# Aufgaben

**Aufgabe 395.** $u$, $v$, $n$ seien natürliche Zahlen, die der Ungleichung

$$A = 2^u (2v + 1) \leqq n$$

genügen. Ferner sei

$$1 \leqq a_1 < a_2 < \cdots < a_k \leqq n$$

eine Folge von natürlichen Zahlen, die folgende Bedingungen erfüllt: 1. $A$ kommt unter den $a_i$ $(1 \leqq i \leqq k)$ vor, das heisst $A = a_r$ für einen Index $r \leqq k$. 2. Kein $a_i$ ist durch ein $a_j$ mit $j \neq i$ teilbar. Man beweise, dass die maximale Anzahl dieser Zahlen $a_i$ gegeben wird durch

$$\max k = n - \left[\frac{n}{2}\right] - \left[\frac{1}{2}\left(\frac{n}{3^u (2v+1)} - 1\right)\right].$$

$[y]$ bedeutet die grösste ganze Zahl $\leqq y$, und für $y \leqq 0$ wird $[y] = 0$ gesetzt. P. Erdös

*Lösung des Aufgabenstellers:* Wir zeigen zuerst

$$\max k \geqq n - \left[\frac{n}{2}\right] - \left[\frac{1}{2}\left(\frac{n}{3^u (2v+1)} - 1\right)\right], \tag{1}$$

Wir definieren die $a_i$ wie folgt: Wenn $n/2 < x \leqq n$, $x \not\equiv 0 \pmod{2v+1}$, dann ist $x$ ein $a_j$. Die weiteren $a_i$ sind die folgenden Zahlen: $2^u (2v+1)$, $2^r (2v+1)\, b$ mit ungeradem $b > 1$ und

$$\frac{n}{3^{r+1}(2v+1)} < b \leqq \frac{n}{3^r (2v+1)}, \qquad \text{wo } 0 \leqq r < u \text{ ist.}$$

Offenbar ist kein $a_i$ durch ein $a_j$ mit $i \neq j$ teilbar. Die Anzahl der $a_i$ kann man wie folgt bestimmen: Es sei $a_j = 2^{u_j} b_j$, $b_j \equiv 1 \pmod 2$. Offenbar sind die $b_j$ alle verschieden, denn aus $b_r = b_s$ würde $a_r \mid a_s$ folgen. Die einzigen ungeraden Zahlen, die unter den $b_j$ nicht vorkommen, sind die Zahlen

$$(2v+1)\, b, \qquad 1 < b \leqq \frac{n}{3^u (2v+1)}. \tag{2}$$

Die Anzahl der ungeraden Zahlen $\leqq x$ ist $x - [x/2] = [(x+1)/2]$ und die Anzahl der Zahlen $1 < b \leqq x$, $b \equiv 1 \pmod 2$ ist $[(x-1)/2]$. Also ist die Anzahl der Zahlen von der Form (2) gleich

$$\left[\frac{1}{2}\left(\frac{n}{3^u (2v+1)} - 1\right)\right]$$

(für $n < 3^{u+1}(2v+1)$ verschwindet dieser Ausdruck). Daher ergibt sich als Anzahl der $b_j$, also auch der $a_j$ die rechte Seite von (1) und (1) ist damit bewiesen.

Jetzt zeigen wir die zweite Hälfte unserer Ungleichung. Es sei $a_1 < a_2 < \cdots < a_k \leqq n$ eine unserer Folgen. Wir schreiben $a_j = 2^{u_j} b_j$, $b_j \equiv 1 \pmod 2$ und wollen zeigen, dass unter den $b_j$ mindestens soviel Zahlen fehlen, wieviel Zahlen es gibt, die (2) befriedigen. Wenn wir dies geleistet haben, sind wir fertig. Es sei

$$1 < d \leqq \frac{n}{3^u (2v+1)}, \qquad (d, 6) = 1 \quad \text{oder} \quad d = 3.$$

