

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 18 (1963)  
**Heft:** 1

**Rubrik:** Literaturüberschau

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 11.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Literaturüberschau

*Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff.* Von FRIEDRICH BACHMANN. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. 96. XIII und 310 Seiten mit 160 Abbildungen. Fr. 53.55. Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1959.

Nachdem F. KLEIN den Gruppenbegriff als ordnendes Prinzip in der Geometrie eingeführt hat, kommt seit der Jahrhundertwende bei der Erforschung der metrischen Gruppen ein neuer Gedanken hinzu. H. WIENER und J. HJELMSLEV stellten fest, dass die geometrisch interessanten Struktureigenschaften der Kongruenzgruppen weniger durch ihre kontinuierlichen Untergruppen, als vielmehr durch das Verhalten ihrer involutorischen Elemente zum Ausdruck gebracht werden. In der ebenen Geometrie sind dies die Punkt- und Geradenspiegelungen; diese einfachen Abbildungstypen stehen in enger Beziehung zu den geometrischen Grundelementen Punkt und Gerade.

In neuester Zeit erfuhr die Spiegelungsgeometrie eine wesentliche Förderung; die profiliertesten Beiträge stammen von G. THOMSEN, F. SCHUR, G. HESSENBERG, K. REIDEMEISTER und vor allem von F. BACHMANN. Bereits HJELMSLEV machte die Entdeckung, dass die Bewegungsgruppen der euklidischen und der beiden nichteuklidischen Geometrien auf ein Axiomensystem abgestützt werden können, das den Begriff der Spiegelung als wesentlichen Bestandteil enthält. Durch die spätere Aufnahme der Anordnungsaxiome tritt dabei eine auffällig breite gemeinsame Basis der drei Geometrien zu Tage. BACHMANN nennt diese Basis die absolute Geometrie. Das vorliegende Standardwerk zur Spiegelungsgeometrie behandelt die Axiomatik der absoluten Geometrie und ihrer wichtigsten, durch geeignete Zusatzaxiome abgesonderten Spezialfälle. Daneben zeigt das Buch noch einen zweiten Aspekt der Spiegelungsgeometrie. Durch die Aufspaltung der Gruppenelemente in Produkte von Spiegelungen lässt sich der Descarteschen Methode des Koordinatenrechnens ein ebenbürtiges Beweis- und Rechenverfahren auf gruppenalgebraischer Basis zur Seite stellen. Wegen der Willkürlichkeit des Koordinatensystems verwendet die analytische Geometrie ein Zuviel an Rechengrößen, das hinterher durch eine Invariantentheorie wieder weggeschafft werden muss. Demgegenüber treten beim Spiegelungskalkül keine überzähligen Elemente auf; geometrische Konfigurationen zeichnen sich unmittelbar in invarianten Gruppenrelationen für die zugeordneten Spiegelungen ab.

Das ausgezeichnet abgefasste Buch BACHMANNS wendet sich vor allem an den Wissenschaftler; es hat aber auch dem Elementargeometer wichtiges zu sagen. Bei der Neuorientierung des Geometrieunterrichtes steht ja heute das Axiomensystem der Spiegelungsgeometrie im Hintergrund und zudem wird das Rechnen mit Abbildungen als Beweisverfahren auf der Oberstufe mehr und mehr gepflegt. Zum letztgenannten Gegenstand gibt der Verfasser eine Vielzahl von Beispielen und Anregungen.

Mit BACHMANNS Spiegelungsgeometrie besteht nun endlich eine zusammenfassende Publikation über diesen neueren Zweig geometrischen Schaffens. M. JEGER

*Vorlesungen über höhere Mathematik.* Von ADALBERT DUSCHEK. Band IV. 335 Seiten mit 49 Textabbildungen. Fr. 53.20. Springer-Verlag, Wien 1961.

Kürzlich ist der mit Spannung erwartete vierte Band erschienen, der die «Vorlesungen über höhere Mathematik» abschliesst. Damit liegt das gesamte Werk vor, das bei aller Betonung der Anwendungen auf Physik und Technik keine Konzessionen macht hinsichtlich klarer Formulierung der mathematischen Probleme, ausführlicher Klärung der grundlegenden Begriffe und strenger Beweisführung in beachtlicher Allgemeinheit. In der Stoffauswahl kommen die praktischen Bedürfnisse zur Geltung, in diesem Band besonders durch die ausführliche Behandlung der Laplacetransformation und von Randwertproblemen. Zu Beginn grösserer Abschnitte findet man meistens kurze, aber treffende Vorbemerkungen. Sie erinnern an frühere theoretische Untersuchungen, machen dem Leser mit wenigen Worten die praktische Bedeutung des neuen Artikels klar und führen ihn mitten in den mathematischen Problemkreis, so dass auch Interessenten, welche die Mathematik als Hilfsfach benötigen, sich angesprochen fühlen und leicht Kontakt finden. Überhaupt

zeigen die vielen eingeflochtenen Hinweise über vorteilhafte Ansätze und Warnungen vor ungünstigen Rechnungsweisen den erfahrenen Lehrer.

