Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 17 (1962)
Heft: 2

Rubrik: Aufgaben

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Aufgaben

Aufgabe 395. *u, v, n* seien natürliche Zahlen, die der Ungleichung

$$A = 2^u (2v + 1) \leqq n$$

genügen. Ferner sei

$$1 \leqq a_1 < a_2 < \cdots < a_k \leqq n$$

eine Folge von natürlichen Zahlen, die folgende Bedingungen erfüllt: 1. A kommt unter den a_i $(1 \leqq i \leqq k)$ vor, das heisst $A = a_r$ für einen Index $r \leqq k$. 2. Kein a_i ist durch ein a_j mit $j \neq i$ teilbar. Man beweise, dass die maximale Anzahl dieser Zahlen a_i gegeben wird durch

$$\max k = n - \left[\frac{n}{2}\right] - \left[\frac{1}{2}\left(\frac{n}{3^u (2v + 1)} - 1\right)\right].$$

$[y]$ bedeutet die grösste ganze Zahl $\leqq y$, und für $y \leqq 0$ wird $[y] = 0$ gesetzt. P. ERDÖS

Lösung des Aufgabenstellers: Wir zeigen zuerst

$$\max k \geqq n - \left[\frac{n}{2}\right] - \left[\frac{1}{2}\left(\frac{n}{3^u (2v + 1)} - 1\right)\right], \tag{1}$$

Wir definieren die a_i wie folgt: Wenn $n/2 < x \leqq n$, $x \not\equiv 0 \pmod{2v + 1}$, dann ist x ein a_j. Die weiteren a_i sind die folgenden Zahlen: $2^u (2v + 1)$, $2^r (2v + 1)\, b$ mit ungeradem $b > 1$ und

$$\frac{n}{3^{r+1} (2v + 1)} < b \leqq \frac{n}{3^r (2v + 1)}, \qquad \text{wo } 0 \leqq r < u \text{ ist.}$$

Offenbar ist kein a_i durch ein a_j mit $i \neq j$ teilbar. Die Anzahl der a_i kann man wie folgt bestimmen: Es sei $a_j = 2^{u_j} b_j$, $b_j \equiv 1 \pmod 2$. Offenbar sind die b_j alle verschieden, denn aus $b_r = b_s$ würde $a_r \mid a_s$ folgen. Die einzigen ungeraden Zahlen, die unter den b_j nicht vorkommen, sind die Zahlen

$$(2v + 1)\, b, \qquad 1 < b \leqq \frac{n}{3^u (2v + 1)}. \tag{2}$$

Die Anzahl der ungeraden Zahlen $\leqq x$ ist $x - [x/2] = [(x + 1)/2]$ und die Anzahl der Zahlen $1 < b \leqq x$, $b \equiv 1 \pmod 2$ ist $[(x - 1)/2]$. Also ist die Anzahl der Zahlen von der Form (2) gleich

$$\left[\frac{1}{2}\left(\frac{n}{3^u (2v + 1)} - 1\right)\right]$$

(für $n < 3^{u+1} (2v + 1)$ verschwindet dieser Ausdruck). Daher ergibt sich als Anzahl der b_j, also auch der a_j die rechte Seite von (1) und (1) ist damit bewiesen.

Jetzt zeigen wir die zweite Hälfte unserer Ungleichung. Es sei $a_1 < a_2 < \cdots < a_k \leqq n$ eine unserer Folgen. Wir schreiben $a_j = 2^{u_j} b_j$, $b_j \equiv 1 \pmod 2$ und wollen zeigen, dass unter den b_j mindestens soviel Zahlen fehlen, wieviel Zahlen es gibt, die (2) befriedigen. Wenn wir dies geleistet haben, sind wir fertig. Es sei

$$1 < d \leqq \frac{n}{3^u (2v + 1)}, \qquad (d, 6) = 1 \quad \text{oder} \quad d = 3.$$

Die Zahlen $d \cdot 3^t$, $t \geqq 0$, enthalten offenbar alle der Ungleichung in (2) genügenden Zahlen und jede genau einmal. Es sei also

$$1 < d < 3d \cdots < 3^{t_1} d \leqq \frac{n}{3^u (2v + 1)} < 3^{t_1+1} d < \cdots < 3^{t_1+u} d \leqq \frac{n}{2v + 1} < \cdots \tag{3}$$

Ich behaupte nun, dass die Anzahl der unter den Zahlen $(2v + 1)\, d \cdot 3^t$ vorkommenden b_j höchstens u ist, dass also mindestens t_1 fehlen. Wenn dies bewiesen ist, sind wir fertig, denn t_1 ist nach (3) die Anzahl der die Ungleichung in (2) befriedigenden Zahlen. Es seien $(2v + 1)\, d \cdot 3^{v_j}$, $0 < v_1 < v_2 < \cdots < v_r$ die b_j unter den Zahlen (3), $a_j = 2^{u_j} (2v + 1)\, d \cdot 3^{v_j}$. Da $2v + 1$ ein b ist und $a_i = 2^u (2v + 1)$, gilt offenbar $u > v_1 > v_2 > \cdots > v_r$, also $r \leqq u$, q. e. d.

