Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 17 (1962)

Heft: 1

Rubrik: Aufgaben

Aufgaben

Aufgabe 391. Dans un triangle cyclique *ABC:*

(1) Les hauteurs sont concourantes.

(2) Trois céviennes *AD, BE, CF* sont concourantes, ou les pieds *D, E, F* se trouvent sur la même transversale, si

$$\frac{\sin DAB}{\sin DAC}\cdot\frac{\sin EBC}{\sin EBA}\cdot\frac{\sin FCA}{\sin FCB}=\pm 1\,.$$

Donc, les bissectrices intérieures sont concourantes, les pieds des bissectrices extérieures sont concycliques etc.

Note: Nous appelons triangle cyclique *ABC* la figure plane formée par trois circonférences *AB, BC, CA.* Deux «côtés» *AB* et *CA* se coupent sous un angle *BAC* en deux points A_1 et A_2: le sommet *A*. Une circonférence qui passe par un sommet et coupe orthogonalement le côté opposé est une hauteur, et par des extensions analogues on peut définir les bissectrices etc. G. N. VLAHAVAS, London

Lösung: Wir zeigen, dass es eine kreis- und winkeltreue Abbildung gibt, durch die einem gegebenen (ebenen) Kreisdreieck eineindeutig ein Kugeldreieck zugeordnet ist; vorausgesetzt, dass das Kreisdreieck nicht entartet ist, das heisst, falls seine Ecken und Gegenecken reell und voneinander verschieden sind:

Die drei in der Ebene E gelegenen Kreise, die das Kreisdreieck bilden, seien K_i; die Ecken und Gegenecken des Dreiecks seien A_i und $\overline{A}_i$ $(i = 1, 2, 3)$. Die drei Kugeln $\mathfrak{K}_i$, welche die Kreise K_i als Äquatorialschnitte besitzen, haben dann unter der genannten Voraussetzung zwei gemeinsame Punkte Z und Z^*, die reell, voneinander verschieden und bezüglich E symmetrisch sind. Ist S der Schnittpunkt von ZZ^* mit E (S ist mit dem gemeinsamen Punkt der drei Sehnen $A_i\overline{A}_i$ identisch!) und $\mathfrak{K}$ die Kugel, die $\overline{SZ}$ als Durchmesser besitzt, dann ist E eine Tangentialebene an $\mathfrak{K}$ mit dem Berührpunkt S, und Z ist auf $\mathfrak{K}$ Gegenpunkt zu S. Demnach ist die Zentralprojektion mit dem Zentrum Z, die E und $\mathfrak{K}$ eineindeutig aufeinander abbildet, eine stereographische Projektion. Wegen der Kreistreue dieser Abbildung ist jedem Kreis in E ein Kreis auf $\mathfrak{K}$ zugeordnet und umgekehrt. Die Bilder der drei in E gelegenen Kreise K_i sind insbesondere Grosskreise auf $\mathfrak{K}$, da Z nach Konstruktion auf jeder der drei Kugeln $\mathfrak{K}_i$ liegt. Folglich ist bei dieser Abbildung dem Kreisdreieck $A_1A_2A_3$ in E ein Kugeldreieck auf $\mathfrak{K}$ zugeordnet.

Da die stereographische Projektion auch winkeltreu ist, so sind alle Eigenschaften des Kugeldreiecks, die reine Winkeleigenschaften sind (evtl. kombiniert mit reinen Kreiseigenschaften), gegenüber dieser Abbildung invariant, das heisst, sie gelten auch für das Kreisdreieck. Einige solcher Eigenschaften des Kugeldreiecks sind bekanntlich:

1. Die Höhen besitzen ein Paar gemeinsamer Punkte,
2. die inneren Winkelhalbierenden besitzen ein Paar gemeinsamer Punkte,
3. die äusseren Winkelhalbierenden schneiden die Gegenseiten in 3 Punktepaaren eines Grosskreises.

