Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 17 (1962)
Heft: 4

Artikel: Das Keplersche Ei
Autor: Fladt, Kuno
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-21914

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

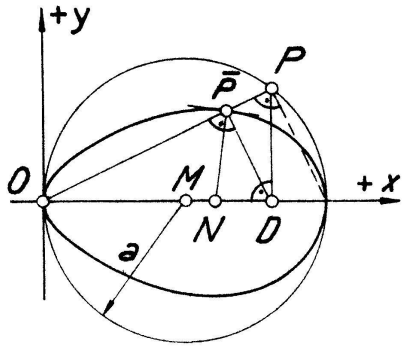
Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrer

Publiziert mit Unterstützung des Schweizerischen Nationalfonds
zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung

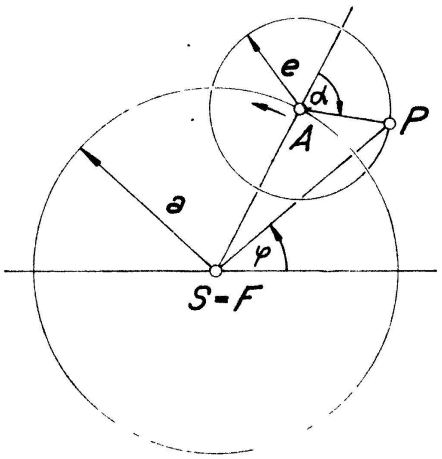
El. Math. Band XVII Nr. 4 Seiten 73–96 Basel, 10. Juli 1962

Das Keplersche Ei *)

1. In den Büchern von H. WIELEITNER, *Spezielle ebene Kurven* (Leipzig 1908), S. 152 und G. LORIA, *Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven*, I. Band, (Leipzig, 2, 1910), S. 380, wird das *Keplersche Ei* behandelt, eine Kurve, die vom Punkt $\overline{P}$ der Figur 1 beschrieben wird, wenn P sich auf dem Kreis um M mit Radius a bewegt. Ihre Polargleichung ist ersichtlich $r = 2\,a\cos^3\varphi$, ihre Cartesische Gleichung $(x^2 + y^2)^2 - 2\,a\,x^3 = 0$. Sie ist also eine Quartik. Ist $\overline{ON} = 3/4\ \overline{OD}$, so ist $\overline{PN}$ die Kurvennormale. Die Fläche der Kurve ist $5/8\,\pi\,a^2$, der Rauminhalt des von ihr erzeugten Drehkörpers bei Drehung um x-Achse $2 \cdot 4\,\pi\,a^3/5 \cdot 3$, dessen Oberfläche $313\,\pi\,a^2/140$. Der Kurvenumfang dagegen hängt von einem elliptischen Integral ab. Der Hochpunkt liegt bei $\varphi = \pi/6$.



Figur 1



Figur 2

WIELEITNER und LORIA verweisen beide auf JOHANNES KEPLER, *Astronomia nova* (Prag 1609), S. 337. Schlägt man nun in der neuen, von MAX CASPAR geschaffenen lateinischen Ausgabe in JOHANNES KEPLER, *Gesammelte Werke*, Band III (München 1937), S. 297–300, oder in der ebenfalls von MAX CASPAR geschaffenen deutschen Ausgabe von JOHANNES KEPLER, *Neue Astronomie* (München 1929), S. 277–281 nach, so ist man erstaunt, dort ein *ganz anderes* Keplersches Ei zu finden. Dass dies nicht das in den beiden Kurvenbüchern angegebene Ei sein kann, folgt schon daraus, dass es von *zwei*, jenes aber von *einer* Konstanten abhängt. Jenes ist aber auch nicht irgend

*) Nach einem Vortrag im Internationalen mathematikgeschichtlichen Kolloquium im Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach (Schwarzwald) vom 20. September 1961.

ein partikulärer Fall von diesem. Wie WIELEITNER und LORIA zu ihrer Behauptung kamen, entzieht sich meiner Kenntnis. Mit dem *wahren Keplerschen Ei* sollen sich nun die folgenden Zeilen beschäftigen.