Aufgabe 396. Die Tatsache, dass Potenzen mit teilerfremder Basis teilerfremd sind, wird gern zum Beweis der Irrationalität n-ter Wurzeln verwendet; sie ist eine unmittelbare Folge aus der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung. Man beweise sie ohne Benützung der Lehre von den Primzahlen. E. TEUFFEL, Stuttgart

Lösung: Wir beweisen den Satz:

$$\text{Aus } (a, b) = 1 \text{ folgt } (a^2, b) = 1 .$$

Beweis: Sind a und b zwei teilerfremde Zahlen, so liefert der Euklidische Algorithmus zwei ganze rationale Zahlen x, y so, dass $a x + b y = 1$. Setzt man $(a^2, b) = d$, $a^2 = s d$, $b = t d$, so wird

$$(a x + b y)^2 = d(s x^2 + 2 a t x y + t^2 d y^2) = 1 ,$$

woraus sofort $d = 1$ folgt. Mehrfache Anwendung dieses Satzes liefert $(a^{2^k}, b^{2^k}) = 1$. Aus $(a^n, b^n) = 1$ folgt aber sofort $(a^r, b^s) = 1$ für $r \leqq n$, $s \leqq n$. L. BERNSTEIN, Tel-Aviv

Weitere Lösungen sandten W. JÄNICHEN (Berlin-Zehlendorf) und O. REUTTER (Ochsenhausen/Deutschland).

Aufgabe 397. Das Dreieck $P_1P_2P_3$ sei dem Einheitskreis einbeschrieben. Es sei I der Inkreismittelpunkt, r der Inkreisradius und H der Höhenschnittpunkt. Man setze

$$c_i = (-1)^k \overline{P_i H} - \overline{P_i I} + \frac{2r}{\overline{P_i I}} \qquad (i = 1, 2, 3),$$

wo $k = 2n$ oder $= 2n + 1$ ist, je nachdem der Winkel bei P_i spitz oder stumpf ist. Was folgt aus der Bedingung

$$\frac{c_1 + c_2 + c_3}{3} = 1$$

über die Gestalt des Dreiecks? F. LEUENBERGER, Zuoz

Lösung: Es ist $a = 2\sin\alpha$, $b = 2\sin\beta$, $c = 2\sin\gamma$. Für den Dreiecksinhalt gilt

$$F = 0{,}5\, a\, b \sin\gamma = 2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma = r s = r(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)$$

$$= 4 r \cos\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\beta}{2} \cos\frac{\gamma}{2} .$$

Hieraus folgt $r = 4 \sin\alpha/2 \sin\beta/2 \sin\gamma/2$. Nun ist

$$\overline{P_1 I} = \frac{r}{\sin\alpha/2} = 4 \sin\frac{\beta}{2} \sin\frac{\gamma}{2}, \qquad \overline{P_1 H} = \frac{c\cos\alpha}{\sin\gamma} = 2\cos\alpha .$$

Ist α stumpf, so ist $\cos\alpha < 0$, also $\overline{P_1 H} = -2\cos\alpha$, folglich $(-1)^k \overline{P_1 H} = 2\cos\alpha$. Nun hat man

$$\begin{aligned}
\frac{c_1 + c_2 + c_3}{3} &= \frac{2}{3}\sum\cos\alpha - \frac{4}{3}\sum\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} + \frac{2}{3}\sum\sin\frac{\alpha}{2} \\
&= \frac{2}{3} + \frac{8}{3}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} - \frac{4}{3}\left(\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\right) \\
&\quad + \frac{2}{3}\left(\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}\right) \\
&= \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\left(2\sin\frac{\alpha}{2} - 1\right)\left(2\sin\frac{\beta}{2} - 1\right)\left(2\sin\frac{\gamma}{2} - 1\right) + \frac{1}{3} = 1 .
\end{aligned}$$

Somit ist

$$\left(2\sin\frac{\alpha}{2} - 1\right)\left(2\sin\frac{\beta}{2} - 1\right)\left(2\sin\frac{\gamma}{2} - 1\right) = 0 .$$

Es muss demnach mindestens eine Klammer verschwinden, das heisst mindestens ein Dreieckswinkel ist 60°. W. JÄNICHEN, Berlin-Zehlendorf

Weitere Lösungen sandten L. BERNSTEIN (Tel-Aviv) und R. WHITEHEAD (St. Ives, Cornwall/England).

