

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 17 (1962)  
**Heft:** 5  
  
**Rubrik:** Aufgaben

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 23.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &\approx 50^\circ; \quad \operatorname{tg} \alpha_1 = \sqrt{7}/5; & \cos 2 \alpha_1 &= -1/6 \\
\alpha_2 &\approx 65^\circ; \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = \sqrt{9-2\sqrt{5}}; & \cos 4 \alpha_2 &= -3(\sqrt{5}-1)/20 = -0,6 \cos 72^\circ \\
\alpha_3 &\approx 75^\circ; \quad \operatorname{tg} \alpha_3 = \sqrt{9+2\sqrt{5}}; & \cos 4 \alpha_3 &= 3(\sqrt{5}+1)/20 = 0,6 \cos 36^\circ \\
\alpha_4 &\approx 101^\circ; \quad \operatorname{tg} \alpha_4 = -3-\sqrt{5} \\
\alpha_5 &\approx 117^\circ; \quad \operatorname{tg} \alpha_5 = -2 \\
\alpha_6 &\approx 143^\circ; \quad \operatorname{tg} \alpha_6 = -3+\sqrt{5}; \quad \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 = 360^\circ.
\end{aligned}$$

HANS-CHRISTOF LENHARD, Neukirchen-Vluyn Kr. Moers (Deutschland)

### Remark on perfect numbers

The purpose of this note is to prove the following

*Theorem.* 28 is the only even perfect number of the form  $x^3 + 1$ .

Proof: It is well known that all even perfect numbers are of the form

$$2^{p-1} \cdot (2^p - 1), \quad (1)$$

where  $2^p - 1$  is a prime number. Hence, for a prime number  $p \geq 3$  we have  $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{3}$ ,  $2^p - 1 \equiv 1 \pmod{3}$ , thus  $2^{p-1} (2^p - 1) \equiv 1 \pmod{3}$ . If  $2^{p-1} (2^p - 1) = x^3 + 1$ , then  $x$  is divisible by 3;  $x = 3y$  and

$$2^{p-1} (2^p - 1) = (x + 1) (x^2 - x + 1).$$

We observe that  $(x + 1, x^2 - x + 1) = (x + 1, -2x + 1) = (x + 1, 3) = (3y + 1, 3) = 1$ . Because  $x > 2$ , we have  $x^2 - x + 1 > x + 1 > 1$ . But the only representation of even perfect number as the product of two relatively prime positive integers both  $> 1$  is that given by (1). Hence  $x + 1 = 2^{p-1}$ ,  $x^2 - x + 1 = 2^p - 1$ . Therefore  $2x + 2 = 2^p$ ,  $x^2 - x + 1 = 2^p - 1$  and on subtracting we get  $-x^2 + 3x + 1 = 1$ ,  $-x(x - 3) = 0$ . Hence  $x = 3$  and we get the perfect number  $3^3 + 1 = 2^{3-1} (2^3 - 1) = 28$ .

*Corollary 1.* 28 is the only even perfect number of the form  $n^n + 1$ .

Proof: If  $n^n + 1$  is an even perfect number, then  $n$  is divisible by 3;  $n = 3k$  and  $[(3k)^k]^3 + 1$  is an even perfect number. By theorem  $(3k)^k = 3$ , hence  $k = 1$ ,  $n = 3$ ,  $n^n + 1 = 28$ .

*Corollary 2.* There is no even perfect number of the form

$$n^{n \cdot \cdot \cdot n} + 1, \quad (2)$$

if the number of  $n$ 's in (2) is  $\geq 3$ .

