Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 17 (1962)
Heft: 5

Artikel: Elementargeometrische Sätze als Abbilder von Gruppenoperationen
Autor: Jeger, M.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-21918

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrer

Publiziert mit Unterstützung des Schweizerischen Nationalfonds
zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung

El. Math. Band XVII Nr. 5 Seiten 97–120 Basel, 10. September 1962

Elementargeometrische Sätze als Abbilder von Gruppenoperationen

Bei dem auf F. KLEIN zurückgehenden dynamischen Unterrichtsstil in der Geometrie wird der *Abbildungsbegriff* als Hauptbeweismittel eingesetzt. Auf der Unterstufe steht dabei die einzelne Abbildung im Vordergrund. Das Zusammensetzen von Abbildungen führt später zum Gruppenbegriff und es steht dann das *Rechnen mit Abbildungen* aus einer bestimmten Gruppe als weiteres Beweisverfahren zur Verfügung. Hierher gehören zum Beispiel die Beweise elementargeometrischer Sätze durch Spiegelungsrechnen [1, 4][1]).

Vom axiomatischen Standpunkt aus erscheint ein Zurückgehen auf metrische Spiegelungen sehr sinnvoll. Für den Unterricht ist es aber unzweckmässig. Es zeigt sich nämlich, dass der gruppengeometrische Beweis eines Satzes um so umständlicher und unnatürlicher wird, je weiter der betreffende Satz von der Kongruenzgruppe entfernt liegt. Die Beweise gewinnen dagegen an Durchsichtigkeit, wenn man mit charakteristischen Abbildungen aus jener Gruppe operiert, welcher der Satz selbet angehört. So wird etwa eine affine Aussage am natürlichsten durch Rechnen mir Affinitäten bewiesen. Zahlreiche Sätze der Elementargeometrie erscheinen auf diese Weise als direkte Abbilder einfacher Gruppenoperationen. Die nachfolgenden Betrachtungen sollen diesen Sachverhalt an einigen Beispielen aufzeigen.

Die Gruppe der perspektiven Ähnlichkeiten

Eine perspektive Ähnlichkeit Σ ist gekennzeichnet durch das Zentrum S und durch eine von Null verschiedene Zahl $\varkappa$, das sogenannte Ähnlichkeits- oder Streckungsverhältnis. Je nachdem $\varkappa$ grösser oder kleiner als 0 ist, liegen einander entsprechende Punkte A und $\bar{A}$ auf derselben oder auf verschiedenen Seiten von S (Fig. 1). Für $\varkappa = -1$ stimmt Σ mit der 180°-Drehung um S überein; man spricht in diesem Falle gelegentlich auch von einer Punktspiegelung an S.

Die perspektiven Ähnlichkeiten bilden eine Gruppe $\mathfrak{A}$. Die Zusammensetzung zweier Elemente Σ_1 und Σ_2 aus A bezeichnen wir mit $\Sigma_1 \circ \Sigma_2$ (zuerst Σ_1, dann Σ_2). S_i sei das Zentrum und $\varkappa_i$ das Streckungsverhältnis von Σ_i.

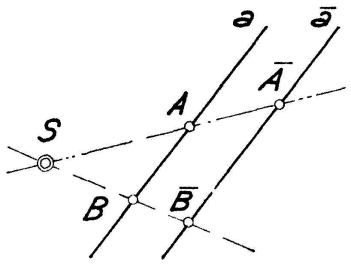
Dass $\Sigma_1 \circ \Sigma_2$ wiederum eine perspektive Ähnlichkeit ist, lässt sich folgendermassen einsehen. Zunächst ist die Verbindungsgerade s der beiden Zentren S_1 und S_2 eine Fixgerade bei $\Sigma_1 \circ \Sigma_2$, denn diese Gerade bleibt sowohl bei Σ_1 als auch bei Σ_2

[1]) Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis am Schlusse.

fest (Figur 2). Wird dann ein Punkt A der Abbildung $\Sigma = \Sigma_1 \circ \Sigma_2$ unterworfen, so ergibt sich die Kette

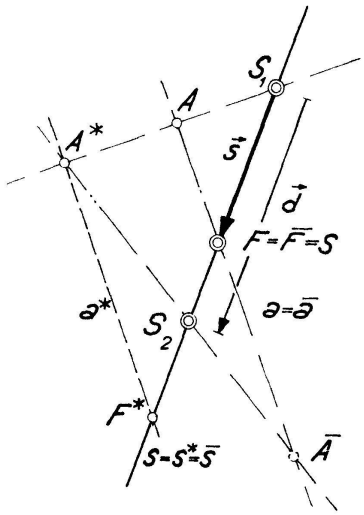
$$A \underset{\Sigma_1}{\longrightarrow} A^* \underset{\Sigma_2}{\longrightarrow} \bar{A}\,.$$

Bei einer perspektiven Ähnlichkeit sind korrespondierende Geraden stets parallel. Diese Eigenschaft überträgt sich von Σ_1 und Σ_2 auch auf das Produkt $\Sigma_1 \circ \Sigma_2$. Die Verbindungsgerade a von A und $\bar{A}$ bleibt daher bei dieser Abbildung ebenfalls fest.