2. Bei seinen unablässigen Versuchen, die wahre Bahn des Planeten Mars zu finden, die dann endlich mit der Ellipse zum Ziele führten, stiess KEPLER auf seine Eikurve, indem er (Figur 2) in Ptolemäischer Art den Planeten P auf einen kleinen *Epizykelkreis* (A, e) setzte, während A sich auf dem *Deferentenkreis* $(S, a \gg e)$ um die wahre Sonne S bewege sollte. Die Bewegung von P auf dem Epizykel sollte dabei gleichförmig sein und in Uhrzeigersinn erfolgen: α sollte proportional der Zeit sein, nämlich:

$$\alpha = \frac{2\pi t}{T}, \tag{1}$$

wenn T die Umlaufzeit von P auf dem Epizykel und zugleich von A um S ist, so dass sich die Werte 0 und π von α und dieselben Werte der *wahren Anomalie* oder des Polarwinkels φ entsprechen.

Der Punkt A aber sollte sich entgegen dem Uhrzeigersinn so um S drehen, dass der *Planet* P den von KEPLER gefundenen *Flächensatz*

$$r^2\, d\varphi = C\, dt \tag{2}$$

erfüllt. Aus dem Dreieck SPA der Figur 2 folgt für den Radiusvektor $\overline{SP} = r$

$$r^2 = a^2 + e^2 + 2\, a\, e \cos\alpha\,, \tag{3}$$

aus (2) aber mit (1)

$$r^2\, d\varphi = \frac{C\,T}{2\pi}\, d\alpha \equiv \lambda\, d\alpha\,. \tag{4}$$

Aus (3) und (4) kommt

$$\varphi = \int_0^{\alpha} \frac{\lambda\, d\alpha}{a^2 + e^2 + 2\, a\, e \cos\alpha} = \frac{2\lambda}{a^2 - e^2} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{a-e}{a+e} \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)_0^{\alpha}. \tag{5}$$

Die Bedingung $\varphi = \pi$ für $\alpha = \pi$, ergibt $\lambda = a^2 - e^2$ und damit wird nach (4)

$$C = \frac{2\pi(a^2 - e^2)}{T} \equiv \frac{2\pi b^2}{T}. \tag{6}$$

Aus (5) folgt

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{a-e}{a+e} \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{a-e}{a+e} \operatorname{tg}\frac{\pi t}{T}. \tag{7}$$

Löst man diese Beziehung nach $\cos\alpha$ auf und setzt in (3) ein, so erhält man

$$r^2 = \frac{(a^2 - e^2)^2}{a^2 + e^2 - 2\, a\, e \cos\varphi} \tag{8}$$

oder, wenn man noch

$$\varepsilon = \frac{2\, a\, e}{a^2 + e^2} \tag{9}$$

und

$$p = \frac{a^2 - e^2}{\sqrt{a^2 + e^2}} \equiv \frac{b^2}{c} \tag{10}$$

(vgl. (6)) setzt, als *Gleichung des Keplerschen Eies:*

$$r^2 = \frac{p^2}{1 - \varepsilon \cos\varphi}. \tag{11}$$

Diese Gleichung hängt mit der Gleichung der Planetenellipse

$$\bar{r} = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos\bar{\varphi}} \tag{12}$$

durch die Punktverwandtschaft

$$\bar{\varphi} = \varphi\,, \quad \bar{r} = \frac{r^2}{p}\,; \quad \bar{x} = \frac{x}{p}\sqrt{x^2 + y^2}\,, \quad \bar{y} = \frac{y}{p}\sqrt{x^2 + y^2} \tag{13}$$

zusammen, auf Grund deren man das Keplersche Ei sofort konstruieren kann.

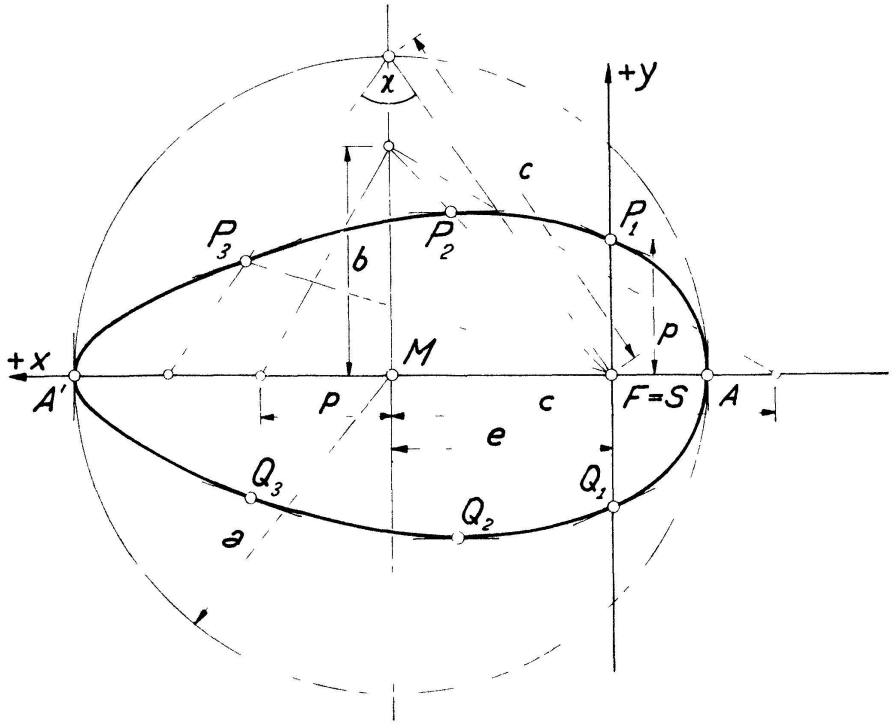
3. Wir wollen aber die Gleichung (11) für sich untersuchen und 8 Punkte des Eis bestimmen, mit deren Hilfe man es sofort zeichnen kann.