Im vorliegenden Band kommen zuerst als Ergänzungen zur Analysis der Integralbegriff von STIELTJES, asymptotische Entwicklungen und orthogonale Funktionensysteme zur Behandlung. Man hätte sich hier eine kurze Einführung des Integralbegriffes von LEBESGUE gewünscht. Breiten Raum beanspruchen Integralgleichungen und die Laplace-transformation, die für den Ingenieur eine steigende praktische Bedeutung erlangt hat. Eine ausführliche Besprechung erfahren Randwertprobleme gewöhnlicher Differentialgleichungen mit Einbezug der Kugel-, Legendre-, Bessel- und einiger weiterer spezieller Funktionen. Ein Überblick über die Potentialtheorie und ihre Randwertprobleme beschliessen diesen Band. Es sind wieder Übungsaufgaben eingestreut, die für das Selbststudium wertvoll sind.

Das ganze nun abgeschlossene Werk zeichnet sich aus durch eine übersichtliche Gliederung des Stoffes, eine klare Ausdrucksweise und eine geschickte Wahl von erläuternden Beispielen. Diese Vorzüge empfehlen das Werk und haben ihm bereits zu einer grossen Verbreitung verholfen.

A. HÄUSERMANN

*Fundamentals of Mathematics.* Von E. P. VANCE. 469 Seiten mit 148 Figuren. \$ 7.50. Addison-Wesley Publishing Company, Reading/Mass. und London 1960.

Dieses Textbuch führt den Leser von den elementaren algebraischen Operationen bis zu den Elementen der Differential- und Integralrechnung. Daneben wird auch die Trigonometrie und die analytische Geometrie etwa in dem Ausmass behandelt, das für einen modernen mathematischen Mittelschul-Lehrplan wünschenswert ist. Kleinere Kapitel orientieren über Determinanten, komplexe Zahlen und Permutationen. Das Schwergewicht liegt auf der Funktionenlehre (ganze rationale Funktionen, Kreis- und Arcusfunktionen, Exponentialfunktion und Logarithmus). Die Darstellung ist bemerkenswert klar und ansprechend, so dass das Werk sich auch sehr gut zum Selbststudium eignet. Für die Hälfte der zahlreichen Übungsaufgaben sind die Lösungen angegeben.

E. TROST

*Algebraical and Topological Foundations of Geometry.* Proceedings of a Colloquium held in Utrecht, August 1959. VII et 208 pages. 70 s. Pergamon Press, Oxford 1962.

On lira avec intérêt le compte-rendu du Colloque sur les fondements algébriques et topologiques de la Géométrie organisé, sur l'initiative de l'Union Mathématique Internationale, à Utrecht en août 1959 par M. HANS FREUDENTHAL au nom de la Société mathématique Néerlandaise. M. FREUDENTHAL relève de façon fort pertinente dans sa préface que la méthode axiomatique – instrument indispensable et facteur d'unification des mathématiques modernes – tire son origine des Fondements de la Géométrie. L'algèbre abstraite et la Topologie dont les racines reposent dans l'œuvre de HILBERT sont des témoins de l'efficacité de la méthode axiomatique. Les récentes et très importantes découvertes du domaine des fondements algébriques et topologiques de la Géométrie ont été passées en revue au Colloque d'Utrecht, Colloque qui visait avant tout de montrer les divers aspects d'un même sujet.

