Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 17 (1962)
Heft: 6

Artikel: Autoevoluten
Autor: Wunderlich, W.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-21919

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 04.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

ELEMENTE DER MATHEMATIK
Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare
Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrer
Publiziert mit Unterstützung des Schweizerischen Nationalfonds
zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung

El. Math. Band XVII Nr. 6 Seiten 121–144 Basel, 10. November 1962

Autoevoluten

Als «*Autoevolute*» wird eine Kurve bezeichnet, die mit ihrer Evolute zusammenfällt, also ihre eigene Evolute ist. Die vorliegende Note will einige typische, bisher anscheinend nicht bekannte Beispiele von *ebenen Kurven* mit dieser merkwürdigen Eigenschaft vorführen. Den Betrachtungen liegt dabei die *euklidische Ebene* zugrunde. Auf Autoevoluten in der elliptischen oder hyperbolischen Ebene, auf der Kugel oder im Raum soll vielleicht bei anderer Gelegenheit eingegangen werden.

1. Wir denken uns eine ebene Kurve c durch ihre vom Richtungswinkel τ abhängige *Tangentengleichung*

$$x \sin \tau - y \cos \tau = h(\tau) \tag{1}$$

beschrieben. Die *Stützfunktion* $h(\tau)$ gibt den Ursprungsabstand der Tangente t an und legt – stetige Differenzierbarkeit vorausgesetzt – die Kurve c als Einhüllende der Geradenschar (1) fest. Die abgeleitete Gleichung

$$x \cos \tau + y \sin \tau = h'(\tau) \tag{2}$$

stellt eine durch den Berührungspunkt von t gehende und zu t normale Gerade t' dar, also die *Kurvennormale*. Die Hüllkurve der Geradenschar (2) ist demnach die *Evolute* c' von c. – Ausrechnung der Koordinaten x und y aus (1) und (2) würde für die Kurve c eine kartesische Parameterdarstellung liefern, die hier jedoch nicht benötigt wird.

Soll nun die Evolute c' mit der Grundkurve c zusammenfallen, so muss offenbar jede Normale mit einer dazu senkrechten (früheren oder späteren) Tangente identisch sein; es muss daher für alle τ

$$h'(\tau) = h(\tau + \beta) \quad \text{oder} \quad h'(\tau) = -h(\tau - \beta) \quad \text{mit} \quad \beta \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi} \tag{3a, b}$$

gelten. Die Frage nach den Autoevoluten der euklidischen Ebene läuft demnach auf die Lösung der beiden Funktionalgleichungen (3) hinaus. Es handelt sich dabei um die einfachsten Formen *linearer Hystero-Differentialgleichungen* mit konstanter Verzögerung. Der Wissensstand über derartige Gleichungen ist einem zusammenfassenden Bericht von W. Hahn [1][1]) zu entnehmen.

Für uns genügt die Einsicht, dass *elementare Lösungen* in Gestalt von *Exponentialfunktionen* existieren und dass sich durch deren *Linearkombination* beliebig viele weitere Lösungen aufbauen lassen.

[1]) Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 128.

2. Setzen wir eine *Elementarlösung* der Gleichung (3a) mit

$$h = e^{r\tau} \tag{4}$$

an, so ergibt sich für die Konstante r die Bedingung

$$r = e^{r\beta}, \quad \beta \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi} \tag{5}$$

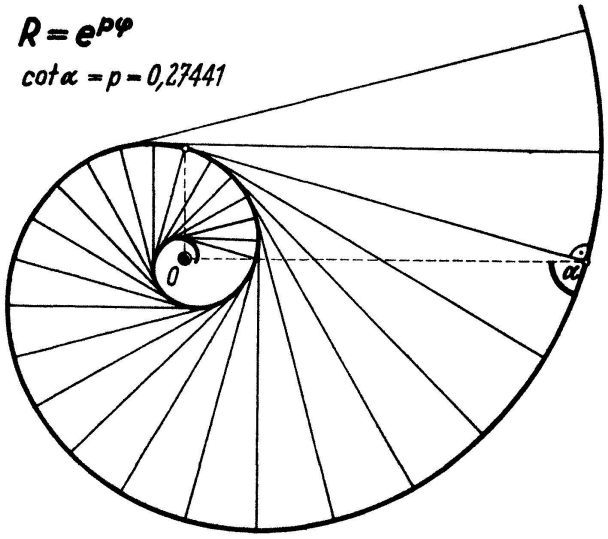
oder ausführlicher, mit $\beta = \pi/2 - 2k\pi$:

$$\ln r + \left(2k - \frac{1}{2}\right)\pi r = 0, \quad k \text{ ganz}. \tag{6}$$

