

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 18 (1963)  
**Heft:** 1

**Artikel:** Arithmetical notes. Part XIII, A sequel to note IV  
**Autor:** [s.n.]  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-22632>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 09.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

IX lautet dann:

$$X \left\{ \begin{array}{l} -h' u - u' G u \\ \text{ist zu maximieren unter den Nebenbedingungen} \\ u \geq 0. \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (24') \\ \\ (26) \end{array}$$

Dabei ist zur Abkürzung  $h = A C^{-1} p + b$  und  $G = \frac{1}{2} A C^{-1} A'$  gesetzt.  $x$  stellt dann und nur dann eine Lösung von VIII dar, wenn  $x = x(u)$ , wobei  $u$  eine Lösung von X darstellt.

H. P. KÜNZI und W. OETTLI, Zürich

#### LITERATURVERZEICHNIS

- KRELLE, W., KUENZI, H. P., *Lineare Programmierung* (Industrielle Organisation, Zürich 1958).  
 KUENZI, H. P., KRELLE, W., *Nichtlineare Programmierung*. (Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1962).  
 VAJDA, S., *Mathematical Programming* (Addison-Wesley, London 1961).  
 ZOUTENDIJK, G., *Methods of feasible Directions* (Elsevier, Amsterdam 1960).

## Arithmetical Notes, XIII. A Sequel to Note IV\*)

### 1. Introduction

First we introduce some terminology and notation. For any positive integer  $n$ ,

$$n = p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r}, \quad (1.1)$$

where  $p_1, \dots, p_r$  are the prime divisors of  $n$ , let  $t(n)$  denote the maximal multiplicity of  $n$ , that is,  $t(n) = \max(e_1, \dots, e_r)$ ,  $t(1) = 0$ . For arbitrary positive integers  $k$ , let  $n_k$  denote the  $k$ -segment of  $n$ , meaning the number  $n_k = n/m$  where  $m$  is the largest  $k$ -th power divisor of  $n$ . Further, let  $t_k(n)$  denote the maximal multiplicity of the  $k$ -segment of  $n$ ,  $t_k(n) = t(n_k)$ .

In this note we prove elementary estimates for the distribution of two sequences of integers,  $U_{k,t}$  and  $V_{k,t}$ , defined as follows. Let  $t$  denote a fixed positive integer; define  $U_{k,t}$  to be the set of all  $n$  for which  $t_k(n) < t$  and  $V_{k,t}$  to be the set of all  $n$  for which  $t_k(n) = t$ . The result obtained for  $U_{k,t}$  is given in Theorem 1 and that for  $V_{k,t}$  in Theorem 2. It will be noted that  $U_{k,k}$  is the set of all positive integers while  $U_{k,1}$  is the set of  $k$ -th powers. More generally,  $U_{k,t}$  is the set of all  $n$  whose  $k$ -segment is a  $t$ -free integer (an integer whose largest  $t$ -th power divisor is 1). Note moreover that the sets  $V_{k,t}$  contain no  $k$ -th power integers.

We mention here a single special case of Theorem 1. Let  $H_k(x)$  denote the number of  $n \leq x$  contained in  $H_k = U_{k,2}$ , that is,  $H_k(x)$  is the number of those  $n$ , not exceeding  $x$ , whose  $k$ -segment is square-free. Then for  $k > 2$ ,

$$H_k(x) = \left( \frac{\zeta(k)}{\zeta(2)} \right) x + O(\sqrt{x}), \quad (1.2)$$

\*) This research was supported in part by the National Science Foundation grant G-19012.

where  $\zeta(k)$  is the sum of the series,  $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-k}$ . This result is equivalent to one contained in [1, Corollary 2.1]. For a slight generalization we mention [3, Lemma 2.2].

The results of this paper extend those of an earlier paper [2]. In fact, the main results of [2] are deduced as corollaries in §§ 2 and 3.

## 2. The sequences $U_{k,t}$

The enumerative function  $G(x)$  of a set of integers  $G$  is the number of  $n \leq x$  contained in  $G$ ; in particular,  $H_k(x)$  in (1.2) is the enumerative function of  $H_k$ . The characteristic function  $g(n)$  of  $G$  is the function defined to be 1 for all  $n \in G$ , 0 for all  $n \notin G$ . In accord with this notation,  $U_{k,t}(x)$  will be used to represent the enumerative function of  $U_{k,t}$  and  $u_{k,t}(n)$  the characteristic function.