A. MĄKOWSKI (Warsaw)

### Aufgaben

**Aufgabe 406.** Aufgabe über die Lagebeziehung eines Vierecks zu vier Parabeln: Bilden vier Punkte einer Ebene ein konvexes Polygon, dann lassen sich durch jeden der vier Punkte im allgemeinen zwei reelle Parabeln legen, die die Verbindungsgeraden der drei anderen Punkte berühren. Bezeichnet man die Parabeln durch den Punkt  $P_k$  ( $k = 0, 1, 2, 3$ ) mit  $p_k$  und  $p'_k$ , die Berührungsstrecken von  $p_k$  bzw.  $p'_k$  mit der Geraden  $[P_{k+p}, P_{k+p+1}]$  mit  $T_{k,k+2p+1}$  bzw.  $T'_{k,k+2p+1}$ \*) ( $p = 1, 2$ ) so gilt

$$(T_{k,k+1} P_{k-2} \cdot P_{k-1}) = \frac{1}{(T_{k,k-1} P_{k-2} \cdot P_{k-3})} \quad (1)$$

das heisst die von einem Eckpunkt  $P_{k-2}$  an die Parabel  $p_k$  ausgehenden Tangentenstrecken werden von den Punkten  $P_{k-1}$  und  $P_{k-3}$  in reziprokem Verhältnis geteilt. Ferner gilt

$$(T_{k,k+1} P_{k-2} \cdot P_{k-1}) = (T_{k+1,k} P_{k-1} \cdot P_{k-2}) \quad (2)$$

\*) Bei Summation der Indizes ist die Indexzahl stets modulo vier zu setzen.

das heisst die Berührpunkte  $T_{k,k+1}$ ,  $T_{k+1,k}$  der Parabeln  $p_k$  und  $p_{k+1}$  mit der Seite  $[P_{k+2}, P_{k+3}]$  liegen symmetrisch bezüglich des Halbierungspunktes der Seite  $[P_{k+2}, P_{k+3}]$ .

E. SCHRÖDER, Dresden

*Lösung des Aufgabenstellers:* Durch affine Transformation ist stets erreichbar, dass die vier Eckpunkte des Polygons in einem rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem folgende Punktkoordinaten besitzen:

$$P_0(0, 1), \quad P_1(0, 0), \quad P_2(1, 0), \quad P_3(a, b).$$

$P_3$  ist hierbei so zu wählen, dass  $ab(a + b - 1) > 0$  gilt.

Zunächst wird die Gleichung jenes Büschels von Parabeln aufgestellt, die die Geraden  $x = 0$ ,  $y = 0$  und  $x + y = 1$  als Tangenten besitzt.  $Q_0, \dots, Q_3$  sind Schnittpunkte je zweier Tangenten des Parabelbüschels, die folgenden Gleichungen in Linienkoordinaten genügen:

$$Q_0 \dots (u_3 = 0), \quad Q_1 \dots (u_1 + u_3 = 0), \quad Q_2 \dots (u_1 - u_2 = 0), \quad Q_3 \dots (u_2 = 0).$$

Für das Parabelbüschel gilt daher in Linienkoordinaten

$$u_1 \cdot u_3 - u_2 \cdot u_3 + \lambda(u_1 \cdot u_2 + u_2 \cdot u_3) = 0.$$

Der Parameter  $\lambda$  ist noch so zu bestimmen, dass die Parabelgleichung für  $P_3(a, b)$  erfüllt ist.

In homogenen Punktkoordinaten befriedigt das Berührbüschel von Parabeln die Gleichung

$$\begin{vmatrix} 0 & \lambda & 1 & x_1 \\ \lambda & 0 & \lambda - 1 & x_2 \\ 1 & \lambda - 1 & 0 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

oder inhomogen

$$(\lambda - 1)^2 x^2 - 2(\lambda - 1)xy + y^2 - 2\lambda(\lambda - 1)x - 2\lambda y + \lambda^2 = 0.$$

Als Berührpunkte der Parabel erhält man für die Tangenten

$$y = 0 \dots T_{3,0}\left(\frac{\lambda}{\lambda - 1}, 0\right), \quad x = 0 \dots T_{3,2}(0, \lambda)$$

Als Wurzeln von  $\lambda$  ergeben sich

$$\lambda_{1,2} = \frac{a(a + b - 1) + b \pm 2\sqrt{ab(a + b - 1)}}{(a - 1)^2},$$

was nach Voraussetzung zwei getrennte reelle Lösungen sind.