Die Zahlen $d \cdot 3^t$, $t \geqq 0$, enthalten offenbar alle der Ungleichung in (2) genügenden Zahlen und jede genau einmal. Es sei also

$$1 < d < 3d \cdots < 3^{t_1} d \leqq \frac{n}{3^u (2v+1)} < 3^{t_1+1} d < \cdots < 3^{t_1+u} d \leqq \frac{n}{2v+1} < \cdots \tag{3}$$

Ich behaupte nun, dass die Anzahl der unter den Zahlen $(2v+1)\, d \cdot 3^t$ vorkommenden $b_j$ höchstens $u$ ist, dass also mindestens $t_1$ fehlen. Wenn dies bewiesen ist, sind wir fertig, denn $t_1$ ist nach (3) die Anzahl der die Ungleichung in (2) befriedigenden Zahlen. Es seien $(2v+1)\, d \cdot 3^{v_j}$, $0 < v_1 < v_2 < \cdots < v_r$ die $b_j$ unter den Zahlen (3), $a_j = 2^{u_j}(2v+1)\, d \cdot 3^{v_j}$. Da $2v+1$ ein $b$ ist und $a_i = 2^u (2v+1)$, gilt offenbar $u > v_1 > v_2 > \cdots > v_r$, also $r \leqq u$, q. e. d.

**Aufgabe 396.** Die Tatsache, dass Potenzen mit teilerfremder Basis teilerfremd sind, wird gern zum Beweis der Irrationalität $n$-ter Wurzeln verwendet; sie ist eine unmittelbare Folge aus der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung. Man beweise sie ohne Benützung der Lehre von den Primzahlen. E. TEUFFEL, Stuttgart

*Lösung:* Wir beweisen den Satz:

$$\text{Aus } (a, b) = 1 \text{ folgt } (a^2, b) = 1 .$$

Beweis: Sind $a$ und $b$ zwei teilerfremde Zahlen, so liefert der Euklidische Algorithmus zwei ganze rationale Zahlen $x, y$ so, dass $a\,x + b\,y = 1$. Setzt man $(a^2, b) = d$, $a^2 = s\,d$, $b = t\,d$, so wird

$$(a\,x + b\,y)^2 = d(s\,x^2 + 2\,a\,t\,x\,y + t^2\,dy^2) = 1 ,$$

woraus sofort $d = 1$ folgt. Mehrfache Anwendung dieses Satzes liefert $(a^{2^k}, b^{2^k}) = 1$. Aus $(a^n, b^n) = 1$ folgt aber sofort $(a^r, b^s) = 1$ für $r \leqq n$, $s \leqq n$. L. BERNSTEIN, Tel-Aviv

Weitere Lösungen sandten W. JÄNICHEN (Berlin-Zehlendorf) und O. REUTTER (Ochsenhausen/Deutschland).

**Aufgabe 397.** Das Dreieck $P_1P_2P_3$ sei dem Einheitskreis einbeschrieben. Es sei $I$ der Inkreismittelpunkt, $r$ der Inkreisradius und $H$ der Höhenschnittpunkt. Man setze

$$c_i = (-1)^k\,\overline{P_i H} - \overline{P_i I} + \frac{2\,r}{\overline{P_i I}} \qquad (i = 1, 2, 3),$$

wo $k = 2\,n$ oder $= 2\,n + 1$ ist, je nachdem der Winkel bei $P_i$ spitz oder stumpf ist. Was folgt aus der Bedingung

$$\frac{c_1 + c_2 + c_3}{3} = 1$$

über die Gestalt des Dreiecks? F. LEUENBERGER, Zuoz

*Lösung:* Es ist $a = 2\sin\alpha$, $b = 2\sin\beta$, $c = 2\sin\gamma$. Für den Dreiecksinhalt gilt

$$F = 0{,}5\,a\,b\sin\gamma = 2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma = r\,s = r\,(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)$$

$$= 4\,r\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} .$$

Hieraus folgt $r = 4\sin\alpha/2\,\sin\beta/2\,\sin\gamma/2$. Nun ist

$$\overline{P_1 I} = \frac{r}{\sin\alpha/2} = 4\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}, \qquad \overline{P_1 H} = \frac{c\cos\alpha}{\sin\gamma} = 2\cos\alpha .$$