Dieselben Eigenschaften besitzt also auch das Kreisdreieck, q. e. d.

Wir zeigen nachträglich noch:

Die Ecktransversalen eines Eulerschen Kreisdreiecks[1]) besitzen genau dann zwei gemeinsame, nicht auf den Seiten liegende Punkte,

$$\text{wenn} \prod_{i=1}^{3}\frac{\sin(a_i, t_{i+1})}{\sin(a_i, t_{i+2})} = 1 \ \text{ist}.$$

(a_i, t_k) bedeutet dabei den orientierten Winkel zwischen der Seite a_i und der Ecktransversalen t_k $(0 < (a_i, t_k) < \pi)$.

Da obige Bedingung eine reine Winkelbeziehung ist, genügt es, den Satz für ein Eulersches Kugeldreieck nachzuweisen:

[1]) Unter einem Eulerschen Kreisdreieck verstehen wir das stereographische Bild eines Eulerschen Kugeldreiecks.

Wenn die Ecktransversalen t_i einen gemeinsamen Punkt X besitzen, der nicht auf den Seiten a_i liegt, dann können die Grosskreisbögen $\widehat{XA}_i$ so gewählt werden, dass $0 < \widehat{XA}_i < \pi$ ist. Die drei Kugeldreiecke $XA_{i+1}A_{i+2}$ sind dann Eulersche Dreiecke, und es ist $\sphericalangle XA_{i+1}A_{i+2} = (a_i, t_{i+1})$ oder $\pi - (a_i, t_{i+1})$, sowie $\sphericalangle XA_{i+2}A_{i+1} = (a_i, t_{i+2})$ oder $\pi - (a_i, t_{i+2})$. In jedem Fall gilt also nach dem sphärischen Sinussatz in diesen Dreiecken

$$\frac{\sin(a_i, t_{i+1})}{\sin(a_i, t_{i+2})} = \frac{\sin \widehat{XA}_{i+2}}{\sin \widehat{XA}_{i+1}} \quad (i = 1, 2, 3),$$

also

$$\prod_{i=1}^{3} \frac{\sin(a_i, t_{i+1})}{\sin(a_i, t_{i+2})} = \prod_{i=1}^{3} \frac{\sin \widehat{XA}_{i+2}}{\sin \widehat{XA}_{i+1}} = 1. \tag{1}$$

Gäbe es andererseits eine Ecktransversale etwa $\overline{t}_3$, die nicht durch X ginge, für die aber die der Gleichung (1) entsprechende Gleichung

$$\frac{\sin(a_1, t_2)}{\sin(a_1, \overline{t}_3)} \cdot \frac{\sin(a_2, \overline{t}_3)}{\sin(a_2, t_1)} \cdot \frac{\sin(a_3, t_1)}{\sin(a_3, t_2)} = 1 \tag{2}$$

gelten würde, dann wäre zufolge (1) und (2)

$$\frac{\sin(a_2, \overline{t}_3)}{\sin(a_1, \overline{t}_3)} = \frac{\sin(a_2, t_3)}{\sin(a_1, t_3)}. \tag{3}$$

Nun ist $(a_2, \overline{t}_3) = (a_2, t_3) + (t_3, \overline{t}_3)$ und $(a_1, \overline{t}_3) = (a_1, t_3) + (t_3, \overline{t}_3)$, wobei $0 < |(t_3, \overline{t}_3)| < \pi$ ist, da t_3 und $\overline{t}_3$ voneinander verschieden sind. Aus (3) würde somit nach einfacher Umformung die Gleichung

$$\sin(t_3, \overline{t}_3) \cdot \sin[(a_1, t_3) - (a_2, t_3)] = 0$$

folgen, also $(a_1, t_3) - (a_2, t_3) \equiv 0 \pmod{\pi}$, da ja $\sin(t_3, \overline{t}_3) \neq 0$ ist. Damit wäre aber $(a_1, a_2) = (a_1, t_3) + (t_3, a_2) = (a_1, t_3) - (a_2, t_3) \equiv 0 \pmod{\pi}$, das heisst, das Kugeldreieck $A_1A_2A_3$ wäre im Eckpunkt A_3 entartet. O. Reutter, Ochsenhausen (Deutschland)