Reelle Lösungen dieser Gleichung sind nur für $k > 0$ vorhanden und können etwa mittels eines Iterationsverfahrens berechnet werden. Sie sind für die niedrigsten Werte von k in Tabelle I zusammengestellt.

Tabelle I

k	$r = p$	β
1	0,27441	$-1{,}5 \cdot \pi$
2	0,16427	$-3{,}5 \cdot \pi$
3	0,12183	$-5{,}5 \cdot \pi$
4	0,09841	$-7{,}5 \cdot \pi$



Figur 1
Logarithmische Spirale als Autoevolute
($k = 1$ aus Tabelle I).

Diese reellen Lösungswerte r führen auf gewisse *logarithmische Spiralen*, deren Kurswinkel α durch $\cot\alpha = r$ bestimmt ist. Auf diese speziellen Autoevoluten haben bereits J. BINET und später wiederum G. SCHEFFERS hingewiesen [2].

M. ALLÉ [3] glaubte sogar bewiesen zu haben, dass derartige logarithmische Spiralen die einzigen Autoevoluten überhaupt wären; sein Irrtum wird aufs deutlichste durch die nachfolgenden Beispiele widerlegt.

Die Funktionalgleichung (3b) liefert bei analoger Behandlung nichts wesentlich Neues, sondern bis auf das Vorzeichen die gleichen r-Werte, also die zu den bereits genannten logarithmischen Spiralen gegensinnig-kongruenten.

3. Die transzendente Gleichung (5) besitzt für jedes β, unabhängig von der Existenz einer reellen Lösung, unendlich viele Paare *konjugiert-komplexer Lösungen*, darunter das Paar $r = \pm i$. Setzen wir $r = q + in$, so schreibt sich die Bedingung (5):

$$q + in = e^{(q+in)\beta} = e^{q\beta}(\cos n\beta + i \sin n\beta).$$

Sie verlangt mithin – auch für $\bar{r} = q - in$ – die Auflösung des Gleichungssystems

$$q = e^{\beta q}\cos\beta n, \quad n = e^{\beta q}\sin\beta n, \quad \beta \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}. \tag{7}$$

Die Einführung des *Hilfswinkels* $\omega = \beta n$ führt diese Aufgabe auf eine einzige Gleichung zurück, nämlich auf

$$\frac{\omega}{\beta} = e^{\omega \cot \omega} \sin \omega ; \tag{8}$$

die gesuchten Grössen ergeben sich dann mit

$$n = \frac{\omega}{\beta}, \quad q = n \cdot \cot \omega . \tag{9}$$

Zur Auflösung der Schlüsselgleichung (8) kann ein *Iterationsprozess* dienen, der aus einem hinreichend guten Näherungswert ω_0 mittels

$$\cot \omega_1 = \frac{1}{\omega_0} \ln \left(\frac{\omega_0}{\beta \sin \omega_0} \right) \tag{10}$$

einen verbesserten Näherungswert ω_1 ableitet und, in der gleichen Weise fortfahrend, im allgemeinen schnell zum Ziel führt.