Aufgabe 398. Man ermittle den geometrischen Ort der Punkte eines Punktepaares, die in bezug auf jede von vier gegebenen Kugeln konjugiert sind.

C. BINDSCHEDLER, Küsnacht

Lösung des Aufgabenstellers: a) *analytisch.* Falls die vier Mittelpunkte der Kugeln nicht in einer Ebene liegen, besitzen die Kugeln einen Punkt gleicher Potenz, der als Anfangspunkt des Koordinatensystems gewählt werde. Die Kugelgleichungen haben dann die Form $x^2 + y^2 + z^2 - 2\,\alpha_i\,x - 2\,\beta_i\,y - 2\,\gamma_i\,z + \delta = 0$ mit δ als gemeinsamer Potenz von O. Sollen die vier Polarebenen

$$x\,\xi + y\,\eta + z\,\zeta - \alpha_i\,(\xi + x) - \beta_i\,(\eta + y) - \gamma_i\,(\zeta + z) + \delta = 0$$

des Punktes $P(x, y, z)$ einen gemeinsamen Punkt haben, so muss die Determinante D mit den Zeilen $x - \alpha_i$, $y - \beta_i$, $z - \gamma_i$, $\delta - \alpha_i\,x - \beta_i\,y - \gamma_i\,z$ verschwinden. Man findet leicht $D \equiv (\delta - x^2 - y^2 - z^2)\,D_1$, wo D_1 das sechsfache Volumen des Tetraeders darstellt, dessen Ecken die vier Kugelzentren sind. Daraus folgt unmittelbar, dass der gesuchte Ort die *Orthogonalkugel* der gegebenen Kugeln ist. Der bezüglich der vier Kugeln konjugierte Punkt zu $P(x, y, z)$ ist dann $Q(-x, -y, -z)$, also der dem Punkt P diametral gegenüberliegende Punkt. Ist $D_1 = 0$, liegen also die vier Zentren in einer Ebene, so übernimmt diese die Rolle der Orthogonalkugel. Jeder ihrer Punkte ist bezüglich der vier Kugeln konjugiert zum unendlich fernen Punkt der Ebenen-Normalen. Haben die vier Kugeln mehr als einen Punkt gleicher Potenz, also eine Potenzachse oder Potenzebene, so gibt es unendlich viele Orthogonalkugeln, durch jeden Raumpunkt geht mindestens eine. In diesem Fall erfüllt also jeder Punkt die Bedingungen des geometrischen Ortes.

b) *synthetisch.* Man erkennt zunächst leicht, dass jeder Punkt der Orthogonalkugel (oder «einer» Orthogonalkugel) dem gesuchten geometrischen Ort angehört. Ist nämlich P ein solcher Punkt, M_i Mittelpunkt der gegebenen Kugel K_i, so schneidet die Orthogonalkugel K die Gerade $M_i\,P$ zum zweitenmal in dem zu P bezüglich K_i inversen Punkt P_i, und die Polarebene von P geht durch P_i und steht senkrecht auf $M_i\,P$. Die vier Polarebenen gehen also (Thales) alle durch den Punkt Q, welcher dem Punkt P auf der Orthogonalkugel diametral gegenüberliegt. Sei umgekehrt P, Q ein für alle Kugeln konjugiertes Punktepaar. Die Polarebene von P geht also durch Q und schneidet $M_i\,P$ unter rechtem Winkel in dem zu P bezüglich K_i inversen Punkt P_i. Dieser liegt also auf der Kugel mit dem Durchmesser PQ, das heisst die letztere ist Orthogonalkugel aller K_i.

Weitere Lösungen sandten W. JÄNICHEN (Berlin-Zehlendorf) und K. GRÜN (Linz).

Aufgabe 399. Find the general polynomial solution of

$$\{\phi\,((x + y)^2) - \phi(x^2) - \phi(y^2)\}^2 \equiv 4\,\phi(x^2)\,\phi(y^2) \pmod{p}\,, \qquad (*)$$

where p is a prime > 2.

