

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 17 (1962)  
**Heft:** 5  
  
**Rubrik:** Kleine Mitteilungen

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 19.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Kleine Mitteilungen

### Beantwortung einer Frage von E. TEUFFEL

Es seien  $p_1, p_2, \dots, p_n$  die ersten  $n$  Primzahlen und  $M(n)$  die grösste natürliche Zahl mit der Eigenschaft, dass sich jede zu  $p_1 p_2 \dots p_n$  teilerfremde Zahl  $m \leq M(n)$  in der Form  $m = a \pm b$  darstellen lässt, wo  $a b = \prod_{i=1}^n p_i^{\alpha_i}$ . Herr TEUFFEL<sup>1)</sup> hat die Frage gestellt, ob  $M(n)$  unendlich sein kann, das heisst ob die angegebene Darstellung für alle natürlichen  $m$  möglich ist (Herr TEUFFEL setzt dabei  $\alpha_i > 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) voraus). Ich will zeigen, dass  $M(n)$  für jedes  $n$  endlich ist, sogar wenn nicht jedes  $p_i$  in  $a b$  aufgeht.

Es sei  $a_1^{(n)} < a_2^{(n)} < \dots$  die Folge aller Zahlen von der Form  $\prod_{i=1}^n p_i^{\alpha_i}$  ( $\alpha_i \geq 0$ ).

*Lemma 1.* Für jedes  $\varepsilon > 0$  gilt, wenn  $i > i_0(\varepsilon)$ ,  $a_{i+1}^{(n)} - a_i^{(n)} > (a_i^{(n)})^{1-\varepsilon}$ .

Das Lemma ist ein spezieller Fall eines Satzes von MAHLER<sup>2)</sup>: Es sei  $\vartheta \neq 0$  algebraisch,  $P_1, P_2, \dots, P_s, Q_1, Q_2, \dots, Q_t$  seien endlich viele Primzahlen, ferner sei  $0 \leq \alpha \leq 1$ ,  $0 \leq \beta \leq 1$ ,  $\gamma > \alpha + \beta$ ,  $c > 0$ . Zwei ganze Zahlen seien definiert durch

$$p = p^* \prod_{i=1}^s P_i^{\alpha_i}, \quad q = q^* \prod_{i=1}^t Q_i^{\beta_i}, \quad 0 < p^* \leq c p^\alpha, \quad 0 < q^* \leq c q^\beta.$$

Dann existiert eine Konstante  $C$ , die nur von  $\vartheta, \alpha, \beta, \gamma, c$  und den  $P_i$  und  $Q_i$  abhängt, so dass

$$\left| \vartheta - \frac{p}{q} \right| > \frac{C}{q^\gamma} \quad \text{für alle } \frac{p}{q} \neq \vartheta.$$

Unser Lemma folgt sofort, wenn man  $\vartheta = 1$ ,  $p^* = q^* = 1$ ,  $\alpha = \beta = 0$ ,  $c = 1$ ,  $\gamma = \varepsilon/2$  setzt. Der schwächere Satz  $\lim_{i \rightarrow \infty} (a_{i+1}^{(n)} - a_i^{(n)}) = \infty$  stammt von PÓLYA<sup>3)</sup>.

*Lemma 2.* Die Anzahl  $D(x)$  der Zahlen der Form  $\prod_{i=1}^n p_i^{\alpha_i} \leq x$ , also die Anzahl der  $a_i^{(n)} \leq x$  ist  $o(x^\varepsilon)$  für jedes  $\varepsilon > 0$ .

Lemma 2 ist natürlich längst bekannt. Offenbar ist  $0 \leq \alpha_i \leq \log x / \log 2$  und daher

$$D(x) \leq \left(1 + \frac{\log x}{\log 2}\right)^n = o(x^\varepsilon).$$

Aus Lemma 1 und 2 folgt sofort, dass für genügend grosses  $x$  nicht jede Zahl  $m < x^{1/2}$  ( $m, p_1, p_2 \dots p_n = 1$ ) von der Form  $a_i^{(n)} \pm a_j^{(n)}$  sein kann. Für  $x > x_0$  folgt aus  $a_i^{(n)} > x$  die Ungleichung

$$a_i^{(n)} - a_j^{(n)} > x^{1/2} \quad (i > j).$$

Für  $a_j^{(n)} > x^{2/3}$  ist nämlich

$$a_i^{(n)} - a_j^{(n)} > x^{2(1-\varepsilon)/3} > x^{1/2} \quad (\text{Lemma 1})$$

und für  $a_j^{(n)} \leq x^{2/3}$  hat man

$$a_i^{(n)} - a_j^{(n)} \geq x - x^{2/3} > x^{1/2}.$$

Betrachten wir also die Zahlen

$$m' = a_i^{(n)} \pm a_j^{(n)} < x^{1/2},$$

<sup>1)</sup> El. Math. 15, 104 (1960).