$$\varkappa = \frac{S\bar{A}}{SA} = \frac{S\bar{B}}{SB}$$

Figur 1



Figur 2

Der Schnittpunkt F von s und a ist somit ein Fixpunkt. Aus der Figur 2 entnimmt man, dass

$$\frac{S_1 F^*}{S_1 F} = \varkappa_1\,; \qquad \frac{S_2 \bar{F}}{S_2 F^*} = \varkappa_2$$

ist. Wii schliessen daraus, dass der Punkt F durch die beiden Verhältniszahlen $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ allein bestimmt ist. Dies heisst nun aber, dass sämtliche Verbindungsgeraden korrespondierender Punkte P und $\bar{P}$ durch $F = \bar{F} = S$ laufen. S ist das Zentrum von Σ. Da $\varkappa$ gleich dem Verhältnis korrespondierender Strecken bei Σ ist, schliesst man sofort auf die Beziehung

$$\varkappa = \varkappa_1 \cdot \varkappa_2\,. \tag{1}$$

Für die Lage von S auf der Geraden s gilt

$$\boldsymbol{s} = \frac{1 - \varkappa_2}{1 - \varkappa_1 \cdot \varkappa_2}\,\boldsymbol{d} \quad \text{wobei} \quad \boldsymbol{d} = \boldsymbol{S}_1 \boldsymbol{S}_2\,. \tag{2}$$

Es ist nämlich

$$\boldsymbol{S}_1 \boldsymbol{F}^* = \varkappa_1 \boldsymbol{x} \quad \text{und damit} \quad \boldsymbol{S}_2 \boldsymbol{F}^* = \boldsymbol{S}_1 \boldsymbol{F}^* - \boldsymbol{d} = \varkappa_1 \boldsymbol{x} - \boldsymbol{d}\,.$$

Nun ist aber $\boldsymbol{S}_2 \boldsymbol{S} = \varkappa_2 \boldsymbol{S}_2 \boldsymbol{F}^*$, woraus

$$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{d} = \varkappa_2 (\varkappa_1 \boldsymbol{x} - \boldsymbol{d})$$

folgt. Durch Auflösen dieser Vektorgleichung nach $\boldsymbol{x}$ erhält man die Beziehung (2). Die Gruppe $\mathfrak{A}$ ist nicht kommutativ; man erkennt dies daran, dass (2) in $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ nicht symmetrisch ist.

Zur Gruppe $\mathfrak{A}$ gehören auch die Translationen. Dies sind perspektive Ähnlichkeiten mit unendlichfernem Zentrum; $\varkappa$ hat bei Translationen stets den Wert $+1$.

Für die Punkte A, A^*, $\bar{A}$ gelten die Beziehungen

$$\frac{S_1 A^*}{S_1 A} = \varkappa_1 ; \quad \frac{S_2 \bar{A}}{S_2 A^*} = \varkappa_2 ; \quad \frac{S \bar{A}}{S A} = \varkappa .$$

Die Relation (1) besagt nun, dass

$$\frac{S_1 A^*}{S_1 A} \cdot \frac{S_2 \bar{A}}{S_2 A^*} \cdot \frac{S A}{S \bar{A}} = +1 .$$

Lösen wir die Figur von der Gruppenoperation $\Sigma_1 \circ \Sigma_2$ in $\mathfrak{A}$ los, so enthält sie die Aussage, dass in dem von der Transversalen s geschnittenen Dreieck $A\,A^*\,\bar{A}$ die beiden Produkte aus drei nichtaufeinanderfolgenden Seitenabschnitten gleich gross sind. Dieser in der Geometrie etwas abseits stehende Satz von MENELAOS erscheint hier als Kern des Operierens in der Gruppe $\mathfrak{A}$ (Figur 2).

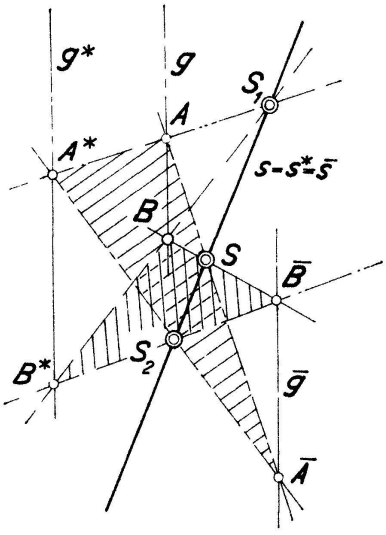
Unterwirft man zwei Punkte A und B der Abbildung $\Sigma_1 \circ \Sigma_2$, so erhält man die Figur 3. Sie stellt eine affine Form der Konfiguration von DESARGUES dar.

Wir betrachten nun speziell 3 Abbildungen Σ_1, Σ_2, Σ_3 aus $\mathfrak{A}$, für die

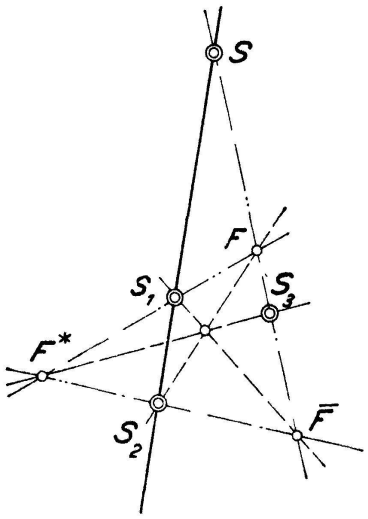
$$\varkappa_1 \cdot \varkappa_2 \cdot \varkappa_3 = -1 \tag{3}$$

ist. Dann ist also $\Sigma_1 \circ \Sigma_2 \circ \Sigma_3$ eine Punktspiegelung. Diese Abbildung besitzt einen einzigen im Endlichen gelegenen Fixpunkt, nämlich das Spiegelungszentrum F. Der Punkt F wird über die folgende Kette in sich selbst übergeführt

$$F \xrightarrow[\Sigma_1]{} F^* \xrightarrow[\Sigma_2]{} \bar{F} \xrightarrow[\Sigma_3]{} F .$$



