

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 17 (1962)  
**Heft:** 3

**Rubrik:** Kleine Mitteilungen

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 16.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Une conséquence immédiate de notre théorème est que le problème s'il existe une infinité de nombres triangulaires qui ne sont pas sommes de deux nombres triangulaires  $> 0$  équivaut au problème s'il existe une infinité de nombres premiers qui sont sommes de carrés de deux nombres naturels consécutifs. Il résulte sans peine de l'hypothèse  $H_0$  de M. A. SCHINZEL, exprimée dans les Acta Arithmetica IV (1958), p. 188, qu'il existe une infinité de tels nombres premiers. Pour  $n \leq 10$  on obtient les nombres premiers de la forme  $n^2 + (n + 1)^2$  seulement pour  $n = 1, 2, 4, 5, 7$  et  $9$ : ce sont les nombres 5, 13, 41, 61, 113, 181. W. SIERPIŃSKI (Varsovie)

## Ungelöste Probleme

**Nr. 43.** Ein dem Unterzeichneten von A. J. H. M. VAN DE VEN mitgeteiltes Problem lautet wie folgt: Gibt es in der euklidischen Ebene sechs nicht auf ein und demselben Kegelschnitt gelegene Punkte derart, dass alle sechs durch je fünf der Punkte bestimmten Kegelschnitte untereinander kongruent sind? – Prinzipiell lässt sich dieses Problem in endlich vielen Schritten auf algebraischem Wege entscheiden, die Rechnungen sind aber kaum zu übersehen. Dasselbe Problem für vier Punkte und Kreise führt auf die vollständige Lösung, die durch drei beliebige Punkte und das Orthozentrum des durch sie gebildeten Dreiecks gegeben ist.

J. J. SCHÄFFER, Montevideo

## Kleine Mitteilungen

### Einige Bemerkungen zu einer Aufgabe von L. CARLITZ

Die in einer Aufgabe von L. CARLITZ [1] gestellte Frage nach der Bestimmung der Anzahl  $N$  der Lösungen der Kongruenz

$$(x^2 - 1)(x^2 - 2) \dots \left(x^2 - \frac{p-1}{2}\right) \equiv 0 \pmod{p}$$

erfordert für die beiden Fälle  $p \equiv 1 \pmod{4}$  und  $p \equiv 3 \pmod{4}$  eine ganz verschiedenartige Behandlung. Für den ersten Fall ergibt sich ohne weiteres

$$N = \frac{p-1}{2}, \quad p \equiv 1(4), \quad (1)$$

da es für  $p = 4z + 1$  zwischen 0 und  $p/2$  gleich viele quadratische Reste und Nichtreste gibt. Für den Fall  $p = 4z + 3$  kann man die zuerst von DIRICHLET bewiesenen Formeln für die Klassenzahl des quadratischen Körpers  $R(\sqrt{-p})$  benutzen, da in ihnen der Überschuss der Anzahl der zwischen 0 und  $p/2$  liegenden quadratischen Reste über die Anzahl der Nichtreste, also der Ausdruck  $N - (p-1)/2$  auftritt [2]. Man erhält so die Formeln [3]

$$N = \frac{p-1}{2} + 3h(-p), \quad p \equiv 3(8),$$

$$N = \frac{p-1}{2} + h(-p), \quad p \equiv 7(8). \quad (2)$$

Im folgenden wollen wir zeigen, dass sich für den Fall  $p = 4z + 3$   $N$  auch unabhängig von der Klassenformel bestimmen lässt und zwar als mod  $p$  kleinster positiver Rest eines geschlossenen Ausdrucks, der im wesentlichen von einer gewissen Bernoullischen Zahl abhängt. Umgekehrt ergibt sich daraus eine interessante Kongruenz, der im Falle  $p = 4z + 3$  die Klassenzahl  $h(-p)$  genügt.