Aus (11) folgt

$$r' = \frac{-\varepsilon p \sin\varphi}{2(1 - \varepsilon\cos\varphi)^{3/2}}\,, \quad r'' = \frac{\varepsilon p\{-2\cos\varphi + \varepsilon(3 - \cos^2\varphi)\}}{4(1 - \varepsilon\cos\varphi)^{5/2}}\,. \tag{14}$$

Der Winkel ψ der Kurventangente mit dem Radiusvektor ergibt sich aus

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{r}{r'} = \frac{2(-1 + \varepsilon\cos\varphi)}{\varepsilon\sin\varphi} = -\frac{a^2 + e^2 - 2ae\cos\varphi}{ae\sin\varphi}\,. \tag{15}$$



Figur 3

Wir bestimmen nun die 6 schönsten Kurvenpunkte (Figur 3)[1]. Zuerst die beiden *Scheitel* A $(r = a - e, \varphi = \pi)$ und A' $(r = a + e, \varphi = 0)$; sodann die Punkte P_1 und Q_1 mit $r = \pm p$, $\varphi = \pi/2$ und

$$\operatorname{tg}\psi = -\frac{a^2 + e^2}{ae} = -\frac{c^2}{ae}$$

[1]) Um einen Vergleich der Figuren 1 und 3 zu ermöglichen, ist in Figur 3 die positive Richtung der Polarachse nach links gewählt.

(woraus ψ leicht zu konstruieren ist), weiter die Punkte P_2 und Q_2 mit $r = b$, $\sphericalangle P_2FM = \pm \varphi_2$, wo $\cos\varphi_2 = e/a$ und $\operatorname{tg}\varphi_2 = b/e = \operatorname{tg}\varphi_2$, also $\psi_2 = \varphi_2$ ist, so dass P_2 *Hochpunkt*, Q_2 *Tiefpunkt* ist; endlich die Punkte P_3 und Q_3 mit $r = c$, $\sphericalangle P_3FM = \pm \varphi_3$, wo $\cos\varphi_3 = \varepsilon = \sin\chi$, das heisst $\varphi_3 = \pi/2 - \chi$ und $\operatorname{tg}\psi = -2\operatorname{ctg}\chi$ ist.

In Figur 3 sind die Strecken (vgl. (6) und (10))

$$b = \sqrt{a^2 - e^2}, \quad c = \sqrt{a^2 + e^2}, \quad p = \frac{b^2}{c} \tag{16}$$

und der Winkel χ aus

$$\operatorname{tg}\frac{\chi}{2} = \frac{e}{a}, \quad \sin\chi = \varepsilon \tag{17}$$

gezeichnet und damit die 8 Punkte mit ihren Tangenten.

Im übrigen ergeben sich noch für die Fläche F des Eies, den Rauminhalt V und die Oberfläche O seines Drehkörpers bei Drehung um die Polarachse die Ausdrücke

$$F = \pi\,(a^2 - e^2) = \pi\,b^2 = \pi\,\frac{p^2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}, \tag{18}$$

$$V = \frac{4\,\pi\,b^4}{3\,c}, \tag{19}$$

$$O = \frac{\pi\,b^4}{a\,e}\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\frac{c^2 + a\,e\sqrt{3}}{c^2 - a\,e\sqrt{3}} + 2\,\frac{c^2}{b^2}\operatorname{arc\,tg}\frac{a\,e}{b^2}\right\}. \tag{20}$$

Die Bogenlänge dagegen ist ein elliptisches Integral.