Figur 3



Figur 4

S sei jetzt das Zentrum von $\Sigma_1 \circ \Sigma_2$ (Figur 4); das Ähnlichkeitsverhältnis dieser Abbildung hat den Wert $\varkappa = \varkappa_1 \varkappa_2$. Aus (3) folgt die Beziehung

$$\varkappa_3 = -\frac{1}{\varkappa_1 \varkappa_2} = -\frac{1}{\varkappa} .$$

Das Zentrum S_3 liegt daher im 4. harmonischen Punkt zu F, $\bar{F}$ und S. Es lässt sich unter Verwendung der Figur des vollständigen Vierecks mit den Eckpunkten S_1, S_2, F und $\bar{F}$ konstruieren. Nun ist aber

$$\frac{S_1 F^*}{S_1 F} = \varkappa_1 ; \quad \frac{S_2 \bar{F}}{S_2 F^*} = \varkappa_2 ; \quad \frac{S_2 F}{S_2 \bar{F}} = \varkappa_3 .$$

Die Relation (3) ist daher äquivalent mit

$$\frac{S_1 F^*}{S_1 F} \cdot \frac{S_2 \bar{F}}{S_2 F^*} \cdot \frac{S_2 F}{S_2 \bar{F}} = -1 .$$

Darin steckt die Aussage, dass drei inzidente Eckentransversalen im Dreieck $F\,F^*\,\bar{F}$ dessen Seiten stets so schneiden, dass die Produkte aus drei nichtaufeinanderfolgenden Abschnitten entgegengesetzt gleich gross sind. Dies ist der Satz von CEVA.

Die Punktspiegelung an F ist eine involutorische Abbildung. Die Bedingung (3) lässt sich daher auch in folgender Gestalt formulieren:

$$(\Sigma_1 \circ \Sigma_2 \circ \Sigma_3)^2 = I \quad \text{wobei} \quad \Sigma_1 \circ \Sigma_2 \circ \Sigma_3 \neq I \text{ [2]}. \tag{4}$$

I ist das Zeichen für die Identität.

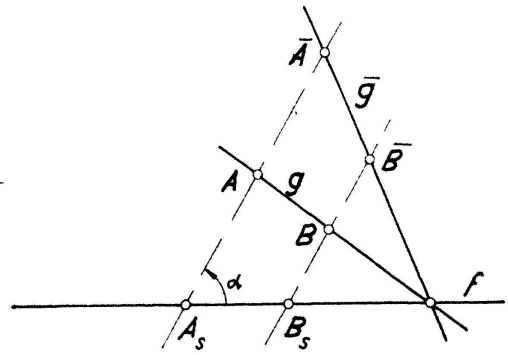
Diese Gruppenrelation in $\mathfrak{A}$ ist äquivalent mit dem Satz von CEVA für das Dreieck, dessen Ecken im Fixpunkt F von $\Sigma_1 \circ \Sigma_2 \circ \Sigma_3$ sowie in dessen Bildern bei Σ_1 und $\Sigma_1 \circ \Sigma_2$ liegen.

Mit $\Sigma_1 \circ \Sigma_2 \circ \Sigma_3$ sind übrigens auch die Abbildungen $\Sigma_2 \circ \Sigma_3 \circ \Sigma_1$ und $\Sigma_3 \circ \Sigma_1 \circ \Sigma_2$ Punktspiegelungen. Diese durch reines Gruppenrechnen leicht beweisbare Tatsache entspricht einer geometrisch evidenten Symmetrie in der Figur des Satzes von CEVA.

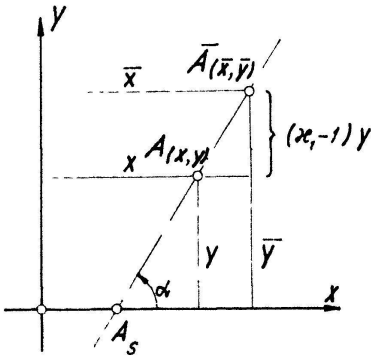
Die Gruppe der perspektiven Affinitäten mit fester Achse f

Eine perspektive Affinität Φ mit der Achse f ist gekennzeichnet durch das Affinitätsverhältnis σ ($\sigma \neq 0$) und die Affinitätsrichtung. Die letztere sei festgelegt durch den Winkel α, gemessen im positiven Sinne von der Achse f aus (Figur 5).

$$\sigma = \frac{\overline{A_s \bar{A}}}{\overline{A_s A}}$$



Figur 5



Figur 6

Die perspektiven Affinitäten mit der festen Achse f bilden eine Gruppe $\mathfrak{G}$. Man kann dies auf analoge Weise zeigen, wie im Falle der Gruppe $\mathfrak{A}$. Ebenso rasch führt aber auch ein analytischer Beweis zum Ziele. Legt man den Rechnungen ein rechtwink-

[2]) Diese Schreibweise erinnert an die Spiegelungszyklen, die von THOMSEN eingehend untersucht wurden. Vgl. [1] und [9].