Die bisherigen Ergebnisse bestätigen das Bestehen von Gleichung (1).

Weiterhin ist die Gleichung des Berührbüschels von Parabeln aufzustellen, die die Geraden

$$y = 0, \quad y = \frac{b}{a}x \quad \text{und} \quad y = \frac{b}{a}(x - 1)$$

als gemeinsame Tangenten besitzen.

Die Schnittpunkte je zweier Tangenten  $R_0 \dots R_3$  dieses zweiten Berührbüschels befriedigen folgende Gleichungen in Linienkoordinaten:

$$R_0 \dots (u_1 + u_3 = 0), \quad R_1 \dots (u_1 a + u_2 b + u_3 = 0),$$

$$R_2 \dots (u_1 = 0), \quad R_3 \dots (u_1 a + u_2 b = 0).$$

In Linienkoordinaten genügt das Berührbüschel folgender Gleichung:

$$u_1^2 \cdot a(1 + \mu) + u_1 \cdot u_2 \cdot b(1 + \mu) + u_1 \cdot u_3(a + \mu) + b \cdot u_2 \cdot u_3 = 0.$$

In homogenen Punktkoordinaten erfüllt das zweite Berührbüschel von Parabeln die Gleichung

$$\begin{vmatrix} 2a(1+\mu) & b(1+\mu) & a+\mu & x_1 \\ b(1+\mu) & 0 & b & x_2 \\ a+\mu & b & 0 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

oder inhomogen

$$\begin{aligned} b^2 x^2 - 2b(a+\mu)xy + (a+\mu)^2 y^2 - 2b^2(1+\mu)x \\ - 2b(1+\mu)(\mu-a)y + b^2(1+\mu)^2 = 0. \end{aligned}$$

Als Berührpunkt der Tangente  $y = 0$  ergibt sich  $T_{0,3}(1+\mu, 0)$ .

Wählt man aus dem Parabelbüschel diejenigen aus, die den Punkt  $P_0(0,1)$  enthalten, so hat man

$$\mu_{1,2} = \frac{-b(a+b-1) - a \pm 2\sqrt{ab(a+b-1)}}{(b-1)^2}$$

zu setzen.

Die Rechnung zeigt, dass  $1+\mu = 1/(\lambda-1)$  gilt. Dies bestätigt das Bestehen von Gleichung (2).

Ist speziell

$$(T_{k,k+1} P_{k+2} \cdot P_{k+1}) = -1,$$

so folgt aus einer bekannten Parabeleigenschaft und den obigen Beziehungen der Satz:

Liegen vier Punkte  $P_k$  ( $k = 0, 1, 2, 3$ ) in einer Ebene derart, dass sich durch einen Punkt  $P_k$  eine Parabel legen lässt, die das Dreieck  $P_{k+1} P_{k+2} P_{k+3}^*$  als Tangentendreieck besitzt und die Seite  $P_{k+1} P_{k+2}$  in ihrem Mittelpunkt berührt, so gilt diese Lagebeziehung auch bei zyklischer Vertauschung der Punkte, das heisst es gibt drei weitere Parabeln  $P_{k+i}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) durch  $P_{k+i}$ , die das Dreieck  $P_{k+i+1} P_{k+i+2} P_{k+i+3}$  als Tangentendreieck besitzen und die Seite  $P_{k+i+1} P_{k+i+3}$  in ihrem Mittelpunkt berühren.

**Aufgabe 407.** Man berechne die Diskriminante

$$D = \prod_{i < j} (x_j - x_i)^2$$

der algebraischen Gleichung

$$x^n - x^{n-1} - x^{n-2} - \cdots - x - 1 = 0$$

mit den Wurzeln  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

A. AMMANN, Chexbres

*Lösung:* Aus dem Polynom

$$p(x) = x^n - x^{n-1} - \cdots - x - 1$$

bilden wir durch Multiplikation mit  $x - 1$  das Polynom

$$q(x) = p(x) \cdot (x - 1) = x^{n+1} - 2x^n + 1,$$

welches die  $n + 1$  Nullstellen  $x_0 = 1, x_1, x_2, \dots, x_n$  besitzt. Zwischen den Diskriminanten  $D$  und  $D^*$  der Polynome  $p(x)$  beziehungsweise  $q(x)$  besteht die Beziehung

$$D^* = D \cdot \prod_{i=1}^n (x_i - x_0)^2 = D \cdot \{p(1)\}^2 = D \cdot (n-1)^2.$$