Im folgenden sei also  $p = 4z + 3$ . Da nach dem Eulerschen Kriterium  $a^{p-1/2} \equiv \pm 1 \pmod p$  ist, je nachdem, ob  $a$  Rest oder Nichtrest ist, ist die gesuchte Anzahl  $N$  der Lösungen der vorgelegten Kongruenz

$$N \equiv \sum_{a=1}^{\frac{p-1}{2}} \left(1 + a^{\frac{p-1}{2}}\right) \equiv \frac{p-1}{2} + \sum_{a=1}^{\frac{p-1}{2}} a^{\frac{p-1}{2}} \pmod p.$$

Es kommt zur Bestimmung von  $N$  auf die Summe

$$\sum_{a=1}^{\frac{p-1}{2}} a^{\frac{p-1}{2}} = 1^{\frac{p-1}{2}} + 2^{\frac{p-1}{2}} + \dots + \left(\frac{p-1}{2}\right)^{\frac{p-1}{2}}$$

an. Nun gilt bekanntlich für die Summe der  $k$ -ten Potenzen der  $n$  ersten natürlichen Zahlen die Formel

$$1^k + 2^k + \dots + n^k = \frac{n^{k+1}}{k+1} + \frac{n^k}{2} + \binom{k}{1} \frac{B_1}{2} n^{k-1} - \binom{k}{3} \frac{B_2}{4} n^{k-3} + \binom{k}{5} \frac{B_3}{6} n^{k-5} - + \dots,$$

worin die  $B_i$  die Bernoullischen Zahlen bedeuten.

$$\left(B_1 = \frac{1}{6}, B_2 = \frac{1}{30}, B_3 = \frac{1}{42}, B_4 = \frac{1}{30}, B_5 = \frac{5}{66}, \dots\right)$$

Aus ihr folgt die andere

$$k [1^{k-1} + 2^{k-1} + \dots + (n-1)^{k-1}] = n^k - k \frac{n^{k-1}}{2} + \binom{k}{2} B_1 n^{k-2} - \binom{k}{4} B_2 n^{k-4} + \binom{k}{6} B_3 n^{k-6} - + \dots.$$

Während die linke Seite nur für ganzzahlige  $n$  Bedeutung hat, kann die rechte auch auf beliebige Werte  $n$  ausgedehnt werden. So ergibt sich die Bernoullische Funktion  $k$ -ter Ordnung

$$\varphi(n, k) = n^k - \frac{1}{2} k n^{k-1} + \binom{k}{2} B_1 n^{k-2} - \binom{k}{4} B_2 n^{k-4} + \binom{k}{6} B_3 n^{k-6} - + \dots.$$

Es ist also

$$k [1^{k-1} + 2^{k-1} + \dots + n^{k-1}] = \varphi(n, k) + k n^{k-1}$$

und

$$N \equiv \frac{p-1}{2} + \sum_{a=1}^{\frac{p-1}{2}} a^{\frac{p-1}{2}} \equiv \frac{p-1}{2} + 2 \varphi\left(\frac{p-1}{2}, \frac{p+1}{2}\right) + \left(\frac{p-1}{2}\right)^{\frac{p-1}{2}} \pmod p,$$

also, da  $k-1 = \frac{p-1}{2}$ , also  $k = \frac{p+1}{2}$  (gerade) und  $n = \frac{p-1}{2}$ ,

$$N \equiv \frac{p-1}{2} + 2 \varphi\left(-\frac{1}{2}, \frac{p+1}{2}\right) + \left(\frac{p-1}{2}\right)^{\frac{p-1}{2}} \pmod p.$$

Nun ist für ein gerades  $k$

$$\begin{aligned} \varphi\left(\frac{1}{2}, k\right) &= \left(\frac{1}{2}\right)^k - \frac{1}{2} k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} + \binom{k}{2} B_1 \left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} - \binom{k}{4} B_2 \left(\frac{1}{2}\right)^{k-4} + - \dots, \\ \varphi\left(-\frac{1}{2}, k\right) &= \left(\frac{1}{2}\right)^k + \frac{1}{2} k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} + \binom{k}{2} B_1 \left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} - \binom{k}{4} B_2 \left(\frac{1}{2}\right)^{k-4} + - \dots, \\ \varphi\left(-\frac{1}{2}, k\right) - \varphi\left(\frac{1}{2}, k\right) &= k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}. \end{aligned}$$