liges Koordinatensystem gemäss Figur 6 zu Grunde, so lauten die Gleichungen einer perspektiven Affinität Φ, bei der $A(x, y)$ in $\bar{A}(\bar{x}, \bar{y})$ übergeht

$$\bar{x} = x + (\sigma - 1)\,\mathrm{ctg}\,\alpha\, y\,, \qquad \bar{y} = \sigma\, y\,. \tag{5}$$

Es seien jetzt Φ_1 und Φ_2 zwei derartige Abbildungen; bei Φ gehe A in A^* über und Φ_2 befördere A^* nach A. Die Abbildungsgleichungen lauten dann gemäss (5):

$$\Phi_1 \begin{cases} x^* = x + (\sigma_1 - 1)\,\mathrm{ctg}\,\alpha_1\, y \\ y^* = \qquad\qquad \sigma_1\, y \end{cases}, \qquad \Phi_2 \begin{cases} \bar{x} = x^* + (\sigma_2 - 1)\,\mathrm{ctg}\,\alpha_2\, y^* \\ \bar{y} = \qquad\qquad \sigma_2\, y^* \end{cases}.$$

Der geometrischen Zusammensetzung zur Abbildung $\Phi_1 \circ \Phi_2$ entspricht rechnerisch die Substitution der Gleichungen von Φ_1 in jene von Φ_2. Man findet

$$\Phi_1 \circ \Phi_2 \begin{cases} \bar{x} = x + (\sigma_1 - 1)\,\mathrm{ctg}\,\alpha_1\, y + \sigma_1\,(\sigma_2 - 1)\,\mathrm{ctg}\,\alpha_2\, y \\ \bar{y} = \sigma_1\,\sigma_2\, y \end{cases}.$$

Diese Gleichungen sind vom Typus der Gleichungen (5); $\Phi_1 \circ \Phi_2$ ist daher wiederum eine perspektive Affinität mit der Achse f. Bezeichnen wir sie mit Φ und ihre charakteristischen Grössen mit σ und α, so folgt durch Vergleich, dass

$$\sigma = \sigma_1 \cdot \sigma_2\,,$$

$$(\sigma - 1)\,\mathrm{ctg}\,\alpha = (\sigma_1 - 1)\,\mathrm{ctg}\,\alpha_1 + \sigma_1\,(\sigma_2 - 1)\,\mathrm{ctg}\,\alpha_2\,.$$

Hieraus gewinnt man jetzt leicht die Zusammensetzungsrelationen für die Affinitätsverhältnisse und für die Richtungen:

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma_1 \cdot \sigma_2\,, \\ \mathrm{tg}\,\alpha &= \frac{(\sigma_1\,\sigma_2 - 1)\,\mathrm{tg}\,\alpha_1\,\mathrm{tg}\,\alpha_2}{(\sigma_1 - 1)\,\mathrm{tg}\,\alpha_2 + \sigma_1\,(\sigma_2 - 1)\,\mathrm{tg}\,\alpha_1}\,. \end{aligned} \tag{6}$$

Die Beziehung für $\mathrm{tg}\,\alpha$ ist in den Grössenpaaren $(\sigma_1, \mathrm{tg}\,\alpha_1)$ und $(\sigma_2, \mathrm{tg}\,\alpha_2)$ nicht symmetrisch; die Gruppe $\mathfrak{G}$ ist somit nicht kommutativ. Für die Punkte A, A^*, $\bar{A}$ in der Figur 7 gelten die Beziehungen

$$\frac{F_1 A^*}{F_1 A} = \sigma_1\,; \qquad \frac{F_2 \bar{A}}{F_2 A^*} = \sigma_2\,; \qquad \frac{F \bar{A}}{F A} = \sigma\,.$$

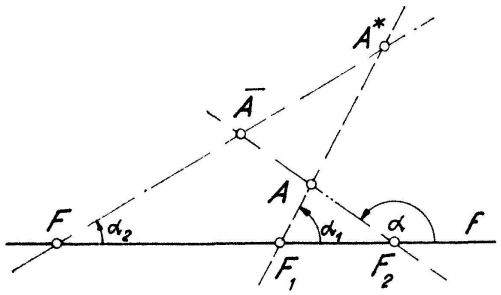
Die erste Gleichung von (6) besagt daher, dass

$$\frac{F_1 A^*}{F_1 A} \cdot \frac{F_2 \bar{A}}{F_2 A^*} \cdot \frac{F A}{F \bar{A}} = +1$$

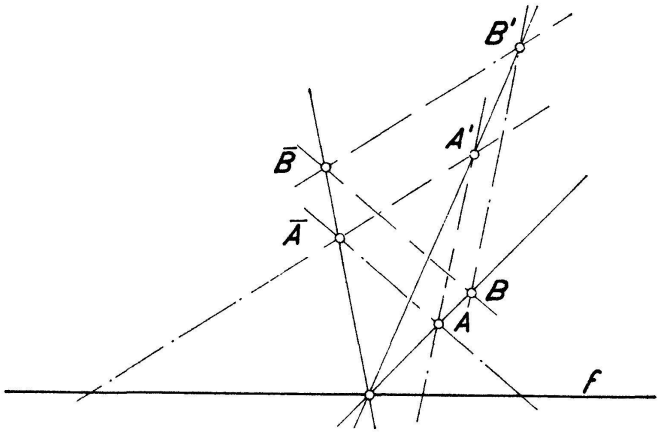
ist. Dies ist neuerdings der Satz von MENELAOS; er erscheint diesmal für das durch die Transversale f geschnittene Dreieck $A\,A^*\,\bar{A}$. Er steckt also auch als wesentlicher Bestandteil der Zusammensetzung in der Gruppe $\mathfrak{G}$[3]. Unterwirft man zwei Punkte A und B der Abbildung $\Phi_1 \circ \Phi_2$, so erhält man wiederum eine affine Form der Konfiguration von DESARGUES. Sie ist in der Figur 8 wiedergegeben. Die in den Gruppen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{G}$ sich abzeichnende Nachbarschaft der beiden Sätze von MENELAOS und

[3]) Vergleiche [5], Seite 66.

