Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 17 (1962)

Heft: 1

Rubrik: Ungelöste Probleme

Satz II. *Die vollständige ebene Menge derjenigen abgeschlossenen Kreisbereiche vom Durchmesser d, die paarweise den Abstand $t \leqq d(2\sqrt{3}-3)/3$ aufweisen, lässt sich in drei Teilmengen so zerlegen, dass die zu derselben Teilmenge gehörigen Kreisbereiche sämtlich einen nichtleeren Durchschnitt besitzen.* J. Schopp, Budapest

LITERATURVERZEICHNIS

[1] H. Hadwiger–H. Debrunner, *Ausgewählte Einzelprobleme der kombinatorischen Geometrie in der Ebene*, Enseignement mathématique *1*, IIe Série, 75 (1955).

[2] J. Schopp, *Über den Zusammenhang zwischen zwei Abdeckungsproblemen von n-dimensionalen Hyperkugelbereichen*, Elemente der Mathematik *16*, 35–37 (1961).

[3] D. Gale, *On Inscribing n-Dimensional Sets in a Regular Simplex*, Proc. Amer. Math. Soc. *4*, 222–225 (1953).

[4] H. Lenz, *Über die Bedeckung ebener Punktmengen durch solche kleineren Durchmessers*, Arch. Math. 7, 34–40 (1956).

Ungelöste Probleme

Nr. 41. Wie bekannt ist, lässt sich jeder Eilinie der Ebene (geschlossene konvexe Jordankurve) ein Quadrat einbeschreiben (vgl. Figur 1). Ein neuerer Beweis hierfür stammt von C. M. Christensen[1]). Das Problem stellt sich, ob die gleiche Möglichkeit bei einer beliebigen geschlossenen Jordankurve (topologisches Kreisbild) der Ebene besteht (vgl. Figur 2). In der Tat wurde von verschiedener fachkundiger Seite versucht, diese Frage zu entscheiden. Mit Wahrung der angegebenen grösstmöglichen Allgemeinheit scheint die Lösung des Problems recht schwierig zu sein. Von L. G. Schnirelmann[2]) konnte ein Beweis gefunden werden, dass die fragliche Einbeschreibbarkeit dann besteht, wenn die Jordankurve überall eine stetige Krümmung aufweist. Herr V. L. Klee (Seattle, USA) hat uns einige interessante Vermerkungen zu unserm Problem zur Verfügung gestellt. Viele Lösungsversuche sind bisher gescheitert. Auch ein publizierter Beitrag von C. S. Ogilvy[3]) kann lediglich als heuristische Betrachtung gewertet werden.

Nimmt man zunächst Zuflucht zu einem rein graphischen Verfahren, das heisst, sucht man eine Lösung durch «probieren», so wird man bald merken, dass das Experiment bei einer bereits vorgezeichneten Kurve nicht besonders leicht zum erfolgreichen Ende führt. Viele zeichnerisch gefundene positive Lösungen, die natürlich nur als Näherungen zu bewerten sind, ergeben insgesamt höchstens ein Indiz für die Gültigkeit des vermuteten Sachverhalts. In einem bekannten originellen Buch von H. Steinhaus[4]) findet man (auf Seite 87) ein Bild, das vier Orte an der Uferlinie des Michigansees zeigt, die ein Quadrat bilden. – Zum Schlusse wollen wir den vermuteten Satz in eine vollständig arithmetisierte Form kleiden, wobei wir keineswegs etwa glauben, dass dadurch die Auffindung des noch fehlenden Beweises erleichtert wird. Eine solche gleichwertige Formulierung, die also ohne geometrische Begriffe auskommt, lautet beispielsweise wie folgt: Es seien $x = x(t)$ und $y = y(t)$ zwei im Inter-

[1]) Ein in eine konvexe Figur einbeschriebenes Quadrat (dänisch), Mat. Tidsskr. B 1950, 22–26.

[2]) Über gewisse geometrische Eigenschaften geschlossener Kurven (russisch), Uspehi Matem. Nauk *10*, 34–44 (1944).