Versteht man unter  $q'(x)$  die Ableitung des Polynoms  $q(x)$ , so gilt für die Diskriminante  $D^*$  auch die Darstellung

$$\begin{aligned} D^* &= (-1)^{n(n+1)/2} \cdot q'(x_0) \cdot q'(x_1) \cdot \cdots \cdot q'(x_n) = (-1)^{n(n+1)/2} \prod_{i=0}^n \{(n+1)x_i^n - 2n x_i^{n-1}\} = \\ &= (-1)^{n(n+1)/2} \prod_{i=0}^n \left\{ - (n+1) \cdot x_i^{n-1} \left( \frac{2n}{n+1} - x_i \right) \right\}. \end{aligned}$$

Beachtet man, dass

$$\prod_{i=0}^n x_i = (-1)^{n+1}$$

und

$$\prod_{i=0}^n \left( \frac{2n}{n+1} - x_i \right) = q \left( \frac{2n}{n+1} \right) = 1 - 2^{n+1} \cdot n^n \cdot (n+1)^{-(n+1)},$$

so sieht man sofort, dass

$$D^* = (-1)^{n(n+1)/2} \{ (n+1)^{n+1} - 2^{n+1} \cdot n^n \}$$

und daher

$$D = (-1)^{n(n+1)/2} (n-1)^{-2} \cdot \{ (n+1)^{n+1} - 2^{n+1} \cdot n^n \}.$$

K. GRÜN (Linz/Donau)

Weitere Lösungen sandten C. BINDSCHEDLER (Küschnacht), L. CARLITZ (Duke University, Durham N.C. USA), G. GEISE (Dresden), W. JÄNICHEN (Berlin).

**Aufgabe 408.** *Zwei Bälle im straffgezogenen Beutel.* Zwei Kugeln, die eine vom Radius  $R$ , die andere vom Radius  $r$ , berühren sich. Man beweise, dass die drei fundamentalen Masszahlen des kleinsten konvexen Körpers, der beide Kugeln enthält, Volumen, Oberfläche und Integral der mittleren Krümmung, folgendermassen ausgedrückt werden können:

$$\frac{4\pi}{3} \frac{R^6 - r^6}{R^2 - r^2}, \quad 4\pi \frac{R^4 - r^4}{R^2 - r^2}, \quad 4\pi \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2}.$$

(Für die Definition der dritten Masszahl vergleiche etwa H. HADWIGER: *Altes und Neues über konvexe Körper*, III. Kapitel). G. PÓLYA, Stanford University, USA

*Lösung:* Man bildet die konvexe Hülle der beiden Kugeln. Der in Frage stehende Körper ist ein äusserer Parallelkörper eines Kappenkörpers der Kugel mit dem Radius  $R-r$ . Für einen solchen Kappenkörper gelten folgende Formeln (vgl. H. HADWIGER, *Altes und Neues über konvexe Körper*, Birkhäuser Verlag Basel 1955, S. 56).

$$C = C_0 = 4\pi, \quad M = \omega M_0, \quad F = \omega F_0, \quad V = \omega V_0.$$