L. CARLITZ, Duke University, Durham, N.C. USA

Solution by the proposer: Clearly (*) implies

$$\phi(x^2) = \psi^2(x)\,, \qquad \phi(y^2) = \psi^2(y)\,,$$

where $\psi(x)$ is a polynomial. Then

$$\psi^2(x + y) - \psi^2(x) - \psi^2(y) \equiv \pm\,2\,\psi(x)\,\psi(y)\,,$$

$$\psi^2(x + y) \equiv (\psi(x) \pm \psi(y))^2,$$

so that

$$\psi\,(x + y) \equiv \pm\,\psi(x) \pm \psi(y)\,.$$

Taking in turn $x = 0$, $y = 0$ we get

$$\psi\,(x + y) \equiv \psi(x) + \psi(y)\,,$$

which implies

$$\psi(x) \equiv a_0\,x + a_1\,x^p + a_2\,x^{p^2} + \cdots\,,$$

where the a_s are arbitrary. Finally

$$\phi(x) \equiv x\,\{a_0 + a_1\,x^{(p-1)/2} + a_2\,x^{(p^2-1)/2} + \cdots\}^2 \pmod{p}.$$

Neue Aufgaben

Aufgabe 425. Man beweise folgenden Satz über quadratische Matrizen mit $n^2 \geqq 1$ Elementen: Die Matrizen $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_r$ $(r \geqq 0)$ sollen konstante, komplexwertige Elemente besitzen. Das Polynom $\mathfrak{P}(x) = \sum_{\varrho=0}^{r} \mathfrak{A}_\varrho x^\varrho$ ist dann eine Matrix, deren Elemente Polynome in x sind. Die Determinante dieser Matrix sei $f(x) = |\mathfrak{P}(x)|$. Wenn es nun eine konstante Matrix $\mathfrak{X}$ derart gibt, dass $\mathfrak{P}(\mathfrak{X}) = \mathfrak{O}$ ist, dann ist auch $f(\mathfrak{X}) = \mathfrak{O}$. $\mathfrak{O}$ bedeutet dabei die Nullmatrix.

(Es ist zu beachten, dass im allgemeinen $f(\mathfrak{X}) \neq |\mathfrak{P}(\mathfrak{X})|$ ist, weil das Bilden der Determinante einer Matrix und das «Einsetzen» einer Matrix in ein abstraktes Polynom nichtvertauschbare Operationen sind). O. Reutter, Ochsenhausen/Deutschland

Aufgabe 426. Es seien $r_1, r_2, \ldots, r_{(p-1)/2}$ die $(p-1)/2$ quadratischen Reste mod p (p = Primzahl). Ist r ein fester dieser Reste, so ergeben die mod p kleinsten positiven Reste der Produkte $r\,r_i$ $(i = 1, 2, \ldots, (p-1)/2)$ wiederum das System der Reste r_i. Ordnen wir dem Rest r die Permutation P_r zu, die r_i in $r\,r_i$ $(i = 1, 2, \ldots, (p-1)/2)$ überführt, so bilden die P_r eine Gruppe $\mathfrak{R}$ der Ordnung $(p-1)/2$. Es soll gezeigt werden: Ist $p = 4k+3$, so sind alle Permutationen von $\mathfrak{R}$ gerade, ist $p = 4k+1$, so ist die Hälfte der Permutationen von $\mathfrak{R}$ gerade, die andere Hälfte ungerade. W. Jänichen, Berlin-Zehlendorf

Aufgabe 427. Man gebe eine Bedingung dafür an, dass vier nicht in einer Geraden liegende Punkte einer Bildebene π die Normalrisse der Ecken eines regulären Tetraeders sind. R. Bereis, Dresden

Aufgabe 428. Eine variable Parallele zur x-Achse trifft die Bernoullische Lemniskate $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2))$ in vier Punkten, von denen je zwei mit dem Doppelpunkt der Kurve ein Dreieck bestimmen. Vier von diesen sechs Dreiecken sind im allgemeinen nicht gleichschenklig. Man ermittle den geometrischen Ort für die Umkreismittelpunkte dieser vier Dreiecke. C. Bindschedler, Küsnacht

Aufgaben für die Schule

Es wird kein Anspruch auf Originalität der Aufgaben erhoben; Autoren und Quellen werden im allgemeinen nicht genannt. Die Daten für Aufgaben aus der Darstellenden Geometrie sind durchwegs so festgelegt, dass der Ursprung des Koordinatensystems in der Mitte des linken Randes eines Blattes vom Format A 4 gewählt werden soll, x-Achse nach rechts, y-Achse nach vorn, z-Achse nach oben, Einheit 1 cm. Anregungen und Beiträge sind zu senden an Prof. Dr. Willi Lüssy, Büelrainstrasse 51, Winterthur.

1. Man betrachtet ein Dreieck ABC mit seinem Umkreis. Die Tangenten in B und C schneiden sich in U. Jede Strecke zwischen den Geraden AB und AC, die parallel zur Tangente in A ist, wird von UA halbiert.