Aufgabe 392. If $f(x) \in L(-\infty, +\infty)$ and for a positive b the inequality

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-ixt}\, dt \right| \leqq \frac{e^{-bx^2}}{1 + 4\pi^2 x^2} \tag{1}$$

holds on the real x-axis, then for all positive integers k the inequality

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)^k\, e^{-ixt}\, dt \right| \leqq \frac{e^{-bx^2/k}}{1 + 4\pi^2 x^2} \tag{2}$$

holds on the whole real axis. P. Turán, Budapest

Solution by the proposer: This can be proved e. g. by induction with respect to k. For $k = 1$ this is (1). Suppose it is true for $k \leqq \nu$ $(\nu \geqq 1)$. Putting

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)^k\, e^{-ixt}\, dt = f_k(x)$$

(which exists for all real x) we have as well known for any positive integer μ, ν

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_\mu(x)\, f_\nu(\xi - x)\, dx = f_{\mu+\nu}(\xi)$$

for all real ξ. Hence by the induction hypothesis

$$| f_{\nu+1}(\xi) | = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f_\nu(x)\, f_1(\xi - x)\, dx \right| \leqq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp\left(-\frac{b}{\nu} x^2 - b(\xi - x)^2\right)}{(1 + 4\pi^2 x^2)(1 + 4\pi^2(\xi - x)^2)}\, dx\,^{1)} .$$

The exponent can be written in the form

$$b\left\{-\frac{\xi^2}{\nu+1} - \frac{\nu+1}{\nu}\left(x - \frac{\nu}{\nu+1}\xi\right)^2\right\}$$

i. e. from (3)

$$| f_{\nu+1}(\xi) | \leqq \exp\left(-\frac{b\,\xi^2}{\nu+1}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1 + 4\pi^2 x^2)(1 + 4\pi^2(\xi - x)^2)} = \frac{\exp\left(-\frac{b\,\xi^2}{\nu+1}\right)}{1 + 4\pi^2 \xi^2} .$$

Q. e. d.

Aufgabe 393. Wieviele verschiedene quadratische Reste und Nichtreste werden durch den Binomialkoeffizienten $\binom{a}{2}$ dargestellt, wenn für a die mod p verschiedenen Restklassen $2, 3, \ldots, p - 1$ der Primzahl p eingesetzt werden? W. Jänichen, Berlin

Solution: Let A denote the number of distinct quadratic residues and B the number of distinct quadratic non-residues in the set

$$\frac{1}{2} a(a-1) \qquad (2 \leqq a \leqq p - 1) . \tag{1}$$

Let A_1 denote the total number of residues and B_1 the total number of non-residues in the set (1). Clearly

$$\frac{1}{2} a(a-1) \equiv \frac{1}{2} b(b-1) \pmod{p}$$

if and only if

$$b \equiv a \quad \text{or} \quad b \equiv 1 - a \pmod{p} .$$

Thus except for $a = (p-1)/2$ each number $a(a-1)/2$ occurs twice. For $a = (p-1)/2$,

$$\left(\frac{\frac{1}{2} a(a-1)}{p}\right) = \left(\frac{-2}{p}\right).$$

It follows that

$$A = \frac{1}{4}\left\{2A_1 + 1 + \left(\frac{-2}{p}\right)\right\},$$

$$B = \frac{1}{4}\left\{2B_1 + 1 - \left(\frac{-2}{p}\right)\right\}.$$

Now

$$2A_1 = \sum_{a=2}^{p-1}\left\{1 + \left(\frac{\frac{1}{2} a(a-1)}{p}\right)\right\} = p - 2 + \left(\frac{2}{p}\right)\sum_{a=1}^{p-1}\left(\frac{a(a-1)}{p}\right).$$

