Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 17 (1962)
Heft: 5

Rubrik: Kleine Mitteilungen

Kleine Mitteilungen

Beantwortung einer Frage von E. Teuffel

Es seien $p_1, p_2, \ldots, p_n$ die ersten n Primzahlen und $M(n)$ die grösste natürliche Zahl mit der Eigenschaft, dass sich jede zu $p_1 p_2 \ldots p_n$ teilerfremde Zahl $m \leqq M(n)$ in der Form $m = a \pm b$ darstellen lässt, wo $a\,b = \prod_{i=1}^{n} p_i^{\alpha_i}$. Herr Teuffel[1]) hat die Frage gestellt, ob $M(n)$ unendlich sein kann, das heisst ob die angegebene Darstellung für alle natürlichen m möglich ist (Herr Teuffel setzt dabei $\alpha_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots n)$ voraus). Ich will zeigen, dass $M(n)$ für jedes n endlich ist, sogar wenn nicht jedes p_i in $a\,b$ aufgeht.

Es sei $a_1^{(n)} < a_2^{(n)} < \cdots$ die Folge aller Zahlen von der Form $\prod_{i=1}^{n} p_i^{\alpha_i}$ $(\alpha_i \geqq 0)$.

Lemma 1. Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt, wenn $i > i_0(\varepsilon)$, $a_{i+1}^{(n)} - a_i^{(n)} > \left(a_i^{(n)}\right)^{1-\varepsilon}$.

Das Lemma ist ein spezieller Fall eines Satzes von Mahler[2]): Es sei $\vartheta \neq 0$ algebraisch, $P_1, P_2, \ldots, P_s$, $Q_1, Q_2, \ldots, Q_t$ seien endlich viele Primzahlen, ferner sei $0 \leqq \alpha \leqq 1$, $0 \leqq \beta \leqq 1$, $\gamma > \alpha + \beta$, $c > 0$. Zwei ganze Zahlen seien definiert durch

$$p = p^* \prod_{i=1}^{s} P_i^{\alpha_i}, \quad q = q^* \prod_{i=1}^{t} Q_i^{\beta_i}, \quad 0 < p^* \leqq c\,p^\alpha, \quad 0 < q^* \leqq c\,q^\beta .$$

Dann existiert eine Konstante C, die nur von $\vartheta, \alpha, \beta, \gamma, c$ und den P_i und Q_i abhängt, so dass

$$\left| \vartheta - \frac{p}{q} \right| > \frac{C}{q^\gamma} \quad \text{für alle } \frac{p}{q} \neq \vartheta .$$

Unser Lemma folgt sofort, wenn man $\vartheta = 1$, $p^* = q^* = 1$, $\alpha = \beta = 0$, $c = 1$, $\gamma = \varepsilon/2$ setzt. Der schwächere Satz $\lim_{i=\infty} \left(a_{i+1}^{(n)} - a_i^{(n)}\right) = \infty$ stammt von Pólya[3]).

Lemma 2. Die Anzahl $D(x)$ der Zahlen der Form $\prod_{i=1}^{n} p_i^{\alpha_i} \leqq x$, also die Anzahl der $a_i^{(n)} \leqq x$ ist $o(x^\varepsilon)$ für jedes $\varepsilon > 0$.

Lemma 2 ist natürlich längst bekannt. Offenbar ist $0 \leqq \alpha_i \leqq \log x/\log 2$ und daher

$$D(x) \leqq \left(1 + \frac{\log x}{\log 2}\right)^n = o(x^\varepsilon) .$$

Aus Lemma 1 und 2 folgt sofort, dass für genügend grosses x nicht jede Zahl $m < x^{1/2}$ $(m, p_1, p_2 \ldots p_n) = 1$ von der Form $a_i^{(n)} \pm a_j^{(n)}$ sein kann. Für $x > x_0$ folgt aus $a_i^{(n)} > x$ die Ungleichung

$$a_i^{(n)} - a_j^{(n)} > x^{1/2} \quad (i > j) .$$

Für $a_j^{(n)} > x^{2/3}$ ist nämlich

$$a_i^{(n)} - a_j^{(n)} > x^{2(1-\varepsilon)/3} > x^{1/2} \quad \text{(Lemma 1)}$$

und für $a_j^{(n)} \leqq x^{2/3}$ hat man

$$a_i^{(n)} - a_j^{(n)} \geqq x - x^{2/3} > x^{1/2}.$$

Betrachten wir also die Zahlen

$$m' = a_i^{(n)} \pm a_j^{(n)} < x^{1/2} ,$$

---

1) El. Math. *15*, 104 (1960).

2) Mathematica *4*, 153 (1957), Theorem 3.