We recall first some well known facts which will be used in the proof of Theorem 1. Let  $q_k(n)$  denote the characteristic function of the  $k$ -free integers and  $\mu(n)$  the Möbius function. Then

$$q_t(n) = \sum_{d^t e = n} \mu(d); \quad \frac{1}{\zeta(k)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^k}, \quad k > 1, \quad (2.1)$$

also we have the simple estimates,

$$\sum_{n > x} \frac{1}{n^s} = O\left(\frac{1}{x^{s-1}}\right) \quad \text{if } s > 1, \quad (2.2)$$

$$\sum_{n \leq x} n^s = O(x^{s+1}) \quad \text{for } s > -1. \quad (2.3)$$

*Lemma 1.* If  $k \geq t$ , then

$$u_{k,t}(n) = \sum_{d^k \Delta = n} q_t(\Delta) = \sum_{d^k \delta^t e = n} \mu(\delta). \quad (2.4)$$

*Proof.* Every  $n$  has a unique representation as a product of a  $k$ -th power and a  $k$ -free integer. Hence, since  $t \leq k$ , the only term in the first sum of (2.4) which may be different from 0 is the one corresponding to the factorization,  $n = d^k \Delta$ ,  $\Delta$   $k$ -free, so that the sum reduces to  $q_t(\Delta) = u_{k,t}(n)$ . Application of (2.1)<sub>1</sub> yields the lemma.

Let  $[x]$  denote the largest integer  $\leq x$ .

*Theorem 1.* If  $1 < t < k$ , then for  $x \geq 1$

$$U_{k,t}(x) = \left(\frac{\zeta(k)}{\zeta(t)}\right) x + O\left(\sqrt[t]{x}\right). \quad (2.5)$$

*Remark 1.* The relation (2.5) holds trivially in case  $k = t$ .

*Proof.* By Lemma 1,

$$\begin{aligned} U_{k,t}(x) &= \sum_{n \leq x} u_{k,t}(n) = \sum_{d^k \delta^t e \leq x} \mu(\delta) = \sum_{\delta^t \leq x} \mu(\delta) \sum_{d^k e \leq \frac{x}{\delta^t}} 1 = \sum_{\delta \leq x^{1/t}} \mu(\delta) \sum_{d^k \leq \frac{x}{\delta^t}} [x/d^k \delta^t] \\ &= \sum_{\delta \leq x^{1/t}} \mu(\delta) \sum_{d \leq \left(\frac{x}{\delta^t}\right)^{1/k}} \left(\frac{x}{d^k \delta^t} + O(1)\right) = \sum_{\delta \leq x^{1/t}} \mu(\delta) \left\{ \frac{x}{\delta^t} \sum_{d \leq \left(\frac{x}{\delta^t}\right)^{1/k}} d^{-k} + O\left(\left(\frac{x}{\delta^t}\right)^{1/k}\right) \right\}. \end{aligned}$$

Hence by (2.2), since  $k > 1$ ,

$$\begin{aligned} U_{k,t}(x) &= \sum_{\delta \leq x^{1/t}} \mu(\delta) \left\{ \frac{x\zeta(k)}{\delta^t} - \frac{x}{\delta^t} \sum_{d > \left(\frac{x}{\delta^t}\right)^{1/k}} d^{-k} + O\left(\left(\frac{x}{\delta^t}\right)^{1/k}\right) \right\} \\ &= x\zeta(k) \sum_{\delta \leq x^{1/t}} \mu(\delta) \delta^{-t} + O\left(x^{1/k} \sum_{\delta \leq x^{1/t}} \delta^{-t/k}\right), \end{aligned}$$

and by (2.1)<sub>2</sub>, the boundedness of  $\mu(n)$ , and the hypothesis,  $t > 1$ ,

$$U_{k,t}(x) = \frac{x\zeta(k)}{\zeta(t)} + O\left(x \sum_{\delta > x^{1/t}} \delta^{-t}\right) + O\left(x^{1/k} \sum_{\delta \leq x^{1/t}} \delta^{-t/k}\right).$$

By (2.2) and (2.3), the  $O$ -terms are  $O(x^{1/t})$ , and the theorem is proved.

Let  $U_k$  denote the set of all  $n$  in (1.1) such that  $e_i \not\equiv -1 \pmod{k}$ ,  $i = 1, \dots, r$ , and let  $U_k(x)$  be the enumerative function of  $U_k$ . It is not difficult to see that  $U_k = U_{k,k-1}$  if  $k > 1$ . Hence the theorem becomes, in the extreme case  $t = k - 1$ ,

*Corollary 1* (cf. [2, Theorem 3.1]). *If  $k > 2$ ,*

$$U_k(x) = \left(\frac{\zeta(k)}{\zeta(k-1)}\right)x + O\left(x^{\frac{1}{k-1}}\right). \quad (2.6)$$

The other extreme case of the theorem,  $t = 2$ , yields the formula stated in the Introduction.

*Remark 2.* In the case  $t = k - 1$ , the first half of Lemma 1 is equivalent to the identity proved in [2, Lemma 2.2]. The proof given in [2] is based on an inversion argument which is somewhat longer, though perhaps more instructive, than the one of the present paper.