<sup>2)</sup> Mathematica 4, 153 (1957), Theorem 3.

<sup>3)</sup> Math. Zeitschrift 1, 143–148 (1918).

so muss  $a_i^{(n)} < x$  gelten, also auch  $a_j^{(n)} < x$ . Die Anzahl der  $m'$  ist höchstens  $D^2(x)$ . Wegen Lemma 2 ist aber  $D^2(x) < x^{2\epsilon}$  für  $x > x_0$ . Die Anzahl der Zahlen  $m < x^{1/2}$ ,  $(m, p_1 p_2 \dots p_n) = 1$ , ist aber für  $x > x_0$  nach dem Sieb des ERATOSTHENES mindestens

$$x^{1/2} \prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) - 2^n > \frac{x^{1/2}}{n} - 2^n > x^{2\epsilon}.$$

Also gibt es unterhalb  $x^{1/2}$  mehr Zahlen  $m$  als Zahlen  $m'$  und damit Zahlen  $m$ , die nicht von der Form  $a_i^{(n)} \pm a_j^{(n)}$  sind. P. ERDÖS

### Über fünf neue Tetraeder, die einem Würfel äquivalent sind

M. GOLDBERG hat in Elemente der Mathematik 13 (1958) die bisher bekannten Tetraeder, die inhaltsgleichen Würfeln äquivalent (zerlegungsgleich) sind, zusammengestellt. Im folgenden gebe ich fünf weitere Tetraeder dieser Art an.

Wenn man von einem Quader  $ABCD A'B'C'D'$  mit den Kantenlängen  $\overline{AB} = \overline{CD} = \overline{A'B'} = \overline{C'D'} = (\sqrt{5} + 1)/\sqrt{2}$ ,  $\overline{AD} = \overline{BC} = \overline{A'D'} = \overline{C'C'} = (\sqrt{5} - 1)/\sqrt{2}$  und  $\overline{AA'} = \overline{BB'} = \overline{CC'} = \overline{DD'} = \sqrt{2}$  die vier kongruenten Tetraeder  $AB'B'C$ ,  $ADD'C$ ,  $AA'B'D'$  und  $CC'B'D'$  der von SYDLER (Elemente Math. 11, 78–81 (1956)) beschriebenen Art  $T_1$  wegnimmt, muss das Resttetraeder  $AB'C'D'$  einem Würfel äquivalent sein. Seine Flächenwinkel sind:  $36^\circ$  längs  $AD'$  und  $CB'$ ,  $60^\circ$  längs  $AC$  und  $B'D'$  und  $108^\circ$  längs  $AB'$  und  $CD'$ . Aus diesem Tetraeder erhält man drei weitere einem Würfel äquivalente Tetraeder, indem man es durch eine Ebene, die durch eine Kante und die Mitte der gegenüberliegenden Kante geht, in zwei kongruente Tetraeder zerlegt, die nach SYDLER einem Würfel äquivalent sind (J.-P. SYDLER, *Sur la décomposition des polyèdres*, Comm. Math. Helv. 16, 266–273 (1943/44), Satz 3). Diese Zerlegung in zwei kongruente Tetraeder ist auf Grund der Symmetrieverhältnisse auf drei verschiedene Arten möglich. Schliesslich erhält man noch ein fünftes Tetraeder, indem man von dem Mittelpunkt  $M$  des ersten Tetraeders ausgehend dieses in die vier kongruenten Tetraeder  $MAB'C$ ,  $MAB'D'$ ,  $MACD'$  und  $MB'CD'$  zerlegt, die nach SYDLER ebenfalls einem Würfel äquivalent sind.