Die Theorie der Bernoullischen Funktionen [4] liefert den Wert

$$\varphi\left(\frac{1}{2}, k\right) = (-1)^{\frac{k}{2}} \frac{2^k - 1}{2^{k-1}} B_{\frac{1}{2}k}, \text{ wenn } k \equiv 0 \pmod{2},$$

folglich

$$\varphi\left(-\frac{1}{2}, k\right) = (-1)^{\frac{k}{2}} \frac{2^k - 1}{2^{k-1}} B_{\frac{1}{2}k} + k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

und, da  $k = \frac{p+1}{2} = 2z+2$ ,

$$N = \frac{p-1}{2} + 2(-1)^{z+1} \frac{2^{\frac{p+1}{2}} - 1}{2^{\frac{p-1}{2}}} B_{z+1} + (2z+2) \left(\frac{1}{2}\right)^{2z} - \left(\frac{1}{2}\right)^{2z+1} \pmod{p}$$

$$\equiv \frac{p-1}{2} + 2(-1)^{z+1} \frac{2\binom{2}{p} - 1}{\binom{2}{p}} B_{z+1} + (p+1) \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{p-1}{2}} - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p},$$

$$N \equiv \frac{p-1}{2} + (-1)^{z+1} 2 \left(2 - \binom{2}{p}\right) B_{z+1} \pmod{p},$$

$$N \equiv \frac{p-1}{2} + (-1)^{\frac{p+1}{4}} 2 \left(2 - \binom{2}{p}\right) B_{\frac{p+1}{4}} \pmod{p}, \quad p = 4z+3 > 3, \quad (3)$$

$$p \equiv 3 \pmod{8}; \quad N \equiv \frac{p-1}{2} - 6 B_{\frac{p+1}{4}} \pmod{p}, \quad (4)$$

$$p \equiv 7 \pmod{8}; \quad N \equiv \frac{p-1}{2} + 2 B_{\frac{p+1}{4}} \pmod{p}.$$

Da  $B_{z+1}$  ein Bruch ist, hat die Kongruenz (3) nur dann eine Bedeutung, wenn der Nenner von  $B_{z+1} = B_{(p+1)/4}$  relativ prim ist zu  $p$ . Nach dem v. Staudt-Clausenschen Satz [5] über die Beschaffenheit des Nenners einer Bernoullischen Zahl  $B_n$  enthält der Nenner von  $B_n$  nur solche Primzahlen  $\alpha$ , für die  $\alpha - 1$  ein Teiler von  $2n$  ist, die also nicht grösser als  $2n + 1$  sind. In unserem Fall ist  $2n + 1 = (p+1)/2 + 1 = (p+3)/2$ . Wäre  $p$  ein solcher Teiler, so wäre  $p \leq (p+3)/2$ ,  $p = 3$ , da  $p$  ungerade ist. Hier versagt in der Tat unsere Formel, da für  $p = 3$   $(2/p) = -1$  ist,  $N \equiv 1 - 2(2+1)1/6 \equiv 0 \pmod{3}$ , während doch  $N = 2$  ist. (3) gilt also nur, wenn  $p = 4z+3 > 3$ .

Die Kongruenz (3) steht im Zusammenhang mit einem anderen Problem der Zahlentheorie. Aus dem Wilsonschen Satz ergibt sich nämlich, dass für  $p = 4z+3$

$$\left(\frac{p-1}{2}\right)! \equiv \pm 1 \equiv (-1)^\beta \pmod{p},$$

wobei  $\beta$  die Anzahl der quadratischen Nichtreste von  $p$  ist, welche  $< p/2$  sind (P. BACHMANN, *Niedere Zahlentheorie I*, 1902, S. 178 und 179). Aus der Formel (3) ergibt sich nun unmittelbar  $\beta$  als mod  $p$  kleinster pos. Rest aus der Kongruenz

$$\beta \equiv \frac{p-1}{2} - \frac{N}{2} \equiv \frac{p-1}{4} + (-1)^{\frac{p-3}{4}} \left(2 - \binom{2}{p}\right) B_{\frac{p+1}{4}} \pmod{p}.$$

**Satz:** Für jede Primzahl  $p = 4z+3 > 3$  ist  $\left(\frac{p-1}{2}\right)! \equiv (-1)^\beta \pmod{p}$ , wobei  $\beta$  der mod  $p$  kleinste pos. Rest ist, der sich aus der Kongruenz

$$\beta \equiv \frac{p-1}{4} + (-1)^{\frac{p-3}{4}} \left(2 - \binom{2}{p}\right) B_{\frac{p+1}{4}} \pmod{p}$$

ergibt.