But

$$\sum_{a=1}^{p-1}\left(\frac{a(a-1)}{p}\right) = \sum_{a=1}^{p-1}\left(\frac{\frac{1}{a}\left(\frac{1}{a} - 1\right)}{p}\right) = \sum_{a=1}^{p-1}\left(\frac{1-a}{p}\right) = -1 ,$$

[1]) $\exp\alpha = e^\alpha$.

so that

$$A_1 = \frac{1}{2}\left\{p - 2 - \left(\frac{2}{p}\right)\right\}.$$

Since $A_1 + B_1 = p - 2$, we have

$$B_1 = \frac{1}{2}\left\{p - 2 + \left(\frac{2}{p}\right)\right\}.$$

Therefore

$$A = \frac{1}{4}\left\{p - 1 - \left(\frac{2}{p}\right) + \left(\frac{-2}{p}\right)\right\} = \begin{cases} \frac{1}{4}(p-1) & p \equiv 1 \pmod 8 \\ \frac{1}{4}(p+1) & p \equiv 3 \pmod 8 \\ \frac{1}{4}(p-1) & p \equiv 5 \pmod 8 \\ \frac{1}{4}(p-3) & p \equiv 7 \pmod 8 . \end{cases}$$

$$B = \frac{1}{4}\left\{p - 1 + \left(\frac{2}{p}\right) - \left(\frac{-2}{p}\right)\right\} = \begin{cases} \frac{1}{4}(p-1) & p \equiv 1 \pmod 8 \\ \frac{1}{4}(p-3) & p \equiv 3 \pmod 8 \\ \frac{1}{4}(p-1) & p \equiv 5 \pmod 8 \\ \frac{1}{4}(p+1) & p \equiv 7 \pmod 8 . \end{cases}$$

L. Carlitz, Duke University, Durham, N. C., USA

Aufgabe 394. Montrer que dans l'espace limité par une couronne régulière formée de neuf cercles égaux tangents deux à deux, on peut placer exactement deux autres cercles égaux aux précédents. Ch. Vuille, La Sagne

Lösung: Die neun Kreise $K_1, K_2, \ldots, K_9$ sollen die Mittelpunkte $M_1, M_2, \ldots, M_9$ und den Radius r besitzen. Von zwei kongruenten Kreisen K, K' mit den Mittelpunkten M und M' und dem Radius r berühre der eine etwa K_1 und K_2, der andere K_5 und K_6. Wir zeigen, dass $\overline{MM'} = \overline{M_3 M_4} = 2r$, das heisst, dass sich K und K' berühren.

Betrachtet man die Winkel des Sechsecks $M M_2 M_3 M_4 M_5 M'$ bei M_2, M_3, M_4 und M_5, so erkennt man, dass die Mittelnormale zu $M_3 M_4$ *und* die Diagonale $M_2 M_5$ Symmetrieachsen sind. Damit ist $\overline{MM'} = \overline{M_3 M_4} = 2r$. C. Bindschedler, Küsnacht

Trigonometrische Lösungen sandten J. Basile (Brüssel), H. Ducommun (Zürich), W. Jänichen (Berlin), L. Kieffer (Luxemburg), O. Reutter (Ochsenhausen, Deutschland), R. Whitehead (St. Ives, Cornwall/Engl.)

