équation: $\varphi(x, y) = A\,x^2 + 2\,B\,x\,y + C\,y^2 + D\,x + E\,y + F = 0$. On sait qu'on peut toujours trouver, à l'aide d'une translation et d'une rotation, un système d'axes $O\,x$, $O\,y$ tels que l'on ait $\varphi(x, y) \equiv K\,f(x', y')$; identité dans laquelle on suppose que $f(x', y') = 0$ est l'équation canonique de L. Le calcul donne deux valeurs possibles $\frac{1}{2}\left(A + C \pm \sqrt{(A - C)^2 + 4\,B^2}\right)$ de la constante K, et une discussion est nécessaire pour déterminer celle de ces valeurs qui convient. Supposons que K ait été ainsi choisi, et désignons par x_0', y_0' les coordonnées du point P dans le système $x'\,y'$. On sait que la puissance p de P vaut $f(x_0', y_0')$. D'autre part, $f(x_0', y_0') = \varphi(x_0, y_0)/K$. On a donc finalement la formule $p = \varphi(x_0, y_0)/K$ qu'on pourra utiliser dans les applications. Par exemple, le lieu des points d'égale puissance par rapport à deux coniques $\varphi_1(x, y) = 0$, et $\varphi_2(x, y) = 0$, est la courbe $\varphi_1(x, y)/K_1 = \varphi_2(x, y)/K_2$. C'est une nouvelle conique qui appartient au faisceau des deux premières.

Remarquons qu'il serait aisé de généraliser la définition donnée au début de la puissance d'un point par rapport à la courbe L, afin de l'étendre au cas où cette courbe est algébrique et de degré quelconque.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. HAUSSNER, *Analytische Geometrie der Ebene.* Sammlung Göschen Bd. 65, W. de Gruyter, Berlin und Leipzig 1934.

[2] G. SALMON, *Géométrie analytique à deux dimensions,* 3ème édition, p. 161. Gauthier-Villars. Paris.

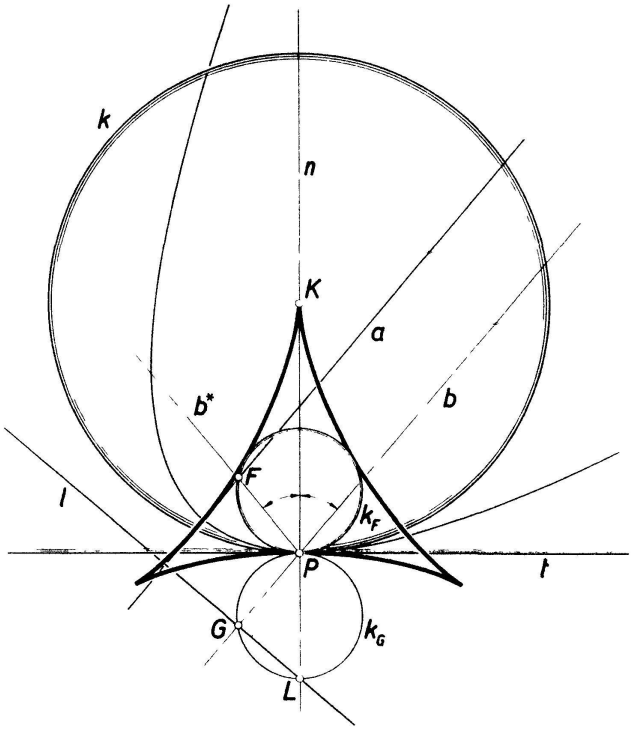
Einfacher Beweis eines Satzes von F. LAURENTI über die Parabeln mit gemeinsamem Krümmungselement

F. LAURENTI stellt die Frage nach der Hüllkurve der Achsen aller Parabeln, die ein Krümmungselement gemeinsam haben; und findet eine dreispitzige Hypozykloide (Steinerzykloide) als Lösungskurve (vergleiche [1][1]) und [2]).

Dem von LAURENTI rein analytisch geführten Beweis soll hier ein synthetischer zur Seite gestellt werden; darüber hinaus wird gezeigt, dass die (eigentlichen) Brennpunkte der Parabeln auf einem Kreis liegen, der den vorgegebenen Krümmungskreis k im Oskulationspunkt von innen berührt und dessen Durchmesser gleich dem halben Radius von k ist.

Ist K die Krümmungsmitte eines beliebigen Punktes P einer Parabel und L der Schnittpunkt der Kurvennormalen in P mit der Leitlinie, dann gilt bekanntlich die Relation $2\overline{LP} = \overline{PK}$. Die Leitlinien l aller ∞^1 Parabeln mit dem gemeinsamen Krümmungselement (P, K) bilden daher das Büschel mit dem Scheitel L. Die Normalprojektionen G des Oskulationspunktes P auf die Geraden des Büschels $L(l)$ liegen auf dem Kreis k_G mit dem Durchmesser $\overline{PL}$. Diese Punkte G sind aber für die betrachteten Parabeln die Gegenpunkte der Brennpunkte F bezüglich der (festen) Tangente t im Punkte P. Die Brennpunkte F erfüllen somit den Kreis k_F, der durch orthogonale Spiegelung des Kreises k_G an t hervorgeht.

[1]) Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 29.



Mit der Wahl der Achsenrichtung durch den Brennstrahl $b = [GP]$ ist jeweils eine Parabel der Oskulationsschar bestimmt. Die Parabelachse a können wir nun nach der folgenden Vorschrift $\mathfrak{V}$ finden:

Durch Spiegelung des Brennstrahles b an der Kurvennormalen n im Punkte P erhalten wir den zweiten Brennstrahl b^*, der den Kreis k_F im Brennpunkt F schneidet. Die Parabelachse a ist die durch F gehende Parallele zu b.

Damit ist aber bereits gezeigt, dass die Parabelachsen a eine dreispitzige Hypozykloide einhüllen. Lassen wir nämlich die Gerade b das Büschel $P(b)$ durchlaufen, so stimmt die Vorschrift $\mathfrak{V}$ mit der von H. SCHRÖTER stammenden Definition dieser Kurve überein (vgl. [3]). W. KICKINGER, Wien

LITERATURHINWEISE

[1] F. LAURENTI, *Sopra una proprietá dell'ipocicloide tricuspidata*, Periodico Mat. IV. Ser. *38* (1960), 155–158.
[2] F. LAURENTI, *Sopra una proprietá dell'ipocicloide tricuspidata*, Archimede *12* (1960), 253–256.
[3] H. SCHRÖTER, *Über die Erzeugung krummer projektivischer Gebilde*, CRELLE-J. *54* (1857), 31.

Ungelöste Probleme

Nr. 45. Es sei $n \geqq 2$ und P ein kompaktes Polyeder des n-dimensionalen euklidischen Raumes, und es sei möglich, den ganzen Raum mit abzählbar unendlich vielen mit P kongruenten Polyedern zu parkettieren. Unter einer Parkettierung verstehen wir eine Überdeckung des Raumes durch Polyeder, die paarweise höchstens Randpunkte gemeinsam haben. Gitterförmige Anordnung der Polyeder ist in unserem Fall nicht verlangt. Im Gegensatz zu der innerhalb des vorliegenden Problemkreises in der Regel üblichen Einschränkung braucht P nicht notwendigerweise konvex zu sein und darf auch als unzusammenhängend angenommen werden. Unsere Abbildung