4. Wir fragen jetzt nach dem *Kraftgesetz*, gemäss dem das Keplersche Ei durchlaufen wird. Auf Grund des Flächensatzes (2) ergibt sich in der analytischen Mechanik der Binetsche Ausdruck für die auf den Planeten mit der Masse m wirkende Kraft

$$\mathfrak{k} = m\,\mathfrak{w} = -\,m\,C^2\,z^2\,(z'' + z)\,\mathfrak{n}_r, \tag{21}$$

wo $\mathfrak{n}_r$ der Einheitsvektor in der Richtung des Radiusvektors und $z = 1/r$ ist. Nun ist

$$z = \frac{\sqrt{1 - \varepsilon\cos\varphi}}{p}. \tag{22}$$

Berechnet man z'' und setzt in (21) ein, so kommt also

$$\mathfrak{k} = -\,m\,C^2\left\{\frac{1-\varepsilon^2}{4\,p^4}\,z^{-1} + \frac{3}{4}\,z^3\right\}\mathfrak{n}_r. \tag{23}$$

Wir wollen nun umgekehrt die Bahnkurven des Kraftgesetzes (23) bestimmen. Die Bahndifferentialgleichung lautet:

$$z'' + z = \frac{1-\varepsilon^2}{4\,p^4}\,z^{-3} + \frac{3}{4}\,z. \tag{24}$$

Wir entnehmen aus der analytischen Mechanik sogleich das *Energieintegral*

$$z'^2 + z^2 = -\,2\int^r z^2\,(z'' + z)\,dr + h = 2\int^z (z'' + z)\,dz + h$$

$$= 2\int^z \left(\frac{1-\varepsilon^2}{4\,p^4}\,z^{-3} + \frac{3}{4}\,z\right)dz + h = -\,\frac{1-\varepsilon^2}{4\,p^4}\,z^{-2} + \frac{3}{4}\,z^2 + h \tag{25}$$

(h Integrationskonstante).

Es folgt

$$\frac{(2\,z\,dz)^2}{d\varphi^2} = -\frac{1-\varepsilon^2}{p^4} - z^4 + 4\,h\,z^2\,, \qquad d\varphi = \frac{d(z^2-2\,h)}{\sqrt{4\,h^2 - \frac{1-\varepsilon^2}{p^4} - (z^2-2\,h)^2}}\,,$$

$$\cos(\varphi-\varphi_0) = -\frac{z^2 - z\,h}{\sqrt{4\,h^2 - \frac{1-\varepsilon^2}{p^4}}} \qquad (\varphi_0 \text{ Integrationskonstante})\,,$$

oder mit

$$2\,h = \frac{1}{p'^2}$$

und wählt ε' so, dass mit (18)

$$\frac{p'^2}{\sqrt{1-\varepsilon'^2}} = \frac{p^2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} = b^2 \tag{26}$$

ist,

$$r^2 = \frac{p'^2}{1 \mp \varepsilon' \cos\varphi}\,, \tag{27}$$

wobei $\varphi_0 = 0$ gewählt ist.

Die Differentialgleichung (24) hat also, wenn man von den Drehungen um den Brennpunkt F[2]) absieht, ∞^1 Keplersche Eier als Lösungen, deren Konstanten p' und ε' durch (26) zusammenhängen. Die Grösse b'^2 ist also für alle Keplerschen Eier konstant, und damit haben sie alle dieselbe Fläche.

Ferner umhüllen die Keplerschen Eier die Kurve

$$y^2\,(x^2+y^2) = b^4\,. \tag{28}$$

Diese hat die x-Achse als Doppelasymptote, die Punkte $0/\pm b$ als Waage- und die Punkte $\pm b\sqrt[4]{2}\,(\sqrt{2}-1) \mid \pm b\sqrt[4]{\sqrt{2}-1}$ als Wendepunkte. Sie berührt die Eikurven, zu denen nach (27) auch alle zur Geraden P_1Q_1 symmetrischen gehören, in den Punkten P_3 und Q_3.

Für die Zeit gilt nach (7) die Gleichung

$$\operatorname{tg}\frac{\pi\,t}{T} = \frac{a+e}{a-e}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\,, \tag{29}$$

also eine viel einfachere als die berühmte Keplersche.