Le volume réunit 27 exposés qui ont été faits au Colloque d'Utrecht, notamment: Hjelmslevsches Geométrie, par R. BAER; Zur Geometrischen Algebra der Möbiusebene, par W. BENZ; The Theory of Parallels with Applications to Closed Geodesics, par H. BUSEMANN; Tactical Decomposition of  $\lambda$ -Spaces, par P. DEMBROWSKY; Schwach projektive Räume über dreifachen Ternärkörpern, par G. EWALD; Bericht über die Theorie der Rosenfeldschen elliptischen Ebenen, par H. FREUDENTHAL; Symplektische und metasympplektische Geometrien, par H. FREUDENTHAL; On Groups of Homeomorphisms, par A. M. GLEASON; Topological Descriptive Planes, par H. GUGGENHEIMER; Completed modular Lattices, par I. HALPERIN; Über die topologische und algebraische Struktur topologischer Doppelloops und einiger topologischer projektiver Ebenen, par K. H. HOFFMANN; Some Results of Collineation Groups, par D. H. HUGUES; Exceptional Algebras and Exceptional Groups, par N. JACOBSON; Anordnungsfragen in ternären

Ringen und allgemeinen projektiven und affinen Ebenen, par H. KARZEL; Construction Geometries and Construction Fields, par D. KIJNE; Projektive Geometrie und lineare Algebra über verallgemeinerten Bewertungsringen, par W. KLINKENBERG; Verallgemeinerte metrische Ebenen und orthogonale Gruppen, par R. LINGENBERG; Anneaux ternaires et corps généralisés liés aux géométries non-arguésiennes, par L. LOMBARDORADICE; Differential Geometry and Analytic Group Theory Methods in Foundations of Geometry, par T. NAGANO; Einfache Lie-Gruppen und nichteuklidische Geometrien, par B. A. ROSENFELD; Topologische projektive Ebenen, par H. SALZMANN; Von Staudt Projectivities of Moufang Planes, par M. F. SMILEY; Verallgemeinerte affine Räume und ihre algebraische Darstellung, par E. SPERNER; The Projective Octave Plane, par T. A. SPRINGER; Groupes algébriques semi-simples et géométries associées, par J. TITS; On Axiomatic Treatment of Polar Geometry, par F. D. VELDKAMP; Projectivities and the Little Projective Groups, par A. WAGNER. S. PICCARD

*Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen.* Von J. ACZÉL. Lehrbücher und Monographien. Mathematische Reihe Band 25. 331 Seiten. Birkhäuser Verlag, Basel 1961.

Der Verfasser legt eine Monographie über Funktionalgleichungen vor, deren Lösung schon die Schöpfer der Analysis beschäftigte und deren Bearbeitung in unserem Jahrhundert eine grosse Fülle von Lösungsmethoden hervorbrachte, wie der umfangreiche Literaturnachweis am Schluss des Buches belegt (fast sechzig Seiten Unterlagen chronologisch und sechs Seiten dem Namen nach geordnet; dazu unzählige Fussnoten mit historischen Hinweisen).

Neuartig an diesem vorbildlichen Werk ist *erstens* die Einteilung des ungeheuer angewachsenen Stoffes nach Typen von Gleichungen, was die Übersicht und das Aufsuchen besonderer Formen sehr erleichtert. Einige Beispiele sollen den elementaren Charakter und die Einteilung der Gleichungen zeigen.

a) Funktionen mit einer oder mehreren Veränderlichen:

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \text{ Lösung } f(x) = cx, \quad c = f(1)$$

$$F(x, y) + F(y, z) = F(x, z) \text{ Lösung } F(x, y) = g(y) - g(x);$$

b) Gleichungen mit einer oder mehreren unbekannten Funktionen:

$$f(x + y) = f(x) f(y) + g(x) g(y) \text{ stetige Lösungen mit } a \neq 0 \text{ sind}$$

$$f(x) = c \text{ und } f(x) = \cos ax; \quad g(x) = \pm \sqrt{c(1-c)} \text{ und } g(x) = \sin ax;$$

c) Einfache und zusammengesetzte Gleichungen:

$$F[F(x, u) v] = F(x, u + v) \text{ Lösung } F(x, u) = f[f^{-1}(x) + u];$$

d) Funktionen mit nur inneren Variablen (a und b) und solche Gleichungen, in denen Variablen ausserhalb der unbekannten Funktion auftreten (c).

Es wird darauf hingewiesen, wie auch nach der Auflösungsmethode eingeteilt werden könnte, indem nur elementare oder infinitesimale Hilfsmittel verwendet werden.

*Zweitens* ist neu, dass die Anwendungen sich organisch an die Theorie anschliessen, im Gegensatz zu den bisherigen Versuchen, das Ergebnis der Anwendung zu einer Theorie der betreffenden Funktionalgleichung auszubauen. ACZÉL behandelt prägnant und konsequent von der Definition der Gegenstände ausgehend: skalares und vektoriell Produkt, Bogenlänge und Abstandsformel der nichteuklidischen Geometrie, euklidische Flächenformel des Rechtecks (LEGENDRE 1791), Grenzwert  $\sin x : x$  nach VIETORIS (El. Math. 12, 8ff, (1957)), Kraftfelder mit Schwerpunkt, Verzinsungsformel, Charakterisierung der GAUSS'schen Normalverteilung, der arithmetischen und verwandter Mittel und der POISSON'schen Verteilung, Begründung der Wahrscheinlichkeitsrechnung (Axiomensystem für bedingte Wahrscheinlichkeit nach RENYI, 1954), inhomogene Übergangswahrscheinlichkeit. (Anwendungen auf geometrische Optik sind in einer besonderen Abhandlung geplant).