Ist $\alpha$ stumpf, so ist $\cos\alpha < 0$, also $\overline{P_1 H} = -2\cos\alpha$, folglich $(-1)^k\,\overline{P_1 H} = 2\cos\alpha$. Nun hat man

$$\frac{c_1 + c_2 + c_3}{3} = \frac{2}{3}\sum\cos\alpha - \frac{4}{3}\sum\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} + \frac{2}{3}\sum\sin\frac{\alpha}{2}$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{8}{3}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} - \frac{4}{3}\left(\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\right)$$

$$+ \frac{2}{3}\left(\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}\right)$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\left(2\sin\frac{\alpha}{2} - 1\right)\left(2\sin\frac{\beta}{2} - 1\right)\left(2\sin\frac{\gamma}{2} - 1\right) + \frac{1}{3} = 1 .$$

Somit ist

$$\left(2\sin\frac{\alpha}{2} - 1\right)\left(2\sin\frac{\beta}{2} - 1\right)\left(2\sin\frac{\gamma}{2} - 1\right) = 0 .$$

Es muss demnach mindestens eine Klammer verschwinden, das heisst mindestens ein Dreieckswinkel ist 60°. W. JÄNICHEN, Berlin-Zehlendorf

Weitere Lösungen sandten L. BERNSTEIN (Tel-Aviv) und R. WHITEHEAD (St. Ives, Cornwall/England).

**Aufgabe 398.** Man ermittle den geometrischen Ort der Punkte eines Punktepaares, die in bezug auf jede von vier gegebenen Kugeln konjugiert sind.

C. BINDSCHEDLER, Küsnacht

*Lösung des Aufgabenstellers:* a) *analytisch.* Falls die vier Mittelpunkte der Kugeln nicht in einer Ebene liegen, besitzen die Kugeln einen Punkt gleicher Potenz, der als Anfangspunkt des Koordinatensystems gewählt werde. Die Kugelgleichungen haben dann die Form $x^2 + y^2 + z^2 - 2\,\alpha_i\,x - 2\,\beta_i\,y - 2\,\gamma_i\,z + \delta = 0$ mit $\delta$ als gemeinsamer Potenz von $O$. Sollen die vier Polarebenen

$$x\,\xi + y\,\eta + z\,\zeta - \alpha_i\,(\xi + x) - \beta_i\,(\eta + y) - \gamma_i\,(\zeta + z) + \delta = 0$$

des Punktes $P(x, y, z)$ einen gemeinsamen Punkt haben, so muss die Determinante $D$ mit den Zeilen $x - \alpha_i$, $y - \beta_i$, $z - \gamma_i$, $\delta - \alpha_i\,x - \beta_i\,y - \gamma_i\,z$ verschwinden. Man findet leicht $D \equiv (\delta - x^2 - y^2 - z^2)\,D_1$, wo $D_1$ das sechsfache Volumen des Tetraeders darstellt, dessen Ecken die vier Kugelzentren sind. Daraus folgt unmittelbar, dass der gesuchte Ort die *Orthogonalkugel* der gegebenen Kugeln ist. Der bezüglich der vier Kugeln konjugierte Punkt zu $P(x, y, z)$ ist dann $Q(-x, -y, -z)$, also der dem Punkt $P$ diametral gegenüberliegende Punkt. Ist $D_1 = 0$, liegen also die vier Zentren in einer Ebene, so übernimmt diese die Rolle der Orthogonalkugel. Jeder ihrer Punkte ist bezüglich der vier Kugeln konjugiert zum unendlich fernen Punkt der Ebenen-Normalen. Haben die vier Kugeln mehr als einen Punkt gleicher Potenz, also eine Potenzachse oder Potenzebene, so gibt es unendlich viele Orthogonalkugeln, durch jeden Raumpunkt geht mindestens eine. In diesem Fall erfüllt also jeder Punkt die Bedingungen des geometrischen Ortes.