Hierbei bedeuten  $C$  die Gesamtkrümmung,  $M$  das Integral der mittleren Krümmung,  $F$  die Oberfläche und  $V$  das Volumen. Der Index 0 bezieht sich auf die Kugel mit dem Radius  $R-r$ . Da der Kappenkörper nur eine einzige Kappe trägt, ist

$$\omega = 1 + (1 - \sin \alpha)^2 / 4 \sin \alpha,$$

wo  $\alpha$  den halben Öffnungswinkel des von der Kappenspitze an die Kugel gelegten Kappenkegels bezeichnet. Wegen  $\sin \alpha = (R-r)/(R+r)$  erhält man  $\omega = R^2/(R^2 - r^2)$ . Für die Masszahlen des Kappenkörpers erhält man jetzt:

$$V_K = 4\pi (R-r)^2 R^2 / 3 (R+r), \quad F_K = 4\pi (R-r) R^2 / (R+r), \quad M_K = 4\pi R^2 / (R+r).$$

Benutzt man jetzt die Formeln von STEINER für den Parallelkörper (l.c. S. 34)

$$V_\varrho = V + F\varrho + M\varrho^2 + C\varrho^3 / 3, \quad F_\varrho = F + 2M\varrho + C\varrho^2, \quad M_\varrho = M + C\varrho, \quad C_\varrho = C$$

und setzt in ihnen  $\varrho = r$ , so erhält man sofort die in der Aufgabe angegebenen Formeln.

H. BIERI, Bern

Die Formeln für  $V$  und  $F$  lassen sich mit elementarer Stereometrie gewinnen. In der Formel für  $M$  tritt das Integral  $I$  der mittleren Krümmung für einen Kegelstumpf auf. H. MEILI (Winterthur) gewinnt  $I$  auf folgende Weise: Nach dem Satz von MEUSNIER ist in einem Punkt mit dem Abstand  $a$  von der Kegelachse der Krümmungsradius des Schnittes senkrecht zur Mantellinie gleich  $a/\cos \alpha$  und somit die mittlere Krümmung

$$H = (0 + a^{-1} \cos \alpha) / 2.$$

Somit ist

$$I = \int H \, df = \int 2 \pi a H \, ds = \int \pi dh = \pi h,$$

weil  $ds = dh/\cos \alpha$ , wobei  $h$  die Höhe des Kegelstumpfes bedeutet. In unserem Fall ergibt sich somit

$$I = 4 \pi R r / (R + r).$$

Weitere Lösungen sandten L. KIEFFER (Luxemburg) und I. PAASCHE (München).

**Aufgabe 409.** Aus einem genügend schmalen rechteckigen Streifen wird durch Zusammenfügen der Schmalseiten a) eine zylindrische Fläche, b) ein Möbiussches Band gebildet. Beide Flächen werden so flachgedrückt, das heisst zwischen zwei zusammenfallende Ebenen gelegt, dass nur dreieckige Selbstüberdeckungen des Streifens längs der Faltkanten auftreten. Welche Figuren werden von den durch die Faltkanten bestimmten Geraden gebildet und in welcher Beziehung stehen sie zu dem flachgedrückten Streifen?

W. JÄNICHEN, Berlin

*Lösung des Aufgabenstellers:* Ist  $UV$  eine Kniffkante, so bilden die beiden durch  $U$  gehenden Seitengeraden des planparallelen Streifens nach dem Falten mit  $UV$  gleiche Winkel, ebenso die durch  $V$  gehenden Geraden.

a) Hier gibt es, wie man leicht sieht, vier Kniffkanten, die ein Viereck  $ABCD$  bilden. Die beiden getrennten Seitengeraden des rechtwinkligen Streifens bilden je ein  $ABCD$  einbeschriebenes Viereck  $EFGH$  und  $E'F'G'H'$ , in denen zwei aufeinander folgende Seiten gleiche Winkel mit den Seiten des Vierecks  $ABCD$  bilden, an denen sie zusammenstossen. Ein solches Viereck hat unter allen  $ABCD$  einbeschriebenen Vierecken den kleinstmöglichen Umfang (Prinzip des minimalen Lichtweges). Solche Minimalvierecke gibt es aber nicht für jedes Viereck  $ABCD$ . Sind  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  die Winkel von  $ABCD$  und  $\mu = \measuredangle BEF = \measuredangle AEH$ , so erhalten wir der Reihe nach für die «Reflexionswinkel» bei  $F, G, H, E$  die Werte  $\pi - \mu - \beta, \mu + \beta - \gamma, \pi - \mu - \beta + \gamma - \delta, \mu + \beta - \gamma + \delta - \alpha = \mu$ , also ist  $\alpha + \gamma = \beta + \delta$  und  $ABCD$  ist ein Sehnenviereck. (Ein Minimalviereck im Sehnenviereck ergibt sich, indem man vom Diagonalenschnittpunkt Lote auf die vier Seiten fällt. Jedes andere eingeschriebene Viereck, dessen Seiten parallel zu den Seiten des so erhaltenen Minimalvierecks sind, ist ebenfalls ein Minimalviereck.)