Tabelle II

−2	1,44317	0,02596	−0,44317	−0,05858	$4{,}5 \cdot \pi$
−1	1,79471	0,07457	−0,79471	−0,09384	$2{,}5 \cdot \pi$
0	4,86835	1,02133	−3,86835	−0,26402	$0{,}5 \cdot \pi$ (Abb. 4)
k	n	q	m	p	β
2	0,44337	0,07212	0,55663	0,12957	$-3{,}5 \cdot \pi$
3	0,63871	0,02590	0,36129	0,07168	$-5{,}5 \cdot \pi$
4	0,73409	0,01311	0,26591	0,04931	$-7{,}5 \cdot \pi$ (Abb. 3)

Tabelle III

−3	0,69357	−0,01790	0,30643	−0,05841	$6{,}5 \cdot \pi$
−2	0,56069	−0,04074	0,43931	−0,09274	$4{,}5 \cdot \pi$
−1	0,26576	−0,15097	0,73424	−0,20557	$2{,}5 \cdot \pi$ (Abb. 2)
k	n	q	m	p	β
1	2,31698	−0,17857	−1,31698	0,13559	$-1{,}5 \cdot \pi$
2	1,56905	−0,04100	−0,56905	0,07205	$-3{,}5 \cdot \pi$
3	1,36287	−0,01792	−0,36287	0,04939	$-5{,}5 \cdot \pi$ (Abb. 5)

Wir setzen wieder $\beta = \pi/2 - 2k\pi$. Der Ausgangswert $\omega_0 = \beta$ würde über $\omega = \beta$ auf die triviale und unbrauchbare Lösung $r = i$ führen. Die benachbarten nichttrivialen Lösungen erhalten wir ausgehend von $\omega_0 = \beta \pm 2\pi$. Die zugehörigen numerischen Werte von n und q sind für die niedrigsten Indizes k in Tabelle II und III zusammengestellt.

Zu den in den Tabellen fehlenden Indizes $k = 1$ bzw. 0 existieren keine entsprechenden Lösungen. Analoge Tabellen könnten natürlich noch mit den Ausgangswerten $\omega_0 = \beta \pm 4\pi$ usf. berechnet werden. Auf die Auswertung der Funktionalgleichung (3b) darf hingegen wiederum verzichtet werden.

4. Durch Linearkombination zweier zu konjugiert-komplexen Werten $r_{1,2} = q \pm i n$ gehörigen Elementarlösungen erhält man bei Verwendung konjugiert-komplexer Koeffizienten $c_{1,2} = 1/2\,(a \pm i\,b) \neq 0$ *reelle Autoevoluten «2. Stufe»*. Ihre Stützfunktion $h(\tau)$ hat die Bauart

$$h(\tau) = \frac{1}{2}(a + i\,b)\, e^{(q+in)\tau} + \frac{1}{2}(a - i\,b)\, e^{(q-in)\tau} = e^{q\tau}(a \cos n\tau - b \sin n\tau). \tag{11}$$

Durch Drehung des Koordinatensystems und Maßstabänderung lässt sich die Stützfunktion auf die vereinfachte Form

$$h(\tau) = e^{q\tau} \sin n\tau \tag{12}$$

bringen, die der folgenden Untersuchung zugrundegelegt sein mag. Die Konstanten seien zunächst beliebig, also vorläufig nicht durch (7) eingeschränkt; ausgeschlossen seien jedoch $q = 0$, $n = 0$ und $n = \pm 1$.

Setzen wir

$$n = 1 - m, \quad q = mp, \tag{13}$$

so lässt sich die Tangentengleichung (1) umformen zu

$$x \sin \tau - y \cos \tau = e^{mp\tau} (\cos m\tau \sin \tau - \sin m\tau \cos \tau). \tag{14}$$

Hieraus ist abzulesen, dass die Tangente t mit dem Richtungswinkel τ den «Leitpunkt» M mit den Koordinaten

$$X = e^{pm\tau} \cos m\tau, \quad Y = e^{pm\tau} \sin m\tau \tag{15}$$

enthält. Dieser Leitpunkt durchläuft mit variablem τ eine *logarithmische «Leitspirale»* l mit der Polargleichung

$$R = e^{p\varphi}. \tag{16}$$

Hieraus folgt eine einfache *kinematische Erzeugung* der durch die Stützfunktion (12) beschriebenen Kurve c: dieselbe entsteht als Einhüllende einer beweglichen Geraden t, die sich mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit $+1$ um einen ihr angehörenden Punkt M dreht, während dieser mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit m auf einer logarithmischen Spirale wandert.