b) *synthetisch.* Man erkennt zunächst leicht, dass jeder Punkt der Orthogonalkugel (oder «einer» Orthogonalkugel) dem gesuchten geometrischen Ort angehört. Ist nämlich $P$ ein solcher Punkt, $M_i$ Mittelpunkt der gegebenen Kugel $K_i$, so schneidet die Orthogonalkugel $K$ die Gerade $M_i\,P$ zum zweitenmal in dem zu $P$ bezüglich $K_i$ inversen Punkt $P_i$, und die Polarebene von $P$ geht durch $P_i$ und steht senkrecht auf $M_i\,P$. Die vier Polarebenen gehen also (Thales) alle durch den Punkt $Q$, welcher dem Punkt $P$ auf der Orthogonalkugel diametral gegenüberliegt. Sei umgekehrt $P$, $Q$ ein für alle Kugeln konjugiertes Punktepaar. Die Polarebene von $P$ geht also durch $Q$ und schneidet $M_i\,P$ unter rechtem Winkel in dem zu $P$ bezüglich $K_i$ inversen Punkt $P_i$. Dieser liegt also auf der Kugel mit dem Durchmesser $PQ$, das heisst die letztere ist Orthogonalkugel aller $K_i$.

Weitere Lösungen sandten W. JÄNICHEN (Berlin-Zehlendorf) und K. GRÜN (Linz).

**Aufgabe 399.** Find the general polynomial solution of

$$\{\phi\,((x + y)^2) - \phi(x^2) - \phi(y^2)\}^2 \equiv 4\,\phi(x^2)\,\phi(y^2) \pmod{p}\,, \tag{*}$$

where $p$ is a prime $> 2$.

L. CARLITZ, Duke University, Durham, N.C. USA

*Solution by the proposer:* Clearly (*) implies

$$\phi(x^2) = \psi^2(x)\,, \qquad \phi(y^2) = \psi^2(y)\,,$$

where $\psi(x)$ is a polynomial. Then

$$\psi^2(x + y) - \psi^2(x) - \psi^2(y) \equiv \pm\,2\,\psi(x)\,\psi(y)\,,$$

$$\psi^2(x + y) \equiv (\psi(x) \pm \psi(y))^2,$$

so that

$$\psi\,(x + y) \equiv \pm\,\psi(x) \pm \psi(y)\,.$$

Taking in turn $x = 0$, $y = 0$ we get

$$\psi\,(x + y) \equiv \psi(x) + \psi(y)\,,$$

which implies

$$\psi(x) \equiv a_0\,x + a_1\,x^p + a_2\,x^{p^2} + \cdots,$$

where the $a_s$ are arbitrary. Finally

$$\phi(x) \equiv x\,\{a_0 + a_1\,x^{(p-1)/2} + a_2\,x^{(p^2-1)/2} + \cdots\}^2 \qquad (\mathrm{mod.}\ p).$$

# Neue Aufgaben

**Aufgabe 425.** Man beweise folgenden Satz über quadratische Matrizen mit $n^2 \geqq 1$ Elementen: Die Matrizen $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_r$ $(r \geqq 0)$ sollen konstante, komplexwertige Elemente besitzen. Das Polynom $\mathfrak{P}(x) = \sum_{\varrho=0}^{r} \mathfrak{A}_\varrho x^\varrho$ ist dann eine Matrix, deren Elemente Polynome in $x$ sind. Die Determinante dieser Matrix sei $f(x) = |\mathfrak{P}(x)|$. Wenn es nun eine konstante Matrix $\mathfrak{X}$ derart gibt, dass $\mathfrak{P}(\mathfrak{X}) = \mathfrak{O}$ ist, dann ist auch $f(\mathfrak{X}) = \mathfrak{O}$. $\mathfrak{O}$ bedeutet dabei die Nullmatrix.

