Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 17 (1962)

Heft: 6

Rubrik: Kleine Mitteilungen

Die senkrechten Ebenen mit den Geraden des in der Grundebene durch (0, 0) gehenden Strahlenbüschels schneiden die Fläche in Geraden, deren jede zur Spur parallel ist, die einander parallelen Ebenen mit den Spurgeraden $m + n = c =$ const. schneiden die Fläche in Kurven der Art

$$f(n) = a \sqrt[c]{\left(\frac{b}{a}\right)^n} = A B^n ,$$

also in exponentiellen Kurven. Äquidistante Fusspunkte einer solchen Kurve gehören daher gemäss (XI) zu Funktionswerten mit konstanten Quotienten. H. JECKLIN

Kleine Mitteilungen

Ein Problem der konvexen Kurven

S. M. ULAM hat die folgende Aufgabe gestellt (A collection of mathematical problems):

Let C be a star-shaped closed plane curve i.e. a polar curve given by $r = r(\varphi)$ and suppose that $r(\varphi)$ has a continuos derivative except possibly at a finite number of points. It can be shown, that there exists a constant a such that the curve given by $\varrho = r + a$ is convex.

Er verallgemeinert auch diese Behauptung auf den Fall höherer Dimension.

H. T. CROFT behandelt diese Aufgabe in einer Arbeit: Two problems on convex bodies (Proc. Philos. Soc. Vol. 58, Part 1, Cambridge 1962). Er zeigt, dass obiges Problem in der von ULAM gegebenen Fassung unlösbar ist, und beweist:

Besitzt $r = r(\varphi)$ eine zweite beschränkte Ableitung r'', so existiert die behauptete Konstante a. Ist r'' nicht beschränkt, so gibt es im allgemeinen kein solches a. Das erste beweist er indirekt: Aus der Voraussetzung, es existiere keine endliche Konstante a der behaupteten Art, wird nach langer Rechnung ein Widerspruch hergeleitet, falls r'' beschränkt ist. Zweitens gibt er ein Beispiel einer zweimal differenzierbaren Funktion mit unbeschränktem r'', für welches die Aufgabe keine Lösung besitzt.

Im folgenden wird gezeigt, dass die Aufgabe einfacher gelöst werden kann.

Falls $r(\varphi)$ zweimal differenzierbar ist, so existiert die Krümmung k in jedem Punkt der Kurve. Diese ist genau dann konvex, wenn die Krümmung nirgends negativ ist.

Der Ausdruck für k heisst in Polarkoordinaten:

$$k = \frac{r^2 + 2 r'^2 - r r''}{\sqrt{r^2 + r'^2}^{\,3}} .$$

Soll die Kurve $\varrho = r + a$ ($a =$ konst.) konvex sein, so muss für ihre Krümmung:

$$\frac{r^2 + 2 r a + a^2 + 2 r'^2 - r r'' - a r''}{\sqrt{(r + a)^3 + r'^2}^{\,3}} \geqq 0 ,$$

d. h.

$$a^2 + a (2 r - r'') + r^2 + 2 r'^2 - r r'' \geqq 0$$

gelten. Um hieraus a zu bestimmen, lösen wir die folgende Gleichung ($k = 0$)

$$\alpha^2 + \alpha (2 r - r'') + r^2 + 2 r'^2 - r r'' = 0 .$$

Die Lösung heisst:

$$\alpha = \frac{- 2 r + r'' \pm \sqrt{r''^2 - 8 r'^2}}{2} .$$

Ist diese Grösse überall imaginär, so löst jedes a unter der Einschränkung Min $(r + a) > 0$ die Aufgabe. Nimmt die Wurzel auch reelle Werte an, so ist jedes a mit

$$a \geqq \operatorname{Max} \left[\sup \frac{- 2 r + r'' + \sqrt{r''^2 - 8 r'^2}}{2} , \; - \operatorname{Min} r + \varepsilon \right] \quad (\varepsilon > 0, \text{ beliebig}) \qquad \text{(I)}$$

Lösung, wenn das sup existiert, was der Fall ist, wenn r'' beschränkt ist.