[3]) Square inscribed in arbitrary simple closed curve, Amer. Math. Monthly *57*, 423–424 (1950).

[4]) Mathematical Snapshots, Oxford Univ. Press 1951.

vall $-\infty < t < \infty$ definierte, reellwertige und stetige Funktionen, die periodisch sind, so dass die Relationen $x(t+1) = x(t)$ und $y(t+1) = y(t)$ gelten. Ferner sei $f(r, s) = \{x(r) - x(s)\}^2 + \{y(r) - y(s)\}^2$ gesetzt und weiter verlangt, dass $f(r, s) > 0$

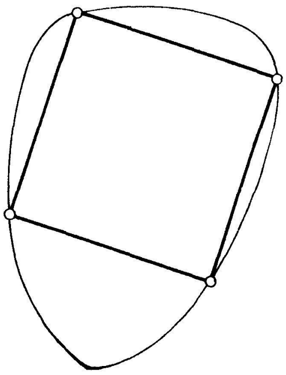

Fig. 1

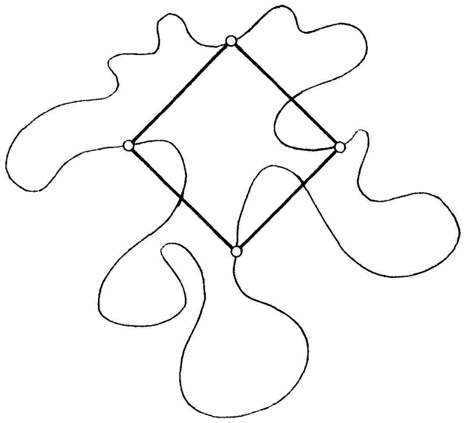

Fig. 2

ausfällt, falls $r \not\equiv s \pmod 1$ ist. Behauptung: Es existieren vier Werte t_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ derart, dass

$$0 < f(t_1, t_3) = f(t_2, t_4) = 2\, f(t_1, t_2) = 2\, f(t_2, t_3) = 2\, f(t_3, t_4) = 2\, f(t_4, t_1)$$

wird. Der Leser kann leicht die Äquivalenz dieser Behauptung mit der eingangs in anschaulicherer geometrischer Gestalt erörterten Vermutung überprüfen. Einen Beweis zu finden oder ein Beispiel zu entdecken, das zeigt, dass der Satz falsch sein muss, ist das hier vorgelegte ungelöste Problem. H. HADWIGER

Kleine Mitteilungen

Zum Mordellschen Beweis einer Ungleichung von Erdös

1. Ein einfacher Beweis

Von P. ERDÖS [1][1]) stammt die unseres Erachtens reizvollste unter den heute bekannten Dreiecksungleichungen:

Die Summe der Eckenabstände des inneren Punktes O eines Dreiecks ist mindestens doppelt so gross wie die Summe seiner Seitenabstände. Gleichheit gilt nur für den Mittelpunkt O eines gleichseitigen Dreiecks.

Behauptung: $R_1 + R_2 + R_3 \geqq 2\,(r_1 + r_2 + r_3)$.

Beweis: Der Figur entnimmt man $\overline{QR} = R_1 \sin\alpha$ und

$$\overline{QR} \geqq \overline{XY} = \overline{PY} + \overline{PX} = r_2 \sin\gamma + r_3 \sin\beta\,, \tag{1}$$

weil eine Strecke mindestens so gross ist wie ihre Normalprojektion auf eine andere.

Demnach gilt

$$R_1 \geqq r_2 \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} + r_3 \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$$

und Entsprechendes für R_2 und R_3, so dass schliesslich

$$\Sigma R_i \geqq r_1 \left(\frac{\sin\beta}{\sin\gamma} + \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}\right) + r_2 \left(\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} + \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}\right) + r_3 \left(\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} + \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\right)$$

$\geqq 2\,\Sigma r_i$ noch durch dreimaliges Anwenden von $x + \frac{1}{x} \geqq 2$ für $x > 0$ folgt.

[1]) Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 17.