Das meistens flüssig lesbare Werk ist aus Vorlesungen entstanden und hat daher Lehrbuchcharakter mit dem oben skizzierten Aufbau und strenger Beweisführung. Es ist bewusst elementar gehalten, indem die Begriffe «Funktionalgleichung» und Systeme von ihnen so gefasst sind, dass weder Differential- und Integralgleichungen noch Differenzen- und Iterationsgleichungen als gegebene Gleichungen auftreten. Es wird weniger Gewicht gelegt auf die Lösung einzelner Beispiele als vielmehr auf die Darstellung einer allgemeinen Lösungsmethode und ihres Wirkungsbereiches und auf Zusammenhänge einzelner Typen. Bei wichtigen Gleichungen werden allgemeine Eigenschaften (Stetigkeit, Existenz, Monotonie, Eindeutigkeit) untersucht und auf Verallgemeinerungen hingewiesen. Das Buch, als erstes dieser Art, legt also Grund für eine systematische Theorie der Funktionalgleichungen im umschriebenen Rahmen und ist als solches bedeutungsvoll.

Für die Schule ist die Gleichung (b) interessant, weil sie allein genügt, um die beiden trigonometrischen Funktionen  $f(x) = \cos x$  und  $g(x) = \sin x$  zu charakterisieren, wie in diesem Buch schön dargelegt wird.

A. HÄUSERMANN

*Introduction to Matrices and Linear Transformations.* Von DANIEL T. FINKBEINER. 248 Seiten. \$ 6.50. W. H. Freeman and Company, San Francisco and London 1960.

Es handelt sich bei diesem Buch von FINKBEINER um eine ausgezeichnete Einführung in die Theorie der Matrizen. Grosse Klarheit in der Darstellung und der Beweisführung zeichnen das Werk aus.

Zuerst werden die geometrischen Grundlagen geschaffen, indem die Vektorräume und deren lineare Transformationen studiert werden. Die Matrizen und Operationen mit ihnen werden stets und vor allem auch geometrisch gedeutet, was ausserordentlich zu begrüßen ist. Von geometrischen Anschauungen her werden auch die Äquivalenzdefinitionen der Matrizen abgeleitet, so Zeilenäquivalenz, Äquivalenz schlechthin, Ähnlichkeit und Kongruenz. Für jeden Äquivalenztyp werden die kanonischen Formen der Matrizen untersucht. Erst gegen den Schluss hin wird im Vektorraum noch eine Metrik eingeführt und darauf die Rolle der Matrix bei bilinearen und quadratischen Formen beleuchtet. Überall finden sich reichlich und geschickt ausgewählte Aufgaben, zu deren Lösung man weiter hinten im Buch Hinweise entdeckt.

Das Buch setzt beim Leser Reife im mathematischen Denken voraus und kann alsdann jedem Interessenten des Gegenstandes sehr empfohlen werden. Es führt bis zu einem Punkt, von dem aus das Studium der Anwendungen in Geometrie, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Physik, Biologie, Nationalökonomie usw. in Angriff genommen werden kann.

G. AEBERLI

*Projective Methods in Plane Analytical Geometry.* Par SCOTT, CHARLOTTE ANGAS. XII et 290 pages avec 64 figures. \$ 3.50. Chelsea Publishing Company, New York 1962.

Il s'agit de la troisième édition d'un ouvrage paru en 1894 sous le titre «An Introductory account of certain modern ideas and methods in plane analytical geometry», ouvrage auquel l'auteur a apporté des corrections et de nombreux suppléments.

Inspiré par les travaux de CAYLEY, ce livre qui se compose de treize chapitres est une introduction à la Géométrie projective plane. Il est illustré de quelques exemples et est muni d'un index. L'auteur met dans son exposé l'accent sur la notion de correspondance.

S. PICCARD

*The Theory of Determinants, Matrices and Invariants.* Par H. W. TURNBULL. 3ème édition. XVIII et 374 pages. \$ 2.00. Dover Publications, New York 1960.