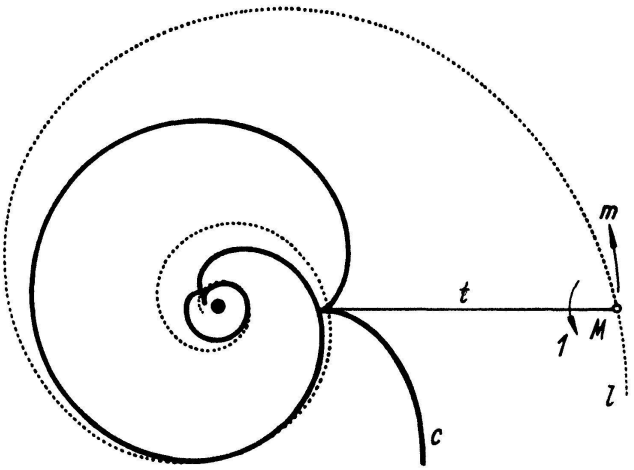
Im Hinblick darauf, dass diese kinematische Erzeugung im Grenzfall $q = 0$ (der durch eine kreisförmige Leitkurve l gekennzeichnet ist) in bekannter Weise auf die *Zykloiden* führt – und zwar auf Epizykloiden bei $|n| < 1$, auf Hypozykloiden bei $|n| > 1$ –, liegt es nahe, die Kurven (12) im allgemeinen Falle $q \neq 0$ «*Spiraloiden*» zu nennen, wobei analog zwischen «Epispiraloiden» ($|n| < 1$) und «Hypospiraloiden» ($|n| > 1$) unterschieden werden kann. Eine weitere Rechtfertigung für die vorgeschlagene Namensgebung ist in der leicht zu beweisenden Tatsache zu erblicken, dass das Polkurvenpaar für die Bewegung des durch das Linienelement (M, t) repräsentierten starren Systems von zwei logarithmischen Spiralen gebildet wird, die an die Stelle des Rollkreispaares bei den Zykloiden treten. Im übrigen haben die Spiraloiden viele bemerkenswerte Eigenschaften mit den Zykloiden gemeinsam, wie eine nähere Betrachtung gezeigt hat [4]. Schon rein äusserlich fällt der verwandte, durch die kinematische Erzeugung bedingte *periodische Bau* auf: Jede Spiraloide setzt sich aus unendlich vielen untereinander ähnlichen Elementarbögen zusammen, die in Spitzen aneinandergeheftet sind; die Länge des Periodenintervalls für τ ist π/n, der entsprechende Zentriwinkel des Elementarbogens beträgt daher $m\pi/n$. Die Spiraloide gestattet demnach eine *diskontinuierliche Gruppe von Drehstreckungen*

$$\varphi^* = \varphi + \lambda\delta, \quad R^* = R \cdot e^{p\lambda\delta}, \quad \lambda \text{ ganz}, \quad \delta = \frac{m\pi}{n}. \tag{17}$$

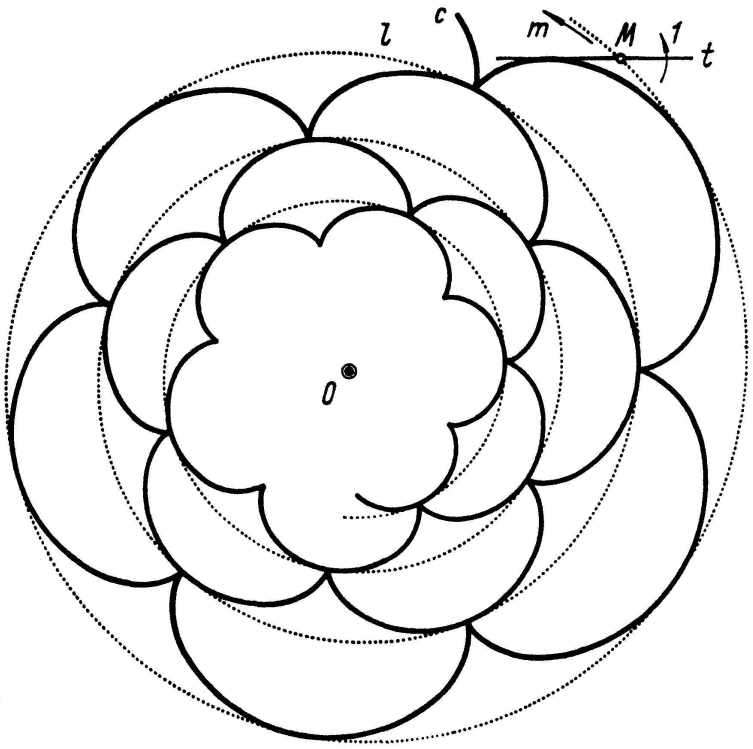
Für uns ist von besonderem Interesse, dass *jede Spiraloide zu ihrer Evolute ähnlich* ist. Dies ist unmittelbar aus der Bauart der Evolutenstützfunktion