### 3. The sequences $V_{k,t}$

Let  $V_{k,t}(x)$  be the enumerative function of  $V_{k,t}$ . Now

$$V_{k,t}(x) = U_{k,t+1}(x) - U_{k,t}(x), \quad 1 \leq t < k. \quad (3.1)$$

Noting, in addition, that  $U_{k,k}(x) = [x]$ ,  $U_{k,1}(x) = \left[\sqrt[k]{x}\right]$ , we have from Theorem 1

*Theorem 2.* *If  $1 < t < k$ , then*

$$V_{k,t}(x) = c_{k,t}x + O\left(\sqrt[t]{x}\right), \quad (3.2)$$

where

$$c_{k,t} = \begin{cases} \zeta(k) (\zeta^{-1}(t+1) - \zeta^{-1}(t)) & \text{if } t < k-1, \\ 1 - \frac{\zeta(k)}{\zeta(k-1)} & \text{if } t = k-1; \end{cases} \quad (3.3)$$

if  $k > 2$ ,

$$V_{k,1}(x) = \left(\frac{\zeta(k)}{\zeta(2)}\right)x + O\left(\sqrt{x}\right). \quad (3.4)$$

Let  $\tau(n)$  denote the number of divisors of  $n$  and let  $V_k$  represent the sequence of  $n$  for which  $k \mid \tau(n)$ . As usual,  $V_k(x)$  is the enumerative function of  $V_k$ . It is easily deduced that if  $k$  is an odd prime, then  $V_k = V_{k,k-1}$ ,  $V_k(x) = V_{k,k-1}(x)$ . Hence the case  $t = k - 1$  of the theorem leads to

Corollary 1 ([2, (1.3)]). If  $k$  is a prime  $\neq 2$ , then

$$V_k(x) = \left(1 - \frac{\zeta(k)}{\zeta(k-1)}\right) x + O\left(x^{\frac{1}{k-1}}\right). \quad (3.5)$$

ECKFORD COHEN, University of Tennessee, Knoxville USA

BIBLIOGRAPHY

- [1] ECKFORD COHEN, *Arithmetical Notes*, II. *An estimate of ERDÖS and SZEKERES*, Scripta Mathematica, to appear.
- [2] ECKFORD COHEN, *Arithmetical Notes*, IV. *A set of integers related to the divisor function*, Journal of the Tennessee Academy of Science, vol. 37 (1962), 119–120.
- [3] ECKFORD COHEN, *Arithmetical Notes*, V. *A divisibility property of the divisor function*, American Journal of Mathematics, vol. 83 (1961), 693–697.

## Kleine Mitteilungen

### Adjungierte Sekanten und Tangenten zweier Kreise

Man betrachte irgendzwei in einer Ebene liegende und sich im Punkte  $S$  schneidende Kreise  $K_1$  und  $K_2$ ; der Schnittwinkel sei  $\alpha$ . Durch  $S$  lege man zwei beliebige Geraden  $p$  und  $q$ , die mit  $K_1$  bzw.  $K_2$  ausser  $S$  im allgemeinen je einen Schnittpunkt  $P_1, Q_1$  bzw.  $P_2, Q_2$  ergeben. Die durch  $P_1, Q_1$  bzw.  $P_2, Q_2$  verlaufenden Geraden  $g_1$  bzw.  $g_2$  wollen wir ein Paar «adjungierte Sekanten» nennen. Im Fall  $p = q$  betrachten wir die durch  $P_1 = Q_1$  bzw.  $P_2 = Q_2$  verlaufenden «adjungierten Tangenten».

Untersucht man nun die Menge der Schnittpunkte je zweier zueinander adjungierter Sekanten und Tangenten bei willkürlicher Variation von  $p$  und  $q$ , so ergeben sich einige interessante Eigenschaften.

Man kann zu dieser Fragestellung ausgehend von verschiedenen geometrischen Aspekten mit den entsprechenden Vorkenntnissen Zugang finden. Bemerkenswert ist aber auch die Möglichkeit einer elementaren Betrachtungsweise, die im folgenden dargelegt werden soll.

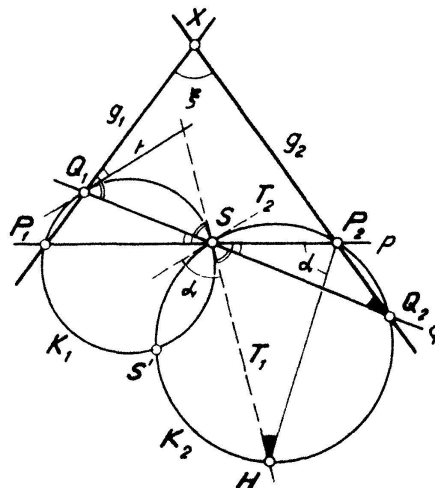
Wir vereinbaren vorerst die Bezeichnungen:  $S, S'$  Schnittpunkt der Kreise  $K_1, K_2$  mit  $S$  als Sekantenzentrum. Die interessierenden Schnittpunkte adjungierter Sekanten (bzw. Tangenten)  $g_1, g_2$  nennen wir « $X$ -Punkte».

1. *Satz I.* Adjungierte Sekanten (und Tangenten) schneiden sich stets unter demselben Winkel, und zwar unter dem Schnittwinkel  $\alpha$  der Kreise.

Den Beweis hierfür entnehme man in einfacher Weise aus der folgenden Skizze bei Beachtung elementargeometrischer Tatsachen.

Dabei bedeuten:

- $t$  die Tangente an  $K_1$  in  $Q_1$
- $T_1$  die Tangente an  $K_1$  in  $S$
- $T_2$  die Tangente an  $K_2$  in  $S$



Figur 1