Neue Aufgaben

Aufgabe 420. Es sei $n_1, n_2, \ldots$ eine Folge ganzer Zahlen mit $n_k^{1/2^k} \to \infty$. Dann gilt: $\sum_{k=1}^{\infty} 1/n_k$ ist irrational. Paul Erdös

Aufgabe 421. Gegeben ist ein Kegelschnitt K und auf ihm die Punkte P_1, P_2, P_3. Man konstruiere drei sich gegenseitig berührende Kegelschnitte K_1, K_2, K_3, welche K respektive in P_1, P_2, P_3 vierpunktig berühren. C. Bindschedler, Küsnacht

Aufgabe 422. Sind $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n \geqq 2)$ voneinander verschiedene nicht-negative ganze Zahlen, dann ist

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{(\nu + a_1)(\nu + a_2) \ldots (\nu + a_n)} = -\sum_{i=1}^{n} D_i \sum_{\nu=1}^{a_i} \frac{1}{\nu}$$

$$\text{mit } D_i = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} (a_k - a_i)^{-1} \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

O. REUTTER (Ochsenhausen/Deutschland)

Aufgabe 423. Wie muss die Matrix $\mathfrak{A} = (a_{ik})$ einer Affinität $\mathfrak{p}^* = \mathfrak{A}\,\mathfrak{p} + \mathfrak{a}$ beschaffen sein, damit es in der Ebene vier (durch ihre Ortsvektoren $\mathfrak{p}_0, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3$ gegebene) Punkte gibt, die durch die Affinität in der angegebenen Reihenfolge zyklisch aufeinander abgebildet werden?

W. JÄNICHEN, Berlin

Aufgabe 424. Es bezeichne $A(a_i)$ das arithmetische, $H(a_i)$ das harmonische Mittel der drei Seiten eines Dreiecks und $G(w_i)$ das geometrische Mittel der drei Winkelhalbierenden. Wie gross ist die Fläche des Dreiecks, wenn

$$G^3(w_i)\left[\frac{3}{H(a_i)} - \frac{1}{3\,A(a_i)}\right] = 3\,?$$

F. LEUENBERGER, Zuoz

Aufgaben für die Schule

Es wird kein Anspruch auf Originalität der Aufgaben erhoben; Autoren und Quellen werden im allgemeinen nicht genannt. Die Daten für Aufgaben aus der Darstellenden Geometrie sind durchweg so festgelegt, dass der Ursprung des Koordinatensystems in der Mitte des linken Randes eines Blattes vom Format A 4 gewählt werden soll, x-Achse nach rechts, y-Achse nach vorn, z-Achse nach oben, Einheit 1 cm. Anregungen und Beiträge sind zu senden an Prof. Dr. WILLI LÜSSY, Büelrainstrasse 51, Winterthur.

1. $$\frac{1}{\cos^2\alpha} - \frac{1}{\cos^2\beta} = \frac{\mathrm{tg}^2\,\alpha}{\cos^2\beta} - \frac{\mathrm{tg}^2\,\beta}{\cos^2\alpha} = \mathrm{tg}^2\,\alpha - \mathrm{tg}^2\,\beta.$$

2. Die Gleichung

$$a \sin x + b \cos x = c$$

kann graphisch gelöst werden, indem man den Einheitskreis mit der Gerade $a y + b x = c$ schneidet. Stelle hieraus die Bedingung auf, die a, b und c erfüllen müssen, damit reelle Lösungen vorhanden sind.

3. Im Quadrat $ABCD$ wird der Viertelskreisbogen BD um A gezogen. P ist ein Punkt dieses Bogens, $\sphericalangle APC = \alpha$, $\sphericalangle PCD = \beta$.
Zeige: $\sin\beta - \cos\beta = \sin\alpha$.

4. Für drei beliebige Winkel α, β, γ gilt

$$\sin\alpha \sin\gamma + \sin\beta \sin(\alpha + \beta + \gamma) = \sin(\alpha + \beta)\sin(\beta + \gamma)\,.$$

▶ Beweis unmittelbar vermöge

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}\left[\cos(x - y) - \cos(x + y)\right].$$

Die Identität beweist den Satz von PTOLEMÄUS: Schreibe einem Kreis mit dem Radius $\frac{1}{2}$ ein Viereck ein, in dem drei Seiten zu den Zentriwinkeln $2\,\alpha$, $2\,\beta$, $2\,\gamma$ gehören, und notiere die Länge aller Seiten und Diagonalen.