Die Kantenlängen und Flächenwinkel dieser Tetraeder stelle ich hier in einer Tabelle zusammen und nenne die Tetraeder in Fortführung der Goldbergschen Bezeichnung  $T_7$  bis  $T_{11}$ .  $E$ ,  $F$  und  $G$  bedeuten dabei die Mitten der Kanten  $B'D'$ ,  $AD'$  und  $CD'$ .

| $T_7 = AB'CD'$   |                         |                        | $T_8 = AB'CE$    |                     |                        | $T_9 = ABCF$ |                         |                        |
|------------------|-------------------------|------------------------|------------------|---------------------|------------------------|--------------|-------------------------|------------------------|
| $AB'$            | $\sqrt{5+\sqrt{5}}$     | $108^\circ$            | $AB'$            | $\sqrt{5+\sqrt{5}}$ | $108^\circ$            | $AB'$        | $\sqrt{5+\sqrt{5}}$     | $108^\circ$            |
| $AC$             | $\sqrt{6}$              | $60^\circ$             | $AC$             | $\sqrt{6}$          | $30^\circ$             | $AC$         | $\sqrt{6}$              | $60^\circ$             |
| $AD'$            | $\sqrt{5-\sqrt{5}}$     | $36^\circ$             | $AE$             | $\sqrt{7/2}$        | $\alpha_1$             | $AF$         | $\sqrt{5-\sqrt{5}/2}$   | $36^\circ$             |
| $B'C$            | $\sqrt{5-\sqrt{5}}$     | $36^\circ$             | $B'C$            | $\sqrt{5-\sqrt{5}}$ | $36^\circ$             | $B'C$        | $\sqrt{5-\sqrt{5}}$     | $18^\circ$             |
| $B'D'$           | $\sqrt{6}$              | $60^\circ$             | $B'E$            | $\sqrt{3/2}$        | $60^\circ$             | $B'F$        | $\sqrt{17+3\sqrt{5}/2}$ | $\alpha_2$             |
| $CD'$            | $\sqrt{5+\sqrt{5}}$     | $108^\circ$            | $CE$             | $\sqrt{7/2}$        | $180^\circ - \alpha_1$ | $CF$         | $\sqrt{17+3\sqrt{5}/2}$ | $180^\circ - \alpha_2$ |
| $T_{10} = AB'CG$ |                         |                        | $T_{11} = AB'CM$ |                     |                        |              |                         |                        |
| $AB'$            | $\sqrt{5+\sqrt{5}}$     | $54^\circ$             | $AB'$            | $\sqrt{5+\sqrt{5}}$ | $54^\circ$             |              |                         |                        |
| $AC$             | $\sqrt{6}$              | $60^\circ$             | $AC$             | $\sqrt{6}$          | $30^\circ$             |              |                         |                        |
| $AG$             | $\sqrt{17-3\sqrt{5}/2}$ | $\alpha_3$             | $AM$             | $\sqrt{2}$          | $\alpha_4$             |              |                         |                        |
| $B'C$            | $\sqrt{5-\sqrt{5}}$     | $36^\circ$             | $B'C$            | $\sqrt{5-\sqrt{5}}$ | $18^\circ$             |              |                         |                        |
| $B'G$            | $\sqrt{17-3\sqrt{5}/2}$ | $180^\circ - \alpha_3$ | $B'M$            | $\sqrt{2}$          | $\alpha_5$             |              |                         |                        |
| $CG$             | $\sqrt{5+\sqrt{5}/2}$   | $108^\circ$            | $CM$             | $\sqrt{2}$          | $\alpha_6$             |              |                         |                        |

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &\approx 50^\circ; \quad \operatorname{tg} \alpha_1 = \sqrt{7}/5; & \cos 2 \alpha_1 &= -1/6 \\
\alpha_2 &\approx 65^\circ; \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = \sqrt{9-2\sqrt{5}}; & \cos 4 \alpha_2 &= -3(\sqrt{5}-1)/20 = -0,6 \cos 72^\circ \\
\alpha_3 &\approx 75^\circ; \quad \operatorname{tg} \alpha_3 = \sqrt{9+2\sqrt{5}}; & \cos 4 \alpha_3 &= 3(\sqrt{5}+1)/20 = 0,6 \cos 36^\circ \\
\alpha_4 &\approx 101^\circ; \quad \operatorname{tg} \alpha_4 = -3-\sqrt{5} \\
\alpha_5 &\approx 117^\circ; \quad \operatorname{tg} \alpha_5 = -2 \\
\alpha_6 &\approx 143^\circ; \quad \operatorname{tg} \alpha_6 = -3+\sqrt{5}; \quad \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 = 360^\circ.
\end{aligned}$$

HANS-CHRISTOF LENHARD, Neukirchen-Vluyn Kr. Moers (Deutschland)

### Remark on perfect numbers

The purpose of this note is to prove the following

*Theorem.* 28 is the only even perfect number of the form  $x^3 + 1$ .