(Es ist zu beachten, dass im allgemeinen $f(\mathfrak{X}) \neq |\mathfrak{P}(\mathfrak{X})|$ ist, weil das Bilden der Determinante einer Matrix und das «Einsetzen» einer Matrix in ein abstraktes Polynom nichtvertauschbare Operationen sind). O. REUTTER, Ochsenhausen/Deutschland

**Aufgabe 426.** Es seien $r_1, r_2, \ldots, r_{(p-1)/2}$ die $(p-1)/2$ quadratischen Reste mod $p$ ($p$ = Primzahl). Ist $r$ ein fester dieser Reste, so ergeben die mod $p$ kleinsten positiven Reste der Produkte $r\,r_i$ $(i = 1, 2, \ldots, (p-1)/2)$ wiederum das System der Reste $r_i$. Ordnen wir dem Rest $r$ die Permutation $P_r$ zu, die $r_i$ in $r\,r_i$ $(i = 1, 2, \ldots, (p-1)/2)$ überführt, so bilden die $P_r$ eine Gruppe $\mathfrak{R}$ der Ordnung $(p-1)/2$. Es soll gezeigt werden: Ist $p = 4k+3$, so sind alle Permutationen von $\mathfrak{R}$ gerade, ist $p = 4k+1$, so ist die Hälfte der Permutationen von $\mathfrak{R}$ gerade, die andere Hälfte ungerade. W. JÄNICHEN, Berlin-Zehlendorf

**Aufgabe 427.** Man gebe eine Bedingung dafür an, dass vier nicht in einer Geraden liegende Punkte einer Bildebene $\pi$ die Normalrisse der Ecken eines regulären Tetraeders sind. R. BEREIS, Dresden

**Aufgabe 428.** Eine variable Parallele zur $x$-Achse trifft die Bernoullische Lemniskate $(x^2 + y^2)^2 = a^2\,(x^2 - y^2))$ in vier Punkten, von denen je zwei mit dem Doppelpunkt der Kurve ein Dreieck bestimmen. Vier von diesen sechs Dreiecken sind im allgemeinen nicht gleichschenklig. Man ermittle den geometrischen Ort für die Umkreismittelpunkte dieser vier Dreiecke. C. BINDSCHEDLER, Küsnacht

# Aufgaben für die Schule

Es wird kein Anspruch auf Originalität der Aufgaben erhoben; Autoren und Quellen werden im allgemeinen nicht genannt. Die Daten für Aufgaben aus der Darstellenden Geometrie sind durchwegs so festgelegt, dass der Ursprung des Koordinatensystems in der Mitte des linken Randes eines Blattes vom Format A 4 gewählt werden soll, $x$-Achse nach rechts, $y$-Achse nach vorn, $z$-Achse nach oben, Einheit 1 cm. Anregungen und Beiträge sind zu senden an Prof. Dr. WILLI LÜSSY, Büelrainstrasse 51, Winterthur.

1. Man betrachtet ein Dreieck $ABC$ mit seinem Umkreis. Die Tangenten in $B$ und $C$ schneiden sich in $U$. Jede Strecke zwischen den Geraden $AB$ und $AC$, die parallel zur Tangente in $A$ ist, wird von UA halbiert.

   ▶ Zum Beweis ziehe diejenige Parallele, die durch $U$ geht. Da die Eigenschaft affininvariant ist, gilt ein entsprechender Satz für ein der Ellipse einbeschriebenes Dreieck. Mittels imaginärer Affinität ist der Satz auch auf die Hyperbel auszudehnen.

2. Zu einem Dreieck $ABC$ wird der Umkreis gezeichnet, die Tangenten in den Ecken bestimmen das Dreieck $UVW$.

   a) Die Transversalen $AU$, $BV$, $CW$ gehen durch einen Punkt $G$ (Punkt von GERGONNE).

   b) Zieht man durch $G$ die Parallelen zu den Seiten des Dreiecks $UVW$, so bestimmen die Seiten von $ABC$ auf ihnen drei gleiche Strecken, die von $G$ halbiert werden.