3) Math. Zeitschrift *1*, 143–148 (1918).

so muss $a_i^{(n)} < x$ gelten, also auch $a_j^{(n)} < x$. Die Anzahl der m' ist höchstens $D^2(x)$. Wegen Lemma 2 ist aber $D^2(x) < x^{2\varepsilon}$ für $x > x_0$. Die Anzahl der Zahlen $m < x^{1/2}$, $(m, p_1 p_2 \ldots p_n) = 1$, ist aber für $x > x_0$ nach dem Sieb des ERATOSTHENES mindestens

$$x^{1/2} \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) - 2^n > \frac{x^{1/2}}{n} - 2^n > x^{2\varepsilon} .$$

Also gibt es unterhalb $x^{1/2}$ mehr Zahlen m als Zahlen m' und damit Zahlen m, die nicht von der Form $a_i^{(n)} \pm a_j^{(n)}$ sind.

P. ERDÖS

Über fünf neue Tetraeder, die einem Würfel äquivalent sind

M. GOLDBERG hat in Elemente der Mathematik *13* (1958) die bisher bekannten Tetraeder, die inhaltsgleichen Würfeln äquivalent (zerlegungsgleich) sind, zusammengestellt. Im folgenden gebe ich fünf weitere Tetraeder dieser Art an.

Wenn man von einem Quader $ABCDA'B'C'D'$ mit den Kantenlängen $\overline{AB} = \overline{CD} = \overline{A'B'} = \overline{C'D'} = (\sqrt{5} + 1)/\sqrt{2}$, $\overline{AD} = \overline{BC} = \overline{A'D'} = C'C' = (\sqrt{5} - 1)/\sqrt{2}$ und $AA' = BB' = CC' = DD' = \sqrt{2}$ die vier kongruenten Tetraeder $ABB'C$, $ADD'C$, $AA'B'D'$ und $CC'B'D'$ der von SYDLER (Elemente Math. *11*, 78–81 (1956)) beschriebenen Art T_1 wegnimmt, muss das Resttetraeder $AB'CD'$ einem Würfel äquivalent sein. Seine Flächenwinkel sind: 36° längs AD' und CB', 60° längs AC und $B'D'$ und 108° längs AB' und CD'. Aus diesem Tetraeder erhält man drei weitere einem Würfel äquivalente Tetraeder, indem man es durch eine Ebene, die durch eine Kante und die Mitte der gegenüberliegenden Kante geht, in zwei kongruenten Tetraeder zerlegt, die nach SYDLER einem Würfel äquivalent sind (J.-P. SYDLER, *Sur la décomposition des polyèdres*, Comm. Math. Helv. *16*, 266–273 (1943/44), Satz 3). Diese Zerlegung in zwei kongruente Tetraeder ist auf Grund der Symmetrieverhältnisse auf drei verschiedene Arten möglich. Schliesslich erhält man noch ein fünftes Tetraeder, indem man von dem Mittelpunkt M des ersten Tetraeders ausgehend dieses in die vier kongruenten Tetraeder $MAB'C$, $MAB'D'$, $MACD'$ und $MB'CD'$ zerlegt, die nach SYDLER ebenfalls einem Würfel äquivalent sind.

Die Kantenlängen und Flächenwinkel dieser Tetraeder stelle ich hier in einer Tabelle zusammen und nenne die Tetraeder in Fortführung der Goldbergschen Bezeichnung T_7 bis T_{11}. E, F und G bedeuten dabei die Mitten der Kanten $B'D'$, AD' und CD'.

$T_7 = AB'CD'$			$T_8 = AB'CE$			$T_9 = ABCF$		
AB'	$\sqrt{5+\sqrt{5}}$	108°	AB'	$\sqrt{5+\sqrt{5}}$	108°	AB'	$\sqrt{5+\sqrt{5}}$	108°
AC	$\sqrt{6}$	60°	AC	$\sqrt{6}$	30°	AC	$\sqrt{6}$	60°
AD'	$\sqrt{5-\sqrt{5}}$	36°	AE	$\sqrt{7/2}$	α_1	AF	$\sqrt{5-\sqrt{5}/2}$	36°
$B'C$	$\sqrt{5-\sqrt{5}}$	36°	$B'C$	$\sqrt{5-\sqrt{5}}$	36°	$B'C$	$\sqrt{5-\sqrt{5}}$	18°
$B'D'$	$\sqrt{6}$	60°	$B'E$	$\sqrt{3/2}$	60°	$B'F$	$\sqrt{17+3\sqrt{5}/2}$	α_2
CD'	$\sqrt{5+\sqrt{5}}$	108°	CE	$\sqrt{7/2}$	$180° - \alpha_1$	CF	$\sqrt{17+3\sqrt{5}/2}$	$180° - \alpha_2$

$T_{10} = AB'CG$			$T_{11} = AB'CM$		
AB'	$\sqrt{5+\sqrt{5}}$	54°	AB'	$\sqrt{5+\sqrt{5}}$	54°
AC	$\sqrt{6}$	60°	AC	$\sqrt{6}$	30°
AG	$\sqrt{17-3\sqrt{5}/2}$	α_3	AM	$\sqrt{2}$	α_4
$B'C$	$\sqrt{5-\sqrt{5}}$	36°	$B'C$	$\sqrt{5-\sqrt{5}}$	18°
$B'G$	$\sqrt{17-3\sqrt{5}/2}$	$180° - \alpha_3$	$B'M$	$\sqrt{2}$	α_5
CG	$\sqrt{5+\sqrt{5}/2}$	108°	CM	$\sqrt{2}$	α_6