Ist die Funktion $r = r(\varphi)$ nur in einem Intervall kleiner 2π definiert, so gibt es evtl. weitere Lösungen:

$$a \leqq \frac{\inf\left[-2r + r'' - \sqrt{r''^2 - 8r'^2}\right]}{2}.$$

Auch dies befriedigt unsere Aufgabe, wenn nur $\operatorname{Min}(r + a) > 0$ ist. (Ist die Kurve geschlossen, so hat r' eine Nullstelle, weshalb sich die Ungleichungen widersprechen.)

r'' sei nun nicht mehr beschränkt:

Ist $\sup r'' < \infty$, so lässt sich a aus (I) bestimmen, ist $\sup r'' = \infty$, so besitzt die Aufgabe keine Lösung.
M. WEHRLI, Zürich

Aufgaben

Aufgabe 412. Man beweise: Für das ganzwertige Polynom $\binom{x}{n}^2$ vom Grad $2n$ gilt die Darstellung

$$\binom{x}{n}^2 = \binom{n}{0}\binom{n}{0}\binom{x}{n} + \binom{n+1}{1}\binom{n}{1}\binom{x}{n+1} + \binom{n+2}{2}\binom{n}{2}\binom{x}{n+2} + \cdots + \binom{2n}{n}\binom{n}{n}\binom{x}{2n}.$$

W. JÄNICHEN, Berlin-Zehlendorf

1. Lösung: Denkt man sich x Dinge $a_1, a_2, \ldots, a_x$ und x Dinge $b_1, b_2, \ldots, b_x$, so ist $\binom{x}{n}^2$ die Anzahl der Kombinationen von je n aus diesem Vorrat genommenen a mit n Dingen b. Es sei C_{n+k} die Anzahl derjenigen unter diesen Kombinationen, in welchen genau $n + k$ verschiedene Indizes auftreten ($k = 0, 1, \ldots, n$). Es gibt $\binom{x}{n+k}$ derartige Indexmengen. In jeder lassen sich die a noch auf $\binom{n+k}{n} = \binom{n+k}{k}$ Arten auswählen. Unter den b müssen dann notwendig diejenigen (es sind genau k) auftreten, deren Indizes in der betreffenden Indexmenge von den a nicht benützt wurden, während die $n - k$ übrigen auf $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$ Arten ausgewählt werden können. Hieraus folgt

$$C_{n+k} = \binom{n+k}{k}\binom{n}{k}\binom{x}{n+k} \quad \text{und} \quad \binom{x}{n}^2 = \sum_{k=0}^{n} C_{n+k}.$$

C. BINDSCHEDLER, Küsnacht

2. Lösung: Aus $\binom{n+k}{k}\binom{x}{n+k} = \binom{x}{n}\binom{x-n}{k}$ und der bekannten Identität

$$\binom{u+v}{r} = \sum_{k=0}^{r}\binom{u}{k}\binom{v}{r-k}$$

folgt für $u = x - n$ und $v = r = n$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n+k}{k}\binom{n}{k}\binom{x}{n+k} = \binom{x}{n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{x-n}{k} = \binom{x}{n}^2.$$

G. GEISE, Dresden; O. REUTTER, Ochsenhausen

Weitere Lösungen sandten L. CARLITZ (Durham/USA), H. MEILI (Winterthur), I. PAASCHE (München).

Aufgabe 413. Gegeben ist eine Fläche zweiter Ordnung Φ und zwei in bezug auf sie reziproke[1]) Polaren q, r. Man bestimme alle Flächen mit der Eigenschaft, dass die Tangentialebene in jedem Flächenpunkt P die Geraden q, r in zwei zu P konjugierten Punkten schneidet.
C. BINDSCHEDLER, Küsnacht

[1]) In der ursprünglichen Aufgabenstellung stand irrtümlich «konjugierte» Polaren.