Proof: It is well known that all even perfect numbers are of the form

$$2^{p-1} \cdot (2^p - 1), \quad (1)$$

where  $2^p - 1$  is a prime number. Hence, for a prime number  $p \geq 3$  we have  $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{3}$ ,  $2^p - 1 \equiv 1 \pmod{3}$ , thus  $2^{p-1} (2^p - 1) \equiv 1 \pmod{3}$ . If  $2^{p-1} (2^p - 1) = x^3 + 1$ , then  $x$  is divisible by 3;  $x = 3y$  and

$$2^{p-1} (2^p - 1) = (x + 1) (x^2 - x + 1).$$

We observe that  $(x + 1, x^2 - x + 1) = (x + 1, -2x + 1) = (x + 1, 3) = (3y + 1, 3) = 1$ . Because  $x > 2$ , we have  $x^2 - x + 1 > x + 1 > 1$ . But the only representation of even perfect number as the product of two relatively prime positive integers both  $> 1$  is that given by (1). Hence  $x + 1 = 2^{p-1}$ ,  $x^2 - x + 1 = 2^p - 1$ . Therefore  $2x + 2 = 2^p$ ,  $x^2 - x + 1 = 2^p - 1$  and on subtracting we get  $-x^2 + 3x + 1 = 1$ ,  $-x(x - 3) = 0$ . Hence  $x = 3$  and we get the perfect number  $3^3 + 1 = 2^{3-1} (2^3 - 1) = 28$ .

*Corollary 1.* 28 is the only even perfect number of the form  $n^n + 1$ .

Proof: If  $n^n + 1$  is an even perfect number, then  $n$  is divisible by 3;  $n = 3k$  and  $[(3k)^k]^3 + 1$  is an even perfect number. By theorem  $(3k)^k = 3$ , hence  $k = 1$ ,  $n = 3$ ,  $n^n + 1 = 28$ .

*Corollary 2.* There is no even perfect number of the form

$$n^{n \cdot \cdot \cdot n} + 1, \quad (2)$$

if the number of  $n$ 's in (2) is  $\geq 3$ .

A. MĄKOWSKI (Warsaw)

### Aufgaben

**Aufgabe 406.** Aufgabe über die Lagebeziehung eines Vierecks zu vier Parabeln: Bilden vier Punkte einer Ebene ein konvexes Polygon, dann lassen sich durch jeden der vier Punkte im allgemeinen zwei reelle Parabeln legen, die die Verbindungsgeraden der drei anderen Punkte berühren. Bezeichnet man die Parabeln durch den Punkt  $P_k$  ( $k = 0, 1, 2, 3$ ) mit  $p_k$  und  $p'_k$ , die Berührungsgeraden von  $p_k$  bzw.  $p'_k$  mit der Geraden  $[P_{k+p}, P_{k+p+1}]$  mit  $T_{k,k+2p+1}$  bzw.  $T'_{k,k+2p+1}$ \*) ( $p = 1, 2$ ) so gilt

$$(T_{k,k+1} P_{k-2} \cdot P_{k-1}) = \frac{1}{(T_{k,k-1} P_{k-2} \cdot P_{k-3})} \quad (1)$$

das heisst die von einem Eckpunkt  $P_{k-2}$  an die Parabel  $p_k$  ausgehenden Tangentenstrecken werden von den Punkten  $P_{k-1}$  und  $P_{k-3}$  in reziprokem Verhältnis geteilt. Ferner gilt

$$(T_{k,k+1} P_{k-2} \cdot P_{k-1}) = (T_{k+1,k} P_{k-1} \cdot P_{k-2}) \quad (2)$$

\*) Bei Summation der Indizes ist die Indexzahl stets modulo vier zu setzen.