b) Hier gibt es drei Kniffkanten, die ein Dreieck  $ABC$  bilden. Ein spitzwinkliges Dreieck besitzt bekanntlich das Höhenfusspunktsdreieck als Minimaldreieck. Die Mittellinie des Streifens wird offenbar zum Höhenfusspunktsdreieck von  $ABC$ .  $ABC$  ist also ein spitzwinkliges Dreieck, dessen Höhen die Kniffkanten halbieren.

**Aufgabe 410.** In der euklidischen Ebene seien zwei Punkte  $A$  und  $B$  gegeben. Durch eine Inversion an einem Kreis  $k$  mit der Mitte  $J$  und dem Radius  $r$  werden  $A, B$  in die Punkte  $A^*, B^*$  transformiert. Für welche Kreise  $k$  steht die Verbindungsgerade  $[A^*B^*]$  auf der Geraden  $[AB]$  normal?

R. BEREIS, Dresden

1. *Lösung:* D'après la donnée on a, quelque soit  $r$ , la relation  $JA \times JA^* = JB \times JB^*$ . Le quadrilatère  $ABA^*B^*$  est donc inscriptible et la condition  $AB \perp A^*B^*$  entraîne immédiatement que dans le triangle  $JAB$  la différence des angles adjacents au côté  $AB$  est égale à  $90^\circ$ .  $A$  et  $B$  étant fixes, le lieu géométrique du sommet  $J$  du triangle est l'hyperbole équilatère de sommets  $A$  et  $B$ .

Les cercles d'inversion cherchés sont donc tous les cercles ayant leurs centres sur cette hyperbole (les rayons pouvant être quelconques).

CH. VUILLE, La Sagne

2. *Lösung:* Wir deuten die Punkte als komplexe Zahlen in der Gauss-Ebene und wählen  $A = 1 = \bar{A}$  und  $B = -1 = \bar{B}$ . Die Inversion am Kreis  $k(J; r)$  wird durch die Abbildungsgleichung

$$w = \frac{r^2}{z - \bar{J}} + J$$

dargestellt. Damit ergeben sich die Bildpunkte

$$A^* = \frac{r^2}{1 - \bar{J}} + J \quad \text{und} \quad B^* = \frac{r^2}{-1 - \bar{J}} + J.$$

Die Orthogonalitätsbedingung der Aufgabe wird zur Forderung  $\Re(A^* - B^*) = 0$ . Einsetzen von  $A^*$  und  $B^*$  liefert nach kurzer Rechnung

$$\Re(J^2) = 1 \text{ mit } J \neq A \text{ und } J \neq B.$$

Ergebnis: Die Mittelpunkte der erlaubten Inversionskreise liegen auf der gleichseitigen Hyperbel mit den (ausgestochenen) Scheiteln  $A$  und  $B$ , die Radien sind frei wählbar.

J. BINZ, Bern

Weitere Lösungen sandten C. BINDSCHEDLER (Küschnacht), G. GEISE (Dresden), W. JÄNICHEN (Berlin), H. MEILI (Winterthur), I. PAASCHE (München).