Vergleicht man die Formeln (2) und (4), so erhält man

$$\begin{aligned} p \equiv 3 \pmod{8}; \quad h(-p) &\equiv -2 \frac{B_{p+1}}{4} \pmod{p}, \quad p \neq 3 \\ p \equiv 7 \pmod{8}; \quad h(-p) &\equiv 2 \frac{B_{p+1}}{4} \pmod{p}, \end{aligned} \quad (5)$$

also

$$p = 4z + 3; \quad h(-p) \equiv 2 \left(\frac{2}{p}\right) \frac{B_{p+1}}{4} \pmod{p}. \quad (6)$$

*Satz:* Für  $p = 4z + 3 > 3$  genügt die Klassenzahl  $h(-p)$  des quadratischen Körpers  $R(\sqrt{-p})$  der Kongruenz

$$h(-p) \equiv 2 \left(\frac{2}{p}\right) \frac{B_{p+1}}{4} \pmod{p}.$$

W. JÄNICHEN, Berlin-Zehlendorf

#### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] Aufgabe Nr. 359, *El. d. Math.* 14, 89 (1959).
- [2] DAVID HILBERT, *Bericht über die Theorie der algebraischen Zahlkörper* (Georg Reimer, Berlin 1897), S. 320.
- [3] *El. Math.* 15, 110, 111 (1960).
- [4] O. SCHLÖMILCH, *Compendium der höheren Analysis*, Bd. II (Fr. Vieweg, Braunschweig 1866), S. 207f.
- [5] P. BACHMANN, *Niedere Zahlentheorie* (B. G. Teubner, Leipzig) II. Bd., S. 43f. – HARDY-WRIGHT, *Einführung in die Zahlentheorie* (Oldenburg, München 1958), S. 101.

## Neue Aufgaben<sup>1)</sup>

**Aufgabe 429.** Eine Ellipse mit gegebenem Achsenverhältnis  $b : a = \beta$  und festem Mittelpunkt, aber mit nach Grösse und Richtung veränderlichen Achsen, berührt beständig zwei gegebene Parallelen im Abstand  $d$  vom Mittelpunkt. Man bestimme die beiden Ränder des Gebietes, das von der Ellipse überstrichen wird (Envelope der Schar im engeren Sinne).  
C. BINDSCHEDLER, Küsnacht

**Aufgabe 430.** Démontrer que chacune des formules

$$n \mid 2^n + 1, \quad n \mid 2^{2^n} + 1, \quad n \mid 2^n + 2$$

a une infinité de solutions en nombres naturels  $n$ .

W. SIERPIŃSKI, Varsovie

**Aufgabe 431.** Zu beweisen: Stimmen zwei auf einer Fläche  $\Phi$  verlaufende Kurven  $c_1$  und  $c_2$  in einem Punkte  $U$  des wahren Umrisses von  $\Phi$  in den Linienelementen von genau  $n$ -ter Ordnung überein, so haben ihre Projektionen  $c_1^*$  und  $c_2^*$  in der Projektion  $U^*$  von  $U$  ein Linienelement von mindestens  $(n+1)$ -ter Ordnung gemeinsam. Berühren die Flächenkurven  $c_1$  und  $c_2$  in  $U$  den wahren Umriss von  $\Phi$ , so haben ihre Projektionen  $c_1^*$  und  $c_2^*$  sogar ein Linienelement von mindestens  $(n+2)$ -ter Ordnung gemeinsam, wobei vorausgesetzt wird, dass die Kurven  $c_1$  und  $c_2$  in  $U$  keine projizierende Tangente haben.

H. VOGLER, Wien

<sup>1)</sup> Umständehalber enthält das vorliegende Heft ausnahmsweise keine Aufgabenlösungen.