

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 16 (1961)
Heft: 6

Artikel: Von der Gedankenlosigkeit in der Behandlung der Mathematik
Autor: Locher-Ernst, L.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-21293>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 01.05.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

*Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrer*

Publiziert mit Unterstützung des Schweizerischen Nationalfonds
zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung

El. Math. Band XVI Nr. 6 Seiten 121–144 Basel, 10. November 1961

Von der Gedankenlosigkeit in der Behandlung der Mathematik¹⁾

4. Der junge Mathematiker, der sich heute einen Einblick verschaffen möchte, was die ihm im Studium gebotene Wissenschaft zur Wahrheitsfrage zu sagen hat, findet eine ungeheure Literatur über die mathematischen Gesetze der Logik, über Logistik, Beweistheorie usw. Nimmt er mit Elan die Bekanntschaft verschiedener dieser Werke auf, so sieht er sich von einer solchen Masse von Spezialitäten aufgesogen, dass er meist bald auf irgendeinem Sonderzweig sich möglichst wohnlich einrichtet, dort an einem Zweiglein laboriert und die Grundfrage unbeantwortet versinken lässt. Sein unbefriedigtes Fragen wirkt in ihm freilich trotzdem weiter.

Es ist tief zu bedauern, dass wichtige Sachverhalte, die Aufklärung bringen, heute in den gängigen Lehrbüchern nicht vermerkt sind. Auf einen solchen Tatbestand wollen wir näher eingehen. Da in den hier vorgebrachten Bemerkungen keine detaillierten Ausführungen beabsichtigt sind, dürfen wir uns mit dem Hinweis auf das Grundsätzliche begnügen.

Denken wir uns ein formales System allgemeinsten Art, bestehend aus *endlich* vielen, festen, hinschreibbaren Zeichen. Gewisse Zeichenkombinationen seien als axiomatische «Sätze» angenommen, aus denen mit Hilfe *formal beschreibbarer* Regeln, deren Zeichen alle dem System angehören, andere Sätze «bewiesen» werden. Jeder auf solche Weise schon gewonnene oder noch zu gewinnende «Satz» soll *formal-richtig* heissen. Wir können annehmen, dass jeder formal-richtige Satz entweder die Form A oder $\neg A$ (nicht A) hat, wobei A eine Folge von Zeichen des Systems bedeutet, zu denen auch \neg und \wedge (für «und») gehören sollen.

Bei der Handhabung solcher Formalismen stellen sich die folgenden hauptsächlichsten Fragen.

Erstens die Frage der *formalen Entscheidbarkeit*: Lässt sich für *jede* gegebene Zeichenkombination A , die nur Zeichen des Systems enthält, durch formalen Beweis, das heisst durch Anwenden der zugrunde gelegten formalen Regeln, entscheiden, ob eben diese Kombination A oder $\neg A$ einen formal-richtigen Satz darstellt?

Zweitens die Frage der *formalen Widerspruchsfreiheit*: Ist Gewähr dafür vorhanden, dass niemals zwei Zeichenkombinationen A und $\neg A$ *beide* formal-richtige Sätze darstellen? Anders gefasst: Besteht Gewähr dafür, dass die Kombination $A \wedge \neg A$ niemals einen formal-richtigen Satz darstellt?

¹⁾ Erster Teil im letzten Heft (September 1961).

Weitere Fragen, diejenigen nach der *absoluten Entscheidbarkeit* und nach der *inhaltlichen Widerspruchsfreiheit*, bedürfen einer näheren Erklärung. Sie beziehen sich nur auf solche Formalismen, deren axiomatische Sätze und Regeln gemäss einer bestimmten Zuordnung (Übersetzung der Zeichen) *einen in reinen Gedanken fassbaren Sinn* aufweisen. Für einen Formalismus ist dies an sich natürlich nicht nötig; ein solcher stellt, für sich betrachtet, ein reines Zeichen-Spiel dar. Ob und welchen Sinn er hat, ob er in diesen oder jenen Mechanismen nützliche Anwendungen findet, muss in jedem Falle besonders abgeklärt werden.

Auf die Fragen, was unter einem «Gedanken», was unter der Aussage «einen gedanklichen Sinn haben» zu verstehen sei, treten wir vorerst nicht ein. Wir nehmen an, dass ein vernünftiger Mensch – dessen Definition wir uns auch ersparen – wisse, was mit jenen Worten bezeichnet wird. Für einen solchen stellt sich dann die gewichtige Frage, ob ein Satz (eine Kombination von Zeichen des Formalismus), von dem feststehen möge, dass er *formal* nicht entscheidbar ist, *inhaltlich* – gemäss dem ihm zugeordneten gedanklichen Sinne – vielleicht doch entscheidbar ist. In diesem Falle sagen wir, der betreffende Satz sei formal nicht entscheidbar, hingegen *absolut* entscheidbar. Ähnlich ist die Frage zu untersuchen, ob es vorkommen könnte, dass ein Formalismus zwar *formal* widerspruchsfrei ist, aber *inhaltlich* doch Widersprüche aufweist.

Von vornherein ist festzuhalten, dass es in jedem vorgelegten Formalismus *nur abzählbar viele formal-richtige Sätze* gibt, da für die «Beweise» nur endlich viele Zeichen in endlich vielen Kombinationen zur Verfügung stehen.

Dasselbe kann man freilich auch vom nicht in festen Zeichen aufgeschriebenen, rein gedanklichen Schliessen sagen, da das «diskursive Denken» einen an eine Zeitdauer gebundenen Ablauf nimmt, so dass nur abzählbar viele Beweisführungen im Bewusstsein, das dem diskursiven Denken eigen ist, auftreten können.