**Aufgabe 411.** Eine  $n$ -gliedrige Folge konsekutiver natürlicher Zahlen heisse eine  $(n, t)$ -Kette bzw. eine  $[n, t]$ -Kette, wenn jedes Element mindestens bzw. höchstens  $t$  verschiedene Primteiler besitzt. Man beweise:

1. Sind  $N$  und  $T$  beliebige natürliche Zahlen, so gibt es unendlich viele  $(N, T)$ -Ketten.
2. Es gibt eine natürliche Zahl  $n_t$ , so dass bei gegebenem  $t$  für  $n > n_t$  nur endlich viele  $[n, t]$ -Ketten existieren.
3.  $n_t < 2 p_1 p_2 \dots p_t$  ( $p_i = i$ -te Primzahl).

(Vgl. zu diesem Problemkreis auch *Ungelöste Probleme* Nr. 31 (El. Math. 14, 82–83 (1959))).

E. TEUFFEL, Korntal/Stuttgart

*Lösung:* 1. Wir zeigen zuerst, dass unter der Voraussetzung der Existenz einer  $(N, T-1)$ -Kette mindestens eine  $(N, T)$ -Kette existiert. Man bilde das Produkt der  $N$  Glieder  $a_i^{(T-1)}$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) einer  $(N, T-1)$ -Kette und multipliziere dieses mit einem Faktor  $A$ , der so gewählt wird, dass im Endprodukt  $P$  jeder Primfaktor in einer höheren Potenz auftritt als in jedem  $a_i^{(T-1)}$ . Dann bilden offenbar die Zahlen  $a_i^{(T)} = P + a_i^{(T-1)} = a_i^{(T-1)}(P' + 1)$  eine  $(N, T)$ -Kette, denn  $P'$  enthält sämtliche Primfaktoren von  $a_i^{(T-1)}$ , so dass in  $P' + 1$  ein von diesen verschiedener neuer Primfaktor auftreten muss. Da jede  $N$ -gliedrige Folge konsekutiver natürlicher Zahlen mit einem Anfangsglied  $\geq 2$  eine  $(N, 1)$ -Kette ist, schliesst man sofort auf die Existenz unendlich vieler  $(N, T)$ -Ketten.

2. Ist  $p_s$  die  $s$ -te Primzahl, so gibt es unter  $P_{t+1} = p_1 p_2 \dots p_{t+1}$  aufeinanderfolgenden Zahlen stets ein Vielfaches von  $P_{t+1}$ , somit kann es nur für  $n < P_{t+1}$   $[n, t]$ -Ketten geben. Andererseits gibt es unendlich viele  $[1, t]$ -Ketten. Damit ist die Existenz von  $n_t$  bewiesen.

3. Wäre  $n_t \geq 2p_1 p_2 \dots p_t = 2P_t$ , so gäbe es unendlich viele natürliche Zahlen  $z$  mit der Eigenschaft, dass jede der Zahlen  $z+1, z+2, \dots, z+2P_t$  höchstens  $t$  verschiedene Primfaktoren enthält. Unter diesen Zahlen sind mindestens zwei verschiedene  $r, s$  durch  $P_t$  teilbar. Hier ist  $|r-s| \leq P_t$ . Das widerspricht einem bekannten Satz von POLYÀ (Math. Zeitschrift 1, 143–148 (1918)), der aussagt, dass in der unendlichen Folge wachsender natürlicher Zahlen, die nur Primfaktoren  $\leq p_t$  enthalten, die Differenz zweier konsekutiver Glieder unbegrenzt wächst.

H. MEILI, Winterthur

Der Aufgabensteller gibt als Beispiel die Kette 48, 49, ..., 59, die die grösste der endlich vielen  $[12, 2]$ -Ketten ist.

## Neue Aufgaben

**Aufgabe 436.** Einer Ellipse ist eine Reihe von sie doppelt berührenden Kreisen  $K_1, K_2, \dots, K_n$  einbeschrieben, von denen  $K_1$  und  $K_n$  die Hauptscheitel-Krümmungskreise sind, während jeder andere die beiden Nachbarkreise berührt. Man zeige, dass die numerische Exzentrizität der Ellipse den Wert  $\epsilon = \cos(\pi/2n)$  hat. C. BINDSCHEDLER, Küschnacht