Bei zwei verschiedenen Eikurven gilt, weil sie dasselbe b^2 besitzen, die Gleichung $CT = C'T' = 2\,\pi\,b^2$, also lautet das «3. Keplersche Gesetz»

$$CT = \text{const} = 2\,\pi\,b^2\,. \tag{30}$$

5. Zuletzt noch vier Bemerkungen.

1. Das Keplersche Ei ist eine *halbe* algebraische Kurve. Sein Spiegelbild in bezug auf P_1Q_1 gehört mit dazu. Denn aus

$$r^2\,(1 \mp \varepsilon\cos\varphi) = p^2\,, \qquad x^2+y^2-p^2 = \mp\,\varepsilon\,x\sqrt{x^2+y^2}$$

folgt für *beide* Vorzeichen

$$(x^2+y^2-p^2)^2 = \varepsilon^2\,x^2\,(x^2+y^2) \tag{31}$$

[2]) F ist auch für das Keplersche Ei ein sogenannter ausserordentlicher Brennpunkt.

dieselbe $x \mid y$-Gleichung einer bizirkularen Quartik. Die Punkte $0 \mid \pm p$ sind Doppelpunkte dieser Quartik.

2. In Gleichung (27) muss, wenn wir statt p' und ε' wieder p und ε schreiben, $\varepsilon < 1$ sein, nur dann sind a und e reell und endlich. Wir betrachten diese Gleichung noch allgemeiner mit voneinander unabhängigen Parametern p und ε.

Für $\varepsilon = \pm 1$ wird die Kurvengleichung

$$r = \frac{p}{\sqrt{2}\cos\frac{\varphi}{2}} \quad \text{bzw.} \quad \frac{p}{\sqrt{2}\sin\frac{\varphi}{2}}. \tag{32}$$

Dies ist die sogenannte *Trisekante* mit dem Fernpunkt der x-Achse als drittem Doppelpunkt und den Asymptoten $y = \pm p\sqrt{2}$. Das Kraftgesetz lautet dann nur noch

$$\mathfrak{k} = -\frac{3\,m\,C^2}{4\,r^3}\,\mathfrak{n}_r. \tag{33}$$

Für $\varepsilon > 1$ erhält man eine Kurve

$$\{-(\varepsilon^2 - 1)\,x^2 + y^2\}\,(x^2 + y^2) - 2\,p^2\,(x^2 + y^2) + p^4 \equiv 0 \tag{34}$$

mit dem Asymptoten $y = \pm\sqrt{\varepsilon^2 - 1}\,x$ und den Wendepunkten

$$r = p\sqrt[4]{\frac{3}{\varepsilon^2 - 1}}, \quad \cos\varphi = \pm\frac{1}{\varepsilon}\left\{1 - \sqrt{\frac{\varepsilon^2 - 1}{3}}\right\}.$$

$\varepsilon = \pm 2$ gibt Wendedoppelpunkte. Die Doppelpunktstangenten sind $y \mp p = \pm z/2x$.

3. Wir betrachten die genannte Gleichung auch noch mit $-p^2$ statt p^2. Sie lautet dann

$$r = \pm\frac{p}{\sqrt{\varepsilon\cos\varphi - 1}} \quad \text{mit} \quad \varepsilon > 1. \tag{35}$$

Die endlichen Doppelpunkte sind isolierte Punkte, die Asymptoten lauten wieder

$$y = \pm\sqrt{\varepsilon^2 - 1}\,x = \pm\operatorname{tg}\alpha\,x, \quad \cos\alpha = \frac{1}{2}.$$

Die Wendepunkte folgen aus

$$r = \pm p\sqrt[4]{\frac{3}{\varepsilon^3 - 1}}, \quad \cos\varphi = \frac{1}{\varepsilon}\left(1 + \sqrt{\frac{\varepsilon^2 - 1}{3}}\right).$$

Sie sind reell für $1 < \varepsilon \leqq 2$ und fallen für $\varepsilon = 2$ zusammen in den Punkten $\varphi = 0$, $r = \pm p$.

4. Schliesslich ist noch bemerkenswert, dass eine nähere Untersuchung folgendes lehrt: Wünscht man Planetenbahnen, bei denen nur *elementare Funktionen*, das heisst algebraische und elementare transzendente Funktionen ins Spiel kommen, so gibt es nur *zwei* wirklich elementare Fälle: *a*) Die Keplerellipsen und *b*) Die Keplerschen Eier, und zwar entweder als nach einmaligem Umlauf geschlossene Kurven oder als solche mit «Perihelbewegung», die sich entweder nach mehrmaligem Umlauf oder nie schliessen. Bei den Keplerellipsen sind dabei die infolge einer elastischen Anziehungskraft $N = -\lambda^2 r\,\mathfrak{n}_1$ entstehenden mit einbezogen.

KUNO FLADT, Calw