$$h'(\tau) = e^{q\tau} (n \cos n\tau + q \sin n\tau) \tag{18}$$

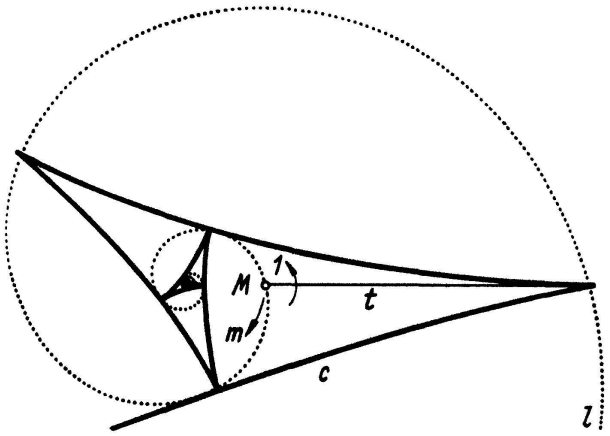
zu erkennen, die wiederum vom Typ (11) ist. In dieser Eigenschaft, jedoch durch ihre «natürliche Gleichung» $\varrho = \varrho(\tau)$ beschrieben, finden die Spiraloiden eine flüchtige Erwähnung bei V. A. PUISEUX [5]. Jene Spiraloiden, die zu ihrer Evolute nicht bloss ähnlich, sondern sogar *kongruent* sind, bestimmten neuerdings C. A. CROMMELIN und W. VAN DER WOUDE [6]. Jene Spiraloiden schliesslich, die mit ihrer Evolute *identisch* sind, ergeben sich für solche Konstanten q und n, die der Bedingung (7) genügen. Einige typische Formen solcher Autoevoluten 2. Stufe zeigen die Figuren 2–5.



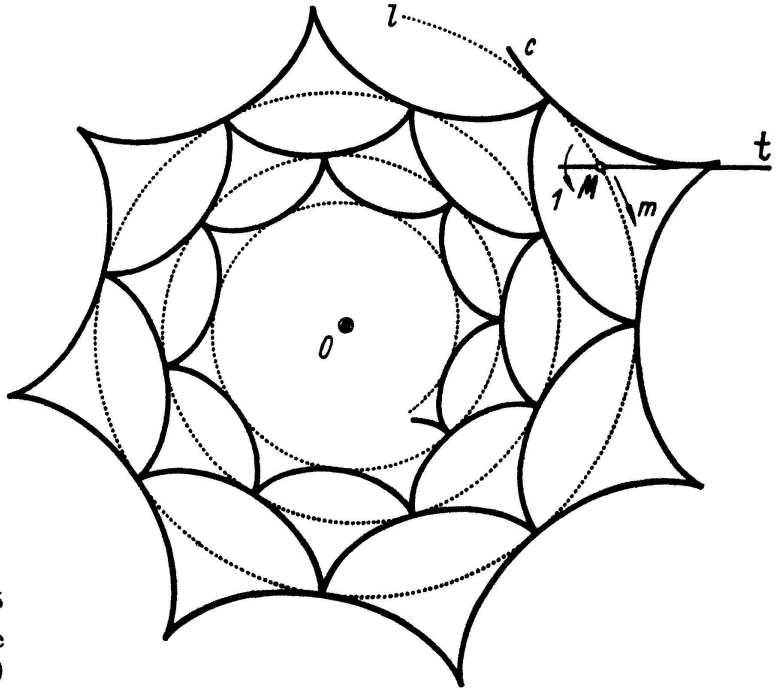
Figur 2
Autoevolute 2. Stufe
(Epispiraloide $k = -1$ aus Tabelle III)