**Aufgabe 437.** Let  $f(z)$  be a polynomial in the complex variable  $z$  with complex coefficients and put  $f(z) = U + iV$ , where  $U, V$  are real polynomials in  $x, y$ . If

$$U + iV = (P + iQ)(R + iS),$$

where  $P, Q, R, S$  are polynomials in  $x, y$  with real coefficients, show that  $P + iQ = g(z)$ , where  $g(z)$  is a polynomial in  $z$ . L. CARLITZ, Duke University, Durham N.C. USA

**Aufgabe 438.** Es sei  $p$  eine natürliche Zahl. Man bestimme alle ganzzahligen Lösungen der Exponentialgleichung

$$\sum_{k=0}^p (-1)^k \binom{p}{k} k^x = 0.$$

A. BAGER, Hjørring

**Aufgabe 439.** Eine Gerade  $e_1$  werde längs einer anderen Geraden  $g_1$  mit der konstanten Geschwindigkeit  $v_1$  und eine Gerade  $e_2$  werde längs einer anderen Geraden  $g_2$  mit der konstanten Geschwindigkeit  $v_2$  parallel verschoben.

Von einem Punkt  $O$ , der ausserhalb der (voneinander verschiedenen) Ebenen  $\varepsilon_i = [e_i g_i]$  liegen möge, werden in jedem Augenblick der Bewegung die Treffgeraden  $s$  an die  $e_i$  gelegt.

Welche Kurven beschreiben die Schnittpunkte  $T_i = [s e_i]$  in den Ebenen  $\varepsilon_i$  bei Ablauf der geschilderten Bewegung?

E. SCHRÖDER, Dresden

## Aufgaben für die Schule

Es wird kein Anspruch auf Originalität der Aufgaben erhoben; Autoren und Quellen werden im allgemeinen nicht genannt. Die Daten für Aufgaben aus der Darstellenden Geometrie sind durchweg so festgelegt, dass der Ursprung des Koordinatensystems in der Mitte des linken Randes eines Blattes vom Format A 4 gewählt werden soll,  $x$ -Achse nach rechts,  $y$ -Achse nach vorn,  $z$ -Achse nach oben, Einheit 1 cm. Anregungen und

Beiträge sind zu senden an Prof. Dr. WILLI LÜSSY, Buelrainstrasse 51, Winterthur.

1. Die Summe der Quadrate dreier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen ist gleich der Summe der Quadrate der beiden nächstfolgenden Zahlen. Wie gross ist diese Summe?

►  $10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2 = 365$

2. Aus

$$\frac{x^2 - y}{1 - xy} = a, \quad \frac{y^2 - x}{1 - xy} = b$$

folgt

$$\frac{a^2 - b}{1 - ab} = x, \quad \frac{b^2 - a}{1 - ab} = y.$$

3. Der Ausdruck

$$A = x^3 + 3x(1 - m^2) + 2m(1 - m^2)$$

ist auszuwerten für

$$x = \sqrt[3]{m^2 - 1} (\sqrt[3]{m + 1} + \sqrt[3]{m - 1}).$$

►  $A = 0$

4. Aus

$$\frac{a^2 - bc}{a} + \frac{b^2 - ca}{b} + \frac{c^2 - ab}{c} = 0$$

folgt

$$\frac{a}{a^2 - bc} + \frac{b}{b^2 - ca} + \frac{c}{c^2 - ab} = 0.$$

► Werden die Additionen ausgeführt, so gilt für die Zähler

$$Z_2 = Z_1(a + b + c).$$

Man suche ein Zahlenbeispiel und verifiziere, dass die drei Summanden in der Ebene der komplexen Zahlen die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks sind, dessen Mittelpunkt im Nullpunkt liegt.

5. Aus  $\operatorname{tg} \alpha = i$  folgt  $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = i$  für beliebiges  $\beta$ .

►  $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{i + \operatorname{tg} \beta}{1 - i \operatorname{tg} \beta} = i.$

Grund:  $\alpha = \operatorname{arctg} i = \frac{i}{2} \ln \frac{i + i}{i - i} = \infty.$