$\alpha_1 \approx 50°$; $\operatorname{tg}\alpha_1 = \sqrt{7/5}$; $\cos 2\alpha_1 = -1/6$

$\alpha_2 \approx 65°$; $\operatorname{tg}\alpha_2 = \sqrt{9 - 2\sqrt{5}}$; $\cos 4\alpha_2 = -3(\sqrt{5} - 1)/20 = -0{,}6\cos 72°$

$\alpha_3 \approx 75°$; $\operatorname{tg}\alpha_3 = \sqrt{9 + 2\sqrt{5}}$; $\cos 4\alpha_3 = 3(\sqrt{5} + 1)/20 = 0{,}6\cos 36°$

$\alpha_4 \approx 101°$; $\operatorname{tg}\alpha_4 = -3 - \sqrt{5}$

$\alpha_5 \approx 117°$; $\operatorname{tg}\alpha_5 = -2$

$\alpha_6 \approx 143°$; $\operatorname{tg}\alpha_6 = -3 + \sqrt{5}$; $\alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 = 360°$.

HANS-CHRISTOF LENHARD, Neukirchen-Vluyn Kr. Moers (Deutschland)

Remark on perfect numbers

The purpose of this note is to prove the following

Theorem. 28 is the only even perfect number of the form $x^3 + 1$.

Proof: It is well known that all even perfect numbers are of the form

$$2^{p-1} \cdot (2^p - 1), \tag{1}$$

where $2^p - 1$ is a prime number. Hence, for a prime number $p \geqq 3$ we have $2^{p-1} \equiv 1 \pmod 3$, $2^p - 1 \equiv 1 \pmod 3$, thus $2^{p-1}(2^p - 1) \equiv 1 \pmod 3$. If $2^{p-1}(2^p - 1) = x^3 + 1$, then x is divisible by 3; $x = 3y$ and

$$2^{p-1}(2^p - 1) = (x + 1)(x^2 - x + 1).$$

We observe that $(x + 1, x^2 - x + 1) = (x + 1, -2x + 1) = (x + 1, 3) = (3y + 1, 3) = 1$. Because $x > 2$, we have $x^2 - x + 1 > x + 1 > 1$. But the only representation of even perfect number as the product of two relatively prime positive integers both > 1 is that given by (1). Hence $x + 1 = 2^{p-1}$, $x^2 - x + 1 = 2^p - 1$. Therefore $2x + 2 = 2^p$, $x^2 - x + 1 = 2^p - 1$ and on subtracting we get $-x^2 + 3x + 1 = 1$, $-x(x - 3) = 0$. Hence $x = 3$ and we get the perfect number $3^3 + 1 = 2^{3-1}(2^3 - 1) = 28$.

Corollary 1. 28 is the only even perfect number of the form $n^n + 1$.

Proof: If $n^n + 1$ is an even perfect number, then n is divisible by 3; $n = 3k$ and $[(3k)^k]^3 + 1$ is an even perfect number. By theorem $(3k)^k = 3$, hence $k = 1, n = 3$, $n^n + 1 = 28$.

Corollary 2. There is no even perfect number of the form

$$n^{n^{\cdot^{\cdot^{n}}}} + 1, \tag{2}$$

if the number of n's in (2) is $\geqq 3$.

A. MĄKOWSKI (Warsaw)

Aufgaben

Aufgabe 406. Aufgabe über die Lagebeziehung eines Vierecks zu vier Parabeln: Bilden vier Punkte einer Ebene ein konvexes Polygon, dann lassen sich durch jeden der vier Punkte im allgemeinen zwei reelle Parabeln legen, die die Verbindungsgeraden der drei anderen Punkte berühren. Bezeichnet man die Parabeln durch den Punkt P_k ($k = 0, 1, 2, 3$) mit p_k und p'_k, die Berührungspunkte von p_k bzw. p'_k mit der Geraden $[P_{k+p}, P_{k+p+1}]$ mit $T_{k,k+2p+1}$ bzw. $T'_{k,k+2p+1}$*) ($p = 1, 2$) so gilt

$$(T_{k,k+1}\, P_{k-2} \cdot P_{k-1}) = \frac{1}{(T_{k,k-1}\, P_{k-2} \cdot P_{k-3})} \tag{1}$$

das heisst die von einem Eckpunkt P_{k-2} an die Parabel p_k ausgehenden Tangentenstrecken werden von den Punkten P_{k-1} und P_{k-3} in reziprokem Verhältnis geteilt. Ferner gilt

$$(T_{k,k+1}\, P_{k-2} \cdot P_{k-1}) = (T_{k+1,k}\, P_{k-1} \cdot P_{k-2}) \tag{2}$$

*) Bei Summation der Indizes ist die Indexzahl stets modulo vier zu setzen.