Les éditions Dover ont inclus dans leurs collections l'ouvrage classique de TURNBULL consacré à la théorie des déterminants, des matrices et des invariants dont la seconde édition avait paru en 1945. Un appendice est ajouté à la nouvelle édition. On y trouve entre autres des compléments concernant les déterminants symétriques, notamment des résultats classiques de KRONECKER et les résultats récents de LARS GARDING; on y trouve

également l'important théorème de SCHWEINS sur la décomposition d'une matrice carrée d'ordre  $n$  en un produit de deux facteurs triangulaires. Des références aux récents développements de la théorie des invariants ont été ajoutées en notes en bas de pages.

S. PICCARD

*Algebraic Equations.* Par EDGAR DEHN. An introduction to the theory of LAGRANGE and GALOIS. XI et 208 pages. \$ 1.45. Dover Publications, New York 1960.

Les éditions Dover reproduisent l'ouvrage de DEHN dont l'édition originale avait paru en 1930 (Columbia University Press). Cet excellent traité de résolution des équations algébriques comprend douze chapitres et un index et sert de bonne introduction aux théories classiques de LAGRANGE et de GALOIS. L'ouvrage est d'une clarté parfaite et son dernier chapitre est consacré à la résolution d'équations spéciales (abéliennes, cycliques, etc.).

S. PICCARD

*Transcendental and Algebraic Numbers.* Von A. O. GELFOND. Übersetzung der 1. Russischen Auflage von L. F. BORON. 188 Seiten. \$ 1.75. Dover Publications, New York 1960.

1934 hat der Verfasser der vorliegenden Monographie (und unabhängig von ihm T. SCHNEIDER) bewiesen, dass die Zahlen  $a^b$  ( $a \neq 0, \neq 1$ ,  $a$  und  $b$  algebraisch,  $b$  irrational) transzendent sind, und damit war das siebente der berühmten 23 Hilbertschen Probleme gelöst. Dieses Resultat stellte sich würdig neben den Lindemannschen Satz, durch den 1882 das Problem der Quadratur des Kreises erledigt wurde. Diese beiden Sätze sind zwei Marksteine in den bis auf Hermite zurückgehenden Untersuchungen über die arithmetischen Eigenschaften analytischer Funktionen. Dem Leser wird die Entwicklung dieser Theorie, die dem Verfasser weitere wichtige Beiträge verdankt, in meisterhafter Weise dargeboten. Selbst verwickelte Beweise können dank der vorangestellten Beschreibung ihrer logischen Struktur gut überschaut werden. Das Literaturverzeichnis mit 181 einschlägigen Arbeiten ist gegenüber der Originalausgabe wesentlich vergrößert worden.

E. TROST

*Elementary Differential Equations.* Von W. MARTIN und E. REISSNER, 2nd Edition. 325 Seiten mit 20 Figuren. \$ 6.75. Addison-Wesley Publishing Company, Reading Mass. 1961.

Diese von zwei Mathematikern des MIT (Cambridge Mass. USA) verfasste Einführung in die Differentialgleichungen will die für die Anwendungen notwendige mathematische Grundlage bieten. Beispiele aus Physik und Technik dienen nur zur Illustration der Natur und der Entstehung von Differentialgleichungen. Die Verfasser vertreten die Ansicht, dass die Technik des Aufstellens der Differentialgleichung eines Problems nicht Sache des Mathematikers sei, sondern eine Aufgabe des Physikers oder Ingenieurs. In diesem Sinn sind der Text und die zahlreichen Übungen (mit Lösungen) rein mathematischer Natur. Hingegen werden die für die Anwendungen wichtigen Gesichtspunkte der Theorie sehr sorgfältig und ausführlich dargestellt. Dazu gehören auch die verschiedenen Methoden zur angenäherten bzw. numerischen Integration der Gleichungen. In die Theorie der partiellen Differentialgleichungen führt das letzte Kapitel ein. Nach der Lektüre dieses Buches wird der Leser nicht nur mit den wichtigsten Grundbegriffen der Theorie der Differentialgleichungen vertraut sein sondern sich auch eine gewisse Gewandtheit in den Denkmethode der mathematischen Analysis erworben haben.

E. TROST

*The Solution of Equations in Integers.* Von A. O. GELFOND. Aus dem Russischen übersetzt von J. B. ROBERTS. 62 Seiten. \$ 1.-. W. H. Freeman and Company, San Francisco 1961.

Eine andere englische Übersetzung dieser Vorlesung des bekannten russischen Zahlentheoretikers wurde in *El. Math.* 15, 120 (1960) angezeigt.

E. TROST