Figur 3
Autoevolute 2. Stufe
(Epispiraloide $k = 4$ aus Tabelle II)



Figur 4
Autoevolute 2. Stufe
(Hypospiraloide $k = 0$ aus Tabelle II)



Figur 5
Autoevolute 2. Stufe
(Hypospiraloide $k = 3$ aus Tabelle III)

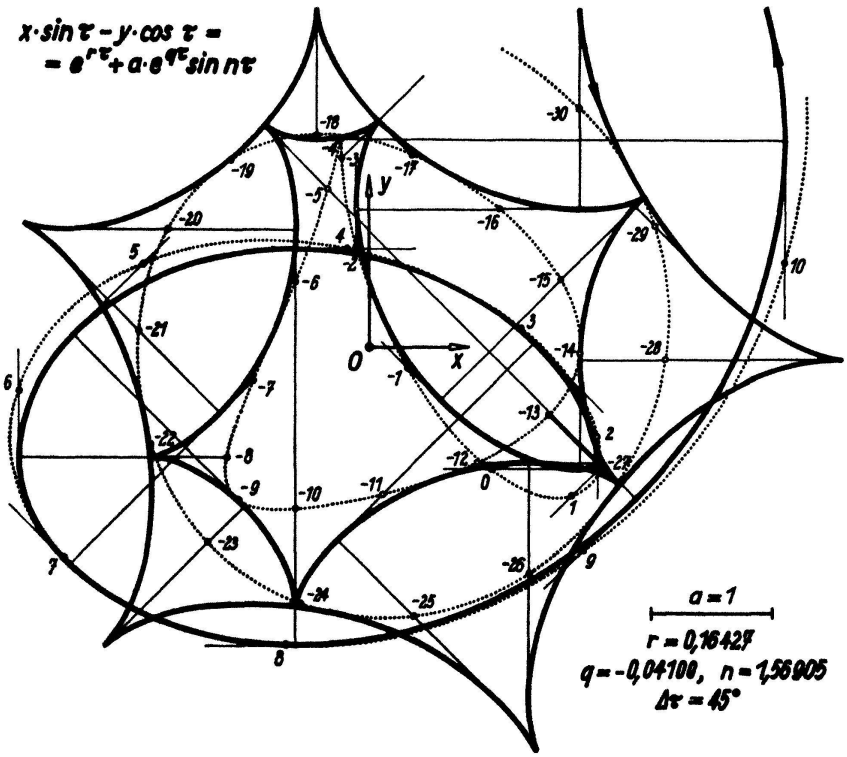
5. Reelle *Autoevoluten höherer Stufe* können nunmehr durch Linearkombination von reellen Elementarlösungen aus Abschnitt 2 und sekundären Lösungen aus Ab-

schnitt 4 aufgebaut werden, wobei natürlich nur solche Komponenten zusammenpassen, die zur gleichen Verzögerung β gehören; sie sind in den Tabellen I, II und III unter dem gleichen Index k zu finden.

Für eine *Autoevolute 3. Stufe* lässt sich die Stützfunktion nach geeigneter Drehung und Maßstabseichung des Koordinatensystems auf die Gestalt

$$h(\tau) = e^{r\tau} + a\, e^{q\tau} \sin n\tau \tag{19}$$

bringen. Ein typisches Beispiel, mit $a = 1$ und den zu $k = 2$ gehörigen Werten aus Tabelle I und III gebildet, zeigt Figur 6. Wegen $r > 0$ und $q < 0$ weist die Kurve im



Figur 6
Autoevolute 3. Stufe ($k = 2$ aus Tabelle I und III)

positiven Parameterbereich (wo der erste Gleichungsterm überwiegt) den Charakter einer logarithmischen Spirale auf, im negativen hingegen (wo der zweite Term zur Geltung kommt) mehr das Verhalten einer Hypospiraloide ($|\, n \,| > 1$) mit deren nach aussen gekehrten Spitzen. – Zur Konstruktion wurde auch hier auf Grund der Substitution (13) jene *Leitspirale* l herangezogen, die der Tangentenpunkt M mit den Koordinaten