   ▶ Zum Beweis ziehe diejenige Parallele, die durch U geht. Da die Eigenschaft affininvariant ist, gilt ein entsprechender Satz für ein der Ellipse einbeschriebenes Dreieck. Mittels imaginärer Affinität ist der Satz auch auf die Hyperbel auszudehnen.

2. Zu einem Dreieck ABC wird der Umkreis gezeichnet, die Tangenten in den Ecken bestimmen das Dreieck UVW.

   a) Die Transversalen AU, BV, CW gehen durch einen Punkt G (Punkt von Gergonne).

   b) Zieht man durch G die Parallelen zu den Seiten des Dreiecks UVW, so bestimmen die Seiten von ABC auf ihnen drei gleiche Strecken, die von G halbiert werden.

   ▶ Vergleiche Aufgabe 1.

3. In jedem Dreieck gilt

$$\sqrt{3}\,(a+b+c) \geqq 2\,(w_\alpha + w_\beta + w_\gamma)\,,$$

   wobei Gleichheit nur im gleichseitigen Dreieck besteht.

▶ Es ist

$$w_\alpha = \frac{2}{b+c}\sqrt{b\,c\,s\,(s-a)}\,,$$

wegen

$$\sqrt{b\,c} \leqq \frac{b+c}{2} \text{ also } w_\alpha \leqq \sqrt{s\,(s-a)} \text{ oder } \frac{w_\alpha}{\sqrt{3}} \leqq \sqrt{\frac{s}{3}\,(s-a)}\,.$$

Ersetzt man das geometrische Mittel wieder durch das arithmetische, so ergibt sich

$$\frac{w_\alpha}{\sqrt{3}} \leqq \frac{s}{6} + \frac{s-a}{2}\,,$$

und daraus die Behauptung.
Die Aufgabe wurde mir mit dem schönen Beweis von Herrn F. LEUENBERGER, Zuoz, zugesandt. Die Ungleichung ist eine Verschärfung einer anderen, die Herr LEUENBERGER in The American Mathematical Monthly 1960, Seite 692, mitgeteilt hat.

4. Für reelle Werte x und y gilt

$$|\sin(x+iy)| = |\sin x + \sin iy|\,,$$
$$|\cos(x+iy)| = |\cos x + \sin iy|\,.$$

5. Ein erstes Rotationsparaboloid hat die Leitebene $z = 0$ und den Brennpunkt $F_1(7; 4; 2)$; ein zweites besitzt als Leitebene die erste Hauptebene $z = 9$ und den Brennpunkt $F_2(10; 8; 6)$. Zeichne die Schnittkurve der beiden Flächen, sowie die Tangente in einem allgemeinen Punkt.

▶ Die Schnittkurve ist eine Ellipse, ihr Grundriss ist ein Kreis.

Literaturüberschau

Qualitative Theory of Differential Equations. Von V. V. NEMYTSKII und V. V. STEPANOV. Englische Übersetzung der zweiten russischen Auflage. 523 Seiten. $12.50. Princeton University Press, Princeton 1960.

Dieses Lehrbuch zerfällt in zwei Teile. Im ersten wird der Leser in die klassische Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen im Reellen eingeführt: I. Existenz-, Eindeutigkeits- und Stetigkeitssätze. Felder von Linienelementen. II. Systeme von zwei Differentialgleichungen: Ausführliche Diskussion der singulären Punkte. Sätze von POINCARÉ und BENDIXSON. Trajektorien auf einem Torus. III. Systeme von Gleichungen: Lineare Systeme (mit besonderer Berücksichtigung der Spezialfälle konstanter und periodischer Koeffizienten). Asymptotisches Verhalten der Lösungen linearer und nichtlinearer Systeme. IV. Diskussion der Nachbarschaft singulärer Punkte und periodischer Lösungen bei Systemen von n Gleichungen. Liapunowsche Stabilität. – Als Anhang zum ersten Teil wurde ein Bericht des ersten Verfassers über neuere Beiträge der russischen Schule beigefügt.

Der zweite Teil besteht aus einer Einführung in die Theorie der dynamischen Systeme und einem Kapitel über Ergodentheorie.

Das Buch ist klar geschrieben und führt den Leser mit bemerkenswerter Leichtigkeit in die teilweise recht komplizierte Materie ein. Seine Lektüre setzt ausser einer gewissen mathematischen Reife nur die Kenntnis der grundlegenden analytischen Begriffe voraus.

A. HUBER

Topologische lineare Räume, I. Von G. KÖTHE. *Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*, Bd. 107. XII und 456 Seiten. DM 78.–. Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1960.