DESARGUES zeigt sich auch bei anderen Gelegenheiten. So sind verschiedene Beweise des Satzes von DESARGUES bekannt, bei denen der Satz von MENELAOS benutzt wird[4]). Aus den vorliegenden Betrachtungen liesse sich übrigens leicht ein Beweis dieser Art gewinnen.



Figur 7



Figur 8

Der Zusammenhang zwischen den Gruppen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{G}$

Das gleichzeitige Auftreten der Sätze von MENELAOS und DESARGUES in den Gruppen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{G}$ ist nicht zufälliger Natur. Die beiden Gruppen stehen einander im Lichte der projektiven Geometrie sehr nahe. Durch eine geeignete projektive Abbildung Ω lässt sich die Figur 7 in die Figur 2 überführen[5]); Ω muss die Gerade f der Figur 7 auf die unendlichferne Gerade der Figur 2 abbilden. $\mathfrak{G}$ ist projektiv-äquivalent mit der Untergruppe $\mathfrak{A}'$ jener Abbildungen aus $\mathfrak{A}$, die das Ähnlichkeitszentrum auf einer festen Geraden s haben. Den Gruppen $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{G}$ entspricht in der projektiven Geometrie die Gruppe $\mathfrak{P}$ der Perspektivitäten (oder perspektiven Kollineationen) mit fester Achse f, die gleichzeitig ihre Zentren auf einer festen Geraden s haben. Es sei

ψ_1 die Perspektivität mit der Achse f, dem Zentrum S_1 und der Charakteristik $\chi_1 = (A^* \, A \, S_1 \, F_1)$;

ψ_2 die Perspektivität mit der Achse f, dem Zentrum S_2 und der Charakteristik $\chi_2 = (\bar{A} \, A^* \, S_2 \, F_2)$.

Die Zusammensetzung $\psi = \psi_1 \circ \psi_2$ ist wiederum eine Perspektivität mit der Achse f und die drei Zentren S_1, S_2 und S liegen kolinear. Es folgt dies ohne weiteres aus der Struktur des Zusammensetzens in den Gruppen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{G}$.

Es müssen nun für die Gruppe $\mathfrak{P}$ Zusammensetzungsrelationen bestehen, die jene von $\mathfrak{A}'$ (nämlich die Gleichungen (1) und (2)) und jene von $\mathfrak{G}$ (nämlich die Gleichungen (6)) als Spezialfälle enthalten. Sie sollen kurz hergeleitet werden.

Wie in $\mathfrak{A}'$ sei die Verbindungsgerade von S_1 und S_2 wiederum mit s bezeichnet. T sei der Schnittpunkt von f und s (Figur 9). Ist nun g_0 eine beliebige, mit T nicht inzidente Gerade, so folgt

$$\chi_1 \cdot \chi_2 = (A^* \, A \, S_1 \, F_1) \, (\bar{A} \, A^* \, S_2 \, F_2) = (A_0^* \, A_0 \, S_0 \, F_0) \, (\bar{A}_0 \, A_0^* \, S_0 \, F_0) \, .$$

[4]) Vergleiche [6], Chapter XIII. Triangles in perspective.

[5]) Mit Ausnahme der Punkte F entsprechen sich dabei die gleichbezeichneten Punkte in den beiden Figuren.

Nun gilt aber bekanntlich für 5 Punkte auf einer Geraden die Relation

$$(A_0^* \, A_0 \, S_0 \, F_0) \, (\bar{A}_0 \, A_0^* \, S_0 \, F_0) \, (A_0 \, \bar{A}_0 \, S_0 \, F_0) = +1 \tag{7}$$

woraus man schliesst, dass

$$\chi = (\bar{A} \, A \, S \, F) = (\bar{A}_0 \, A_0 \, S_0 \, F_0) = \chi_1 \cdot \chi_2 \tag{8}$$

ist. Ist f die unendlichferne Gerade, so erhält man die Gruppenfigur von $\mathfrak{A}'$ und (8) geht in (1) über. Ist dagegen s unendlichfern, so liegt die Gruppenfigur von $\mathfrak{G}$ vor und (8) wird zur Beziehung (6^a).