   ▶ Vergleiche Aufgabe 1.

3. In jedem Dreieck gilt

$$\sqrt{3}\,(a+b+c) \geqq 2\,(w_\alpha + w_\beta + w_\gamma)\,,$$

   wobei Gleichheit nur im gleichseitigen Dreieck besteht.

▶ Es ist

$$w_\alpha = \frac{2}{b+c} \sqrt{b\,c\,s\,(s-a)}\,,$$

wegen

$$\sqrt{b\,c} \leqq \frac{b+c}{2} \quad \text{also } w_\alpha \leqq \sqrt{s\,(s-a)} \quad \text{oder } \frac{w_\alpha}{\sqrt{3}} \leqq \sqrt{\frac{s}{3}\,(s-a)}\,.$$

Ersetzt man das geometrische Mittel wieder durch das arithmetische, so ergibt sich

$$\frac{w_\alpha}{\sqrt{3}} \leqq \frac{s}{6} + \frac{s-a}{2}\,,$$

und daraus die Behauptung.

Die Aufgabe wurde mir mit dem schönen Beweis von Herrn F. LEUENBERGER, Zuoz, zugesandt. Die Ungleichung ist eine Verschärfung einer anderen, die Herr LEUENBERGER in The American Mathematical Monthly 1960, Seite 692, mitgeteilt hat.

4. Für reelle Werte $x$ und $y$ gilt

$$|\sin(x + i\,y)| = |\sin x + \sin i\,y|\,,$$
$$|\cos(x + i\,y)| = |\cos x + \sin i\,y|\,.$$

5. Ein erstes Rotationsparaboloid hat die Leitebene $z = 0$ und den Brennpunkt $F_1\,(7;\,4;\,2)$; ein zweites besitzt als Leitebene die erste Hauptebene $z = 9$ und den Brennpunkt $F_2\,(10;\,8;\,6)$. Zeichne die Schnittkurve der beiden Flächen, sowie die Tangente in einem allgemeinen Punkt.

▶ Die Schnittkurve ist eine Ellipse, ihr Grundriss ist ein Kreis.

# Literaturüberschau

*Qualitative Theory of Differential Equations.* Von V. V. NEMYTSKII und V. V. STEPANOV. Englische Übersetzung der zweiten russischen Auflage. 523 Seiten. $12.50. Princeton University Press, Princeton 1960.

Dieses Lehrbuch zerfällt in zwei Teile. Im ersten wird der Leser in die klassische Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen im Reellen eingeführt: I. Existenz-, Eindeutigkeits- und Stetigkeitssätze. Felder von Linienelementen. II. Systeme von zwei Differentialgleichungen: Ausführliche Diskussion der singulären Punkte. Sätze von POINCARÉ und BENDIXSON. Trajektorien auf einem Torus. III. Systeme von Gleichungen: Lineare Systeme (mit besonderer Berücksichtigung der Spezialfälle konstanter und periodischer Koeffizienten). Asymptotisches Verhalten der Lösungen linearer und nichtlinearer Systeme. IV. Diskussion der Nachbarschaft singulärer Punkte und periodischer Lösungen bei Systemen von $n$ Gleichungen. Liapunowsche Stabilität. – Als Anhang zum ersten Teil wurde ein Bericht des ersten Verfassers über neuere Beiträge der russischen Schule beigefügt.

Der zweite Teil besteht aus einer Einführung in die Theorie der dynamischen Systeme und einem Kapitel über Ergodentheorie.

Das Buch ist klar geschrieben und führt den Leser mit bemerkenswerter Leichtigkeit in die teilweise recht komplizierte Materie ein. Seine Lektüre setzt ausser einer gewissen mathematischen Reife nur die Kenntnis der grundlegenden analytischen Begriffe voraus.

A. HUBER

*Topologische lineare Räume, I.* Von G. KÖTHE. *Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften,* Bd. 107. XII und 456 Seiten. DM 78.–. Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1960.