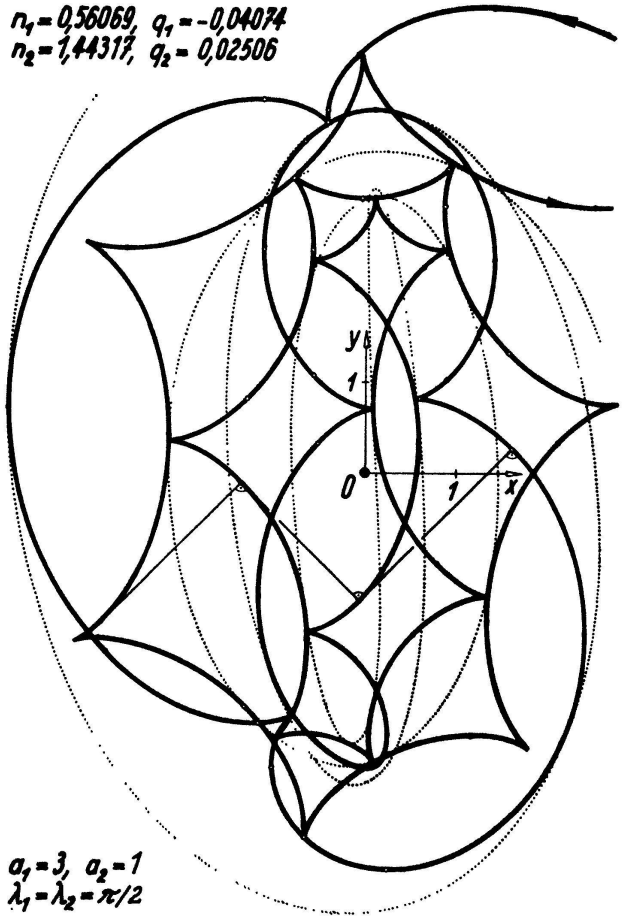
$$X = e^{r\tau} \sin \tau + e^{q\tau} \cos m\tau, \qquad Y = -\, e^{r\tau} \cos \tau + e^{q\tau} \sin m\tau \tag{20}$$

durchläuft, während sich die Tangente gleichförmig um ihn dreht. Diese Leitspirale lässt sich durch Addition entsprechender Radienvektoren zweier logarithmischen Spiralen unschwer ermitteln. Dies geschah in 45°-Schritten, auf welche sich die Nummern in der Figur beziehen. Entsprechend der Verzögerung $\beta = -\, 7\pi/2$ wird dann jeweils die Tangente mit der Nummer ν ($\tau = \nu\pi/4$) von der Tangente mit der Nummer $\nu - 14$ (= Normale zu t_ν) im Berührungspunkt geschnitten.

Eine *Autoevolute 4. Stufe* besitzt eine Stützfunktion, die allgemein folgendermassen geschrieben werden kann:

$$h(\tau) = a_1 e^{q_1\tau} \sin(n_1\tau - \lambda_1) + a_2 e^{q_2\tau} \sin(n_2\tau - \lambda_2). \tag{21}$$

Das in Figur 7 wiedergegebene Beispiel verwendet die zu $k = -2$ gehörigen Werte aus Tabelle II und III, kombiniert mittels $a_1 = 1$, $a_2 = 3$ und $\lambda_1 = \lambda_2 = \pi/2$. Wegen



Figur 7
Autoevolute 4. Stufe ($k = -2$ aus Tabelle II und III)