Die Lage des Zentrums S von $\psi = \psi_1 \circ \psi_2$ ist durch die Beziehung

$$(S \, S_2 \, S_1 \, T) = \frac{1 - \chi_2}{1 - \chi_1 \, \chi_2} \tag{9}$$

gekennzeichnet. Man beweist (9), indem man etwa von

$$(S \, S_2 \, S_1 \, T) \, (S \, S_2 \, T \, S^*) \, (S \, S_2 \, S^* \, S_1) = +1$$

ausgeht und diese nach den bekannten Regeln über das Rechnen mit Doppelverhältnissen umformt. Man findet

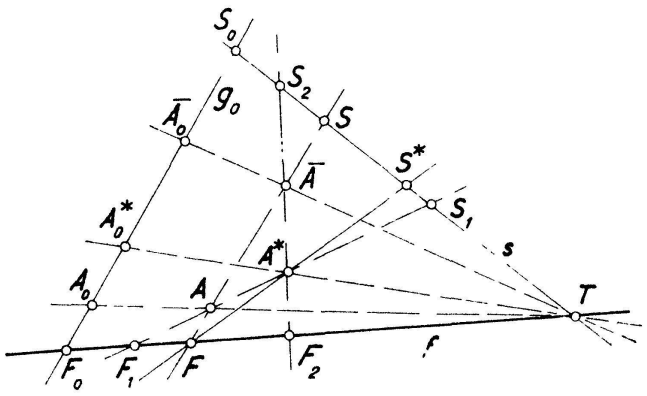
$$(S \, S_2 \, S_1 \, T) = \frac{(S \, S_2 \, S^* \, T)}{(S^* \, S_1 \, S \, S_2)} = \frac{1 - (S \, S^* \, S_2 \, T)}{1 - (S^* \, S_2 \, S \, S_1)} = \frac{1 - (S \, S^* \, S_2 \, T)}{1 - (S^* \, S \, T \, S_2) \, (S^* \, S \, S_1 \, T)} .$$

Nun ist aber, da S^* das Bild von S sowohl bei ψ_1 als auch bei ψ_2^{-1} ist,

$$(S^* \, S \, S_1 \, T) = \chi_1 ,$$

$$(S \, S^* \, S_2 \, T) = (S^* \, S \, T \, S_2) = \chi_2 ,$$

womit (9) bewiesen ist.



Figur 9

In der Gruppe $\mathfrak{A}'$ ist $\chi_i = \varkappa_i$ zu setzen und man hat

$$(S \, S_2 \, S_1 \, T) = \frac{S \, S_1}{S_2 \, S_1} = \frac{1 - \varkappa_2}{1 - \varkappa_1 \, \varkappa_2} \quad \text{bzw.} \quad \boldsymbol{S_1 \, S} = \frac{1 - \varkappa_2}{1 - \varkappa_1 \, \varkappa_2} \, \boldsymbol{S_1 \, S_2} .$$

Dies ist die bereits auf anderem Wege gefundene Beziehung (2). Andererseits ergibt sich in der Gruppe $\mathfrak{G}$ $\chi_i = 1/\sigma_i$ und es ist dann

$$(S \, S_2 \, S_1 \, T) = \frac{\sin(\alpha_1 - \alpha)}{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)} : \frac{\sin(-\alpha)}{\sin(-\alpha_2)} = \frac{1 - (1/\sigma_2)}{1 - (1/\sigma_1 \, \sigma_2)} = \frac{\sigma_1 \, (\sigma_2 - 1)}{\sigma_1 \, \sigma_2 - 1} .$$

Mit Hilfe der Additionstheoreme für die Winkelfunktionen führt dies auf

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha_1 - \operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha_1 - \operatorname{tg}\alpha_2} \cdot \frac{\operatorname{tg}\alpha_2}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{\sigma_1(\sigma_2 - 1)}{\sigma_1\sigma_2 - 1},$$

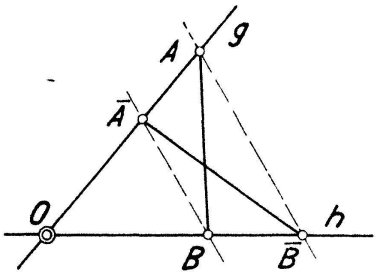
woraus sich durch Auflösen nach $\operatorname{tg}\alpha$ wiederum die Formel (6^b) gewinnen lässt.

Die Gruppe $\mathfrak{F}$ der gleichsinnigen flächentreuen Affinitäten mit zwei inzidenten Fixgeraden

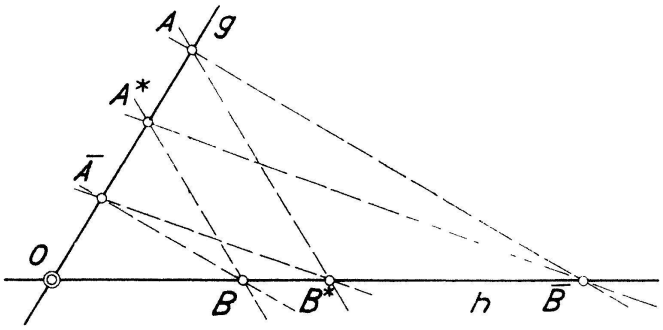
g und h seien zwei Geraden mit dem im Endlichen gelegenen Schnittpunkt O. Wir betrachten nun die Gruppe $\mathfrak{F}$ der gleichsinnigen flächentreuen Affinitäten Γ, bei denen g und h einzeln fest bleiben. Bei einer bestimmten Abbildung Γ gehe A auf g in den Punkt $\bar{A}$ auf g über; B und $\bar{B}$ sei ein solches Punktepaar auf der Geraden h (Figur 10). Aus der Flächeninvarianz von Γ folgt, dass die Verbindungsgeraden von A und $\bar{B}$ sowie von $\bar{A}$ und B parallel sind. Wir kennzeichnen für das weitere die Abbildung Γ durch das Verhältnis $\lambda = O\bar{A}/OA$ für korrespondierende Punkte auf der Geraden g. In der kommutativen Gruppe $\mathfrak{F}$ hat man die Zusammensetzungsregel

$$\Gamma = \Gamma_1 \circ \Gamma_2 \quad \text{mit} \quad \lambda = \lambda_1 \lambda_2 .$$

Dieser Gruppenoperation entspricht geometrisch die Konfiguration der Figur 11; es ist dies die *affine Form der Konfiguration von* PAPPUS-PASCAL[6]).