5. Über zwei Riemenscheiben mit den Radien $R = 40{,}0$ cm und $r = 15{,}0$ cm kann ein Riemen der Länge $L = 320$ cm gespannt werden. Berechne den Abstand d der Scheibenachsen.

▶ Mit $d = \dfrac{R - r}{\cos\varphi}$ erhält man

$$\operatorname{tg}\varphi - \varphi = \frac{L - 2\,\pi\,R}{2\,(R - r)} = 1{,}3735\,,$$

$$\varphi = 68^\circ\,46'\,, \quad d = 69{,}0\ \text{cm}\,,$$

Die vorzügliche Näherungsformel

$$L \approx \pi\,(R + r) + 2\,d + \frac{(R - r)^2}{d}$$

liefert $d = 69{,}1$ cm.

Literaturüberschau

Continuous Geometry. Von JOHN VON NEUMANN. 299 Seiten. $ 7.50. Princeton University Press, Princeton 1960.

Bevor man mit der Lektüre dieser Abhandlung beginnt, empfiehlt es sich, das grundlegende Werk von VEBLEN und YOUNG (*Projective Geometry*) über endlichdimensionale projektive Geometrie zu studieren.

Der $(n - 1)$-dimensionale projektive Raum L_n bildet mit der Gesamtheit seiner Unterräume einen Verband (lattice). Bei VEBLEN wird gezeigt, dass es für $n \geqq 4$ zu jedem L_n einen Matrixring über einer aus dem L_n abgeleiteten Divisionsalgebra gibt, dessen Rechtsideale einen zum Verbande L_n isomorphen Verband bilden.

NEUMANN untersucht in diesem Buch, wie man dieses Isomorphietheorem auch auf einen unendlichdimensionalen Verband L_∞ ausdehnen könnte. Ein solcher Verband, in bestimmter Weise axiomatisiert, heisst eine «continuous geometry».

In jedem Ring bilden dessen Rechtsideale einen Verband. NEUMANN zeigt, dass für ein Isomorphietheorem nur die Rechts*haupt*ideale eines Ringes in Frage kommen können. Nur spezielle Ringe aber haben die Eigenschaft, dass ihre Rechtshauptideale für sich allein schon einen Verband bilden. Diese besonderen Ringe werden *regulär* genannt und bilden den Gegenstand längerer Untersuchungen. Das Ziel des Buches ist der Beweis des Isomorphiesatzes: Zu einer «continuous geometry» L_∞ gibt es einen bis auf Isomorphie eindeutig bestimmten regulären Ring, dessen Rechtshauptideale einen zum L_∞ isomorphen Verband bilden.

Die hier behandelten Strukturen, die «continuous geometries», wurden von NEUMANN im Jahre 1935 entdeckt. In den Jahren 1935–1937 hielt NEUMANN darüber Vorlesungen an der Universität Princeton. Aber erst 1960, drei Jahre nach dem Tode NEUMANNS, wurde dieses Buch herausgegeben, kommentiert von seinem Schüler HALPERIN. Wie die Theorie der endlichdimensionalen Vektorräume zu derjenigen der Hilbert- und Banachräume erweitert worden ist, so hat man hier die Erweiterung der endlichdimensionalen projektiven Räume zu den Neumannschen Räumen vor sich. Es ist sehr interessant, in diesem Buch zu verfolgen, wie NEUMANN dieses Unternehmen durchführt. G. AEBERLI

Topology. Von JOHN G. HOCKING and GAIL S. YOUNG. IX + 374 Seiten. $9.75. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading (Massachusetts) und London 1961.

Das vorliegende Werk gibt eine Einführung in die Topologie, wie sie etwa in einer zweisemestrigen Topologievorlesung gegeben werden kann. Es umfasst inhaltlich soviel