Trotzdem besteht ein tiefgreifender Unterschied: Das inhaltliche Schliessen ist in jeder Phase *offen*, das heisst stets in der Lage, *neue* Begriffe zu verwenden, die in einem von vornherein gewählten formalen System sich der formalen Darstellung in eben diesem System entziehen. Es kann immerhin möglich sein, durch geeignete Änderung oder Erweiterung des Formalismus den neuen Gedanken auch wiederum zu formalisieren.

Ein gegebener Formalismus kann grundsätzlich stets als mechanisches oder elektronisches Gerät technisch realisiert werden. *Grundsätzlich* ist mit den heutigen technischen Mitteln auch folgendes Vorgehen möglich: Man lässt das Gerät erstens alle formal-richtigen Sätze X hintereinander nach der Anzahl der verwendeten Zeichen bilden und zweitens den Vergleich mit einer *gegebenen* Zeichenkombination A anstellen und drittens die Maschine automatisch zum Stop bringen, wenn Übereinstimmung zwischen einem erzeugten formal richtigen Satze X und A eintritt. Dasselbe lässt sich, bei festem A , mit der Kombination $A \wedge \neg A$ durchführen. Das Gerät mag noch so schnell laufen, das geschilderte Verfahren genügt noch nicht, die Frage der formalen Entscheidbarkeit und diejenige der formalen Widerspruchsfreiheit *prinzipiell* zu lösen. Es sind damit höchstens Wahrscheinlichkeitsaussagen möglich.

Den technischen Problemen, die vorstehend kurz angedeutet sind, werden heute da und dort intensive Studien gewidmet. Es ist selbstverständlich, dass damit ausserordentliche, technisch-nützliche Fortschritte erzielt werden können.

Es ist deshalb sachgemäss, wenn im mathematischen Unterricht im richtigen Zeitpunkt auch diese Dinge ihrer grundsätzlichen Natur nach zur Behandlung kommen, an Stelle von veraltetem Stoff, der bloss infolge des bekannten Trägheitsprinzips noch immer mitgeschleppt wird. Im richtigen Zeitpunkt: das heisst nicht zu früh. Verfrüht gegebene Kost kann sich nämlich wie Gift mit unheilbaren Folgen auswirken.

Die historische Entwicklung gibt auch die Hinweise, was in dieser Richtung den 17jährigen zu zeigen ist, nämlich *Boolesche Verbände* und ihre wichtigsten Modelle in der Mengenlehre, in der elementaren Zahlentheorie und in der formalen Logik.

Die Vermittlung einer Einsicht in das technische Funktionieren eines gegebenen Formalismus lässt dann erst recht aufleuchten, was es bedeutet, dass ein solcher eben niemals eine *Intuition* haben kann. Bildlich, aber gewiss allgemein verständlich ausgedrückt: Ein fest gegebener Formalismus spielt sich im Finstern unter der Erdoberfläche ab, während das – formal nicht von vornherein festgelegte – inhaltliche Denken den offenen Himmel über sich hat und damit stets bereit ist, sich neu befruchten zu lassen.

Der folgende Abschnitt bringt einige Bemerkungen zu den aufgeworfenen Fragen. L. LOCHER-ERNST

Über die Verallgemeinerung eines Satzes von SIERPIŃSKI

1. Bei der Untersuchung der Primzahlen entstand die Frage, ob es zahlentheoretische Funktionen $F(n)$ gibt, für die die Folge der Funktionswerte $F(1), F(2), \dots$

(I) nur aus Primzahlen besteht, bzw.

(II) mit der Folge der Primzahlen $\mathfrak{P} = \{p_1, p_2, \dots, p_n, \dots\}$ ($p_n < p_{n+1}$) übereinstimmt.

W. H. MILLS [1]¹⁾ ist es zuerst gelungen, eine Funktion zu konstruieren, die die Eigenschaft (I) hat, indem er zeigte, dass es eine reelle Zahl A gibt mit $[A^{3^n}] \in \mathfrak{P}$ für $n = 1, 2, 3, \dots$ ²⁾. L. KUIPERS [2], I. NIVEN [3] und A. R. ANSARI [4] verallgemeinerten dieses Beispiel, indem sie an Stelle des Exponenten 3 allgemeiner eine Zahl c betrachteten. Eine etwas anders gebaute Funktion mit der Eigenschaft (I) gab E. M. WRIGHT [5] durch den Nachweis der Existenz einer reellen Zahl α_0 derart, dass die durch die Rekursionsformel $\alpha_{n+1} = 2^{\alpha_n}$ bestimmten Zahlen $[2^{\alpha_0}], [2^{\alpha_1}], \dots$ sämtlich Primzahlen sind.

Eine Funktion $F(n)$, die der schärferen Forderung (II) genügt, konstruierte W. SIERPIŃSKI [6], indem er folgenden Satz bewies:

Satz 1: *Es gibt eine reelle Zahl A , so dass gilt*

$$p_n = [10^{2^n} A] - 10^{2^n - 1} [10^{2^n - 1} A]$$

für $n = 1, 2, \dots$. Dabei ist $A = \sum_{v=1}^{\infty} p_v 10^{-2^v}$.

2. Dieses Ergebnis lässt sich für die Darstellung einer beliebigen unendlichen Folge $\mathfrak{A} = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ ($a_n \leq a_{n+1}$) natürlicher Zahlen erweitern. Hierbei erhalten wir auch für den Spezialfall $\mathfrak{A} = \mathfrak{P}$ eine Verallgemeinerung.

¹⁾ Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 127.

²⁾ Das Symbol $[x]$ bedeutet die grösste ganze Zahl $\leq x$.