Figur 10



Figur 11

Die Abbildungen aus $\mathfrak{F}$ besitzen zwei bemerkenswerte Darstellungseigenschaften. Einerseits lassen sie sich erzeugen als Produkte von zwei perspektiven Affinitäten. Es sei

Φ_1 die perspektive Affinität mit der Achse h, dem Verhältnis $\sigma_1 = 1/\lambda$ und der Affinitätsrichtung parallel zu g;

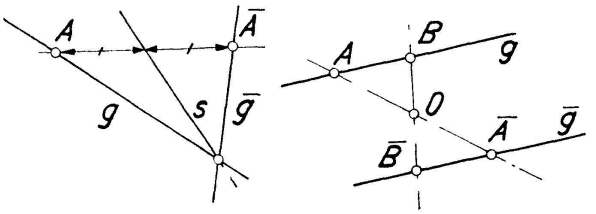
Φ_2 die perspektive Affinität mit der Achse g, dem Verhältnis $\sigma_2 = \lambda$ und der Affinitätsrichtung parallel zu h.

Bei Φ_1 und Φ_2 ist die Affinitätsrichtung der einen Abbildung parallel zur Achse der andern und die beiden Verhältnisse sind zueinander reziprok. Man sieht nun sofort, dass

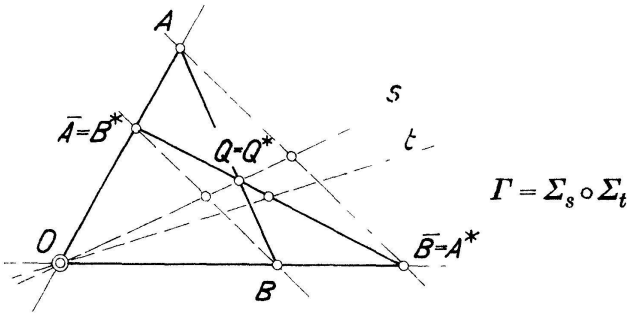
$$\Gamma(\lambda) = \Phi_1 \circ \Phi_2 = \Phi_2 \circ \Phi_1 \tag{10}$$

[6]) Vergleiche [2], Seite 55. Abbildungen aus der Gruppe F spielen eine Rolle bei der Einführung der natürlichen Logarithmen als Flächeninhalte unter der gleichseitigen Hyperbel. Vergleiche dazu [8].

ist. Tiefer geht nun aber die folgende Darstellungsart einer Abbildung Γ: *Jede Abbildung Γ ist als Produkt von zwei Affin-Spiegelungen darstellbar.* Unter einer Affin-Spiegelung versteht man eine involutorische affine Abbildung, die von der Identität verschieden ist. Es gibt zwei Typen, nämlich die *affinen Geradenspiegelungen* (perspektive Affinitäten mit $\sigma = -1$) und die *Punktspiegelungen.* Sie sind in der Figur 12 wiedergegeben.



Figur 12



Figur 13

Eine Abbildung Γ aus $\mathfrak{F}$ ist bestimmt durch die drei Punkte O, A, B und deren Bilder O, $\bar{A}$, $\bar{B}$ (Figur 13). Es existiert nun eine Affin-Spiegelung Σ_s, die das Dreieck OAB in das auf $O\bar{A}\bar{B}$ liegende Dreieck OA^*B^* überführt, wobei $A^* = \bar{B}$ und $B^* = \bar{A}$ ist. Die Achse s von Σ_s geht durch die Mittelpunkte der Strecken $A\bar{B}$ und $\bar{A}B$. Der Schnittpunkt der korrespondierenden Geraden AB und A^*B^* ist ein Fixpunkt von Σ_s und liegt daher auf s. Durch eine zweite Affin-Spiegelung Σ_t bilden wir jetzt noch das Dreieck OA^*B^* auf das Dreieck $O\bar{A}\bar{B}$ ab; die Achse t geht durch O und den Mittelpunkt der Strecke $\bar{A}\bar{B}$. Damit haben wir jetzt die Darstellung

$$\Gamma = \Sigma_s \circ \Sigma_t \tag{11}$$

gefunden. Die Abbildung Γ ist affin-2spiegelig[7]).

Durch projektive Abbildung der Figur 11 erhalten wir die allgemeine Konfiguration von PAPPUS-PASCAL. Ihr liegt eine Gruppe $\mathfrak{F}'$ von projektiven Abbildungen zu Grunde, die gemäss (10) als Produkte von zwei geeigneten Perspektivitäten Φ_1' und Φ_2' darstellbar sind. Andererseits besagt (11), dass jede Abbildung aus $\mathfrak{F}'$ das Produkt von zwei Projektiv-Spiegelungen ist. Es sind dies Perspektivitäten mit der Charakteristik -1.