$q_1 > 0$ und $q_2 < 0$ nähert sich die Kurve mit wachsendem τ dem Aussehen einer Hypospiraloide ($|n_1| > 1$), mit abnehmendem τ hingegen dem Verhalten einer Epispiraloide ($|n_2| < 1$). Zur Konstruktion wurde wieder vom Tangentenpunkt M

$$\begin{aligned} X &= a_1 e^{q_1\tau} \cos(m_1\tau + \lambda_1) + a_2 e^{q_2\tau} \cos(m_2\tau + \lambda_2), \\ Y &= a_1 e^{q_1\tau} \sin(m_1\tau + \lambda_1) + a_2 e^{q_2\tau} \sin(m_2\tau + \lambda_2) \end{aligned} \tag{22}$$

durchlaufene, in der Figur punktiert eingetragene *Leitspirale* benutzt, die durch Superposition zweier (gegenläufigen) logarithmischen Spiralen gewonnen werden kann. Die hervorgehobenen Punkte markieren wie in Figur 6 die 45°-Schritte von τ. Beim Zeichnen von Autoevoluten wird man natürlich die Kenntnis der Krümmungsmittelpunkte ausnützen und passende Krümmungskreise heranziehen.

W. WUNDERLICH, Wien

LITERATURVERZEICHNIS

[1] W. HAHN: *Bericht über Differential-Differenzengleichungen mit festen und veränderlichen Spannen.* Jber. DMV *57* (1954), 55–84. – Speziell auf den Gleichungstyp (3) zugeschnitten ist die eingehende Untersuchung von F. SCHÜRER: *Über die Funktional-Differentialgleichung* $f'(x+1) = a\,f(x)$. Ber. Verh. Sächs. Ges. Wiss. *64* (1912), 167–236. Vgl. auch Bd. *65* (1913), 239–246, 247–263.

[2] J. BINET: *Remarque sur une courbe qui est sa propre développée etc.* J. math. pur. appl. *6* (1841), 61–64. G. SCHEFFERS: *Einführung in die Theorie der Kurven* (Leipzig 1901), S. 71.

[3] M. ALLÉ: *Ein Beitrag zur Theorie der Evoluten.* Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien *113* (1904), 53–70.

[4] W. WUNDERLICH: *Sur une certaine généralisation des cycloïdes.* Simon Stevin (im Druck).

[5] V. A. PUISEUX: *Problèmes sur les développées et les développantes des courbes planes.* J. math. pur. appl. *9* (1844), 377–399. – In dieser und anderen Abhandlungen wird eine ebene Kurve durch die Abhängigkeit des Krümmungshalbmessers ϱ vom Tangentenwinkel τ dargestellt. Die einschlägigen Fragen können jedoch meist einfacher mit Hilfe der Stützfunktion $h(\tau)$ behandelt werden, die überdies eine Konstruktion der Kurve ohne Integration gestattet.

[6] C. A. CROMMELIN, W. VAN DER WOUDE: *Quelle courbe est égale à sa développée? Un cas simple.* Simon Stevin *30* (1953), 17–24.

Über gewogene Mittelwerte, insbesondere gewogene geometrische Mittel

Für die einfache Quadratfunktion

$$f(x) = c\,x^2\,, \qquad c = \text{const}. \tag{1}$$

gilt die einfache, aber wenig bekannte Beziehung

$$f\left(\frac{x_i + x_k}{2}\right) = \frac{1}{4}\left(f(x_i) + 2\left(f(x_i)\,f(x_k)\right)^{1/2} + f(x_k)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{f(x_i) + f(x_k)}{2} + \sqrt[+]{f(x_i)\,f(x_k)}\right), \qquad x_i \neq x_k\,. \tag{II}$$

das heisst dem arithmetischen Mittel zweier Argumente entspricht der Durchschnitt zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel der beiden bezüglichen Funktionswerte.

Weiter findet man für die einfache Potenzfunktion n. Grades

$$f(x) = c\,x^n\,, \qquad c = \text{const}. \tag{III}$$

die Beziehung

$$f\left(\frac{x_i + x_k}{2}\right) = \frac{1}{2^n}\sum_0^n{}^{t}\binom{n}{t}\left(f^{n-t}(x_i)\,f^t(x_k)\right)^{1/n}, \qquad x_i \neq x_k\,. \tag{IV}$$

Der zweite Faktor hinter dem Summenzeichen ist ein gewogenes geometrisches Mittel. Setzen wir für $f(x_i) = a$, $f(x_k) = b$, so haben wir für das gewogene geometrische Mittel die Gestalt

$$g = (a^{n-t}\,b^t)^{1/n}\,, \qquad n \geq t \geq 0\,. \tag{V}$$