Die Gruppe $\mathfrak{P}^*$ aller Projektivitäten in der Ebene ist 3spiegelig; dies will heissen, dass jede projektive Abbildung der Ebene auf sich selbst als Produkt von drei Projektiv-Spiegelungen geschrieben werden kann[8]). Die 2spiegeligen Abbildungen aus $\mathfrak{P}^*$ sind gruppengeometrisch ausgezeichnet. Sie spielen bei der Untersuchung der projektiven Automorphismen eines Kegelschnittes eine wichtige Rolle. Unsere beiden Gruppen $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}'$ sind in diesem Lichte zu betrachten; es sind dies *Gruppen von Automorphismen für einen ausgearteten Kegelschnitt.*

Ein anderes Beispiel für eine Automorphismengruppe zu einem Kegelschnitt ist etwa die Gruppe $\mathfrak{D}$ der Drehungen eines Kreises c um dessen Mittelpunkt. Ist Θ_α die Drehung um den Winkel α, dann gilt in $\mathfrak{D}$

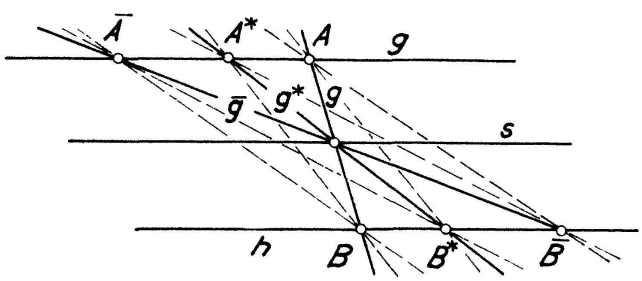
$$\Theta_\alpha \circ \Theta_\beta = \Theta_{\alpha+\beta}\,.$$

---

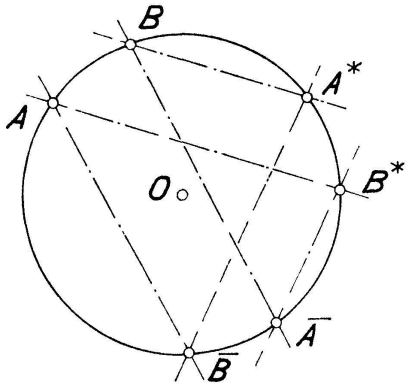
[7]) Affin-2spiegelig will heissen, dass die beiden Involutionen Affinitäten sind.

[8]) Vergleiche [9], Seite 76.

Unterwerfen wir zwei Kreispunkte A und B der Abbildung Θ_α, so sind die Verbindungsgeraden AB^* und A^*B parallel; gleichlange Bogen auf einem Kreis liegen ja stets axialsymmetrisch. Zeichnet man nun die entsprechenden Parallelen auch für Θ_β und $\Theta_{\alpha+\beta}$, so erhält man eine *affine Form der Figur des Satzes von Pascal* (Figur 15). Wir erwähnen, dass die Abbildungen aus $\mathfrak{D}$ wiederum 2spiegelig sind; bekanntlich lässt sich ja jede Drehung als Produkt von axialen Symmetrien, das heisst metrischen Spiegelungen erzeugen. Es schimmert hier der *Pascalsche Satz als Gruppenfigur bei den Automorphismen eines Kegelschnittes* durch. Es sei noch darauf hingewiesen, dass in den Gruppen $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}'$ nur jener Fall der Konfiguration von PAPPUS-PASCAL steckt, bei dem O nicht mit der Pascalschen Geraden inzident ist. Der fehlende Spezialfall liegt einer andern Gruppe zu Grunde. Nehmen wir die affine Form, so müssen wir von zwei parallelen Geraden g und h ausgehen. Anstelle der Gruppe $\mathfrak{F}$ tritt nun die Gruppe $\mathfrak{S}$ der *Scherungen*[9]) mit der Mittelparallelen s als Achse (Figur 14).



Figur 14



Figur 15

Scherungen sind aber wiederum affin-2spiegelig. Wie man leicht feststellt, lässt sich jede Scherung mit der Achse s auf unendlichviele Arten als Produkt von zwei Affin-Spiegelungen mit der Achse s darstellen.

M. JEGER, Luzern

LITERATURVERZEICHNIS

[1] BACHMANN, F., *Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff*. Grundlehren der math. Wissenschaften, Bd. 96, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1959.

[2] FABER, K., *Kollineare Abbildungen und projektive Geometrie*. Schriftenreihe «Der Mathematikunterricht», Heft 1957/1 (Stuttgart).

[3] BAUR, A., *Die Sätze von Pascal und Brianchon*. Math.-Phys. Sem. Ber. Band IV, Heft 3/4 (Göttingen 1955).

[4] GUSE, S., *Beweise elementargeometrischer Sätze durch Spiegelungsrechnen*. Diss. (Kiel 1952).

[5] JEGER, M., *Konstruktive Abbildungsgeometrie* (Luzern 1959).

[6] JOHNSON, R. A.: Advanced Euclidean Geometry (New York 1960).

[7] KLEIN, F., *Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus*. Grundlehren der math. Wissenschaften, Bd. 14 und 15. Berlin 1924 und 1925.

[8] VAN DER WAERDEN, B. L., *Die Einführung des Logarithmus im Schulunterricht*. El. Math. *12*, 1–8, 1957.

[9] THOMSEN, G., *Grundlagen der Elementargeometrie in gruppenalgebraischer Behandlung*. Hamb. Math. Einzelschriften, Bd. *15*, 1933.

[9]) Scherungen sind perspektive Affinitäten, bei denen Richtung und Achse parallel sind; σ hat den Wert + 1. Vom projektiven Standpunkt aus gesehen handelt es sich um Perspektivitäten, bei denen Achse und Zentrum inzident sind. Man bezeichnet solche Perspektivitäten als Elationen.