

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 16 (1961)  
**Heft:** 5

**Rubrik:** Kleine Mitteilungen

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 28.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

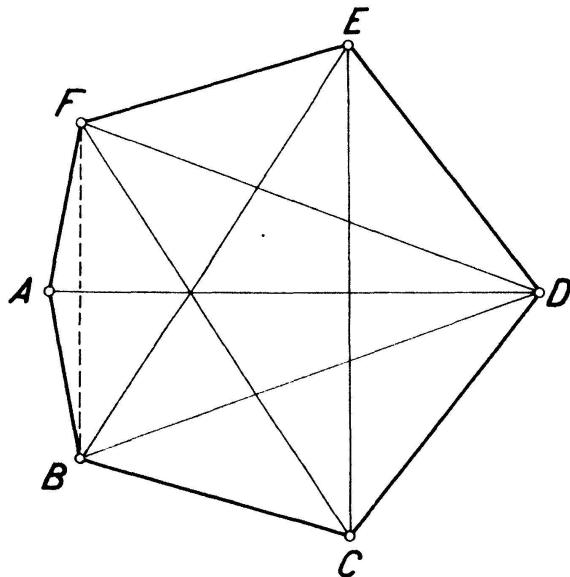
Die numerische Auswertung der Bedingung (4), die mit Einsatz des Rechenautomaten des Instituts für angewandte Mathematik an der Universität Bern erfolgte, liefert die folgenden Resultate:

$$a^* = 0,687543\ldots ; \quad F_6 = f(a^*) = 0,67498144\ldots \quad (7)$$

Es sei noch die Ungleichung (1) im Falle  $n = 6$  zum Vergleich herangezogen, die

$$\frac{3\sqrt[3]{3}}{8} = 0,64952\ldots < F_6 < 0,696152\ldots = \frac{6\sqrt[3]{3} - 9}{2} \quad (8)$$

liefert. Die Figur zeigt das zugehörende extremale 6-Eck  $ABCDEF$ .



Symmetriearchse ist die Gerade  $AD$ . Das Polygon hat die höchste Zahl von Durchmessern, die bei einem konvexen Sechseck vorkommen können. Es sind dies die sechs Strecken  $AD, DB, DF, BE, FC, EC$ . Die Diagonale  $BF$  hat die Länge  $a^*$ . Wird die Diagonale  $BF$  von variabler Länge  $a$  angenommen, die oben angegebene Durchmesserkonfiguration beibehalten, so ergibt sich eine einparametrische Sechseckschar. Der Hauptteil des Bierischen Beweises besteht darin, zu zeigen, dass das gesuchte extreme Sechseck dieser Schar angehören muss. Das übrige ergibt sich mit der Bemerkung, dass  $f(a)$  der Flächeninhalt des Scharsechsecks ist, wobei noch die Funktion  $f$  im Intervall  $0 \leq a \leq 1$  passend diskutiert werden muss. H. HADWIGER

## Kleine Mitteilungen

### Quelques remarques sur une relation entre nombres impairs et nombres triangulaires

Pour abréger les notations, je désignerai par

$$\{n\}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

les nombres triangulaires

$$0, 0 + 1, 0 + 1 + 2, \dots, 0 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \dots$$

Soit à présent  $A$  un nombre entier impair  $\geq 3$ . De l'égalité

$$A = \frac{A-1}{2} + \frac{A+1}{2} = \left\{ \frac{A+1}{2} \right\} - \left\{ \frac{A-3}{2} \right\}$$

nous concluons que

$$A + \left\{ \frac{A-3}{2} \right\} = \left\{ \frac{A+1}{2} \right\}.$$

Par conséquent, étant donné un nombre impair  $A \geq 3$ , il existe au moins un nombre triangulaire  $\{n\}$ , par exemple  $\{(A-3)/2\}$ , tel que  $A + \{n\}$  soit égal à un nombre triangulaire. Il s'ensuit qu'il existe un nombre triangulaire *minimum*  $\{m(A)\}$ , parfaitement déterminé, qu'il faut ajouter à  $A$  pour obtenir un nombre triangulaire. Suivant ce qui précède, ce nombre  $\{m(A)\}$  satisfait à la relation:

$$0 \leq m(A) \leq \frac{A-3}{2}.$$

J'énonce à présent deux propositions se rapportant à ce nombre\*).

**Proposition I.** Si  $A$  est un nombre premier  $p \geq 3$ , alors  $m(A) = (p-3)/2 = (A-3)/2$ .

*Démonstration.* En effet, supposons que  $p + \{n\} = \{N\}$ , donc que

$$p = \{N\} - \{n\} = \frac{N(N+1) - n(n+1)}{2} = \frac{(N-n)(N+n+1)}{2},$$

où  $0 \leq n < N$ . Puisque  $p$  est premier et  $N > n \geq 0$ , nous aurons ou bien  $N-n=1$  et  $(N+n+1)/2=p$ , si  $N-n$  est impair, ou  $(N-n)/2=1$  et  $N+n+1=p$ , si  $N-n$  est pair.

Il s'ensuivra dans le 1<sup>er</sup> cas:

$$N = n+1 \text{ et } \frac{N+n+1}{2} = \frac{2(n+1)}{2} = p, \text{ d'où } n = p-1,$$

et dans le second cas:

$$N = n+2 \text{ et } N+n+1 = 2n+3 = p, \text{ d'où } n = \frac{p-3}{2}.$$

Comme  $(p-3)/2 < p-1$ , nous concluons que  $m(p) = (p-3)/2$ .

**Proposition II.** Si  $A \geq 3$  est un nombre impair composé:

$$A = a b \quad \text{où} \quad 3 \leq a \leq b,$$

alors  $m(A) < (A-3)/2$ .

*Démonstration.* Il y a deux cas seulement à envisager.

1<sup>er</sup> cas:  $3 \leq a < 2a < b$ .

Alors  $2a \leq b-1$  et, en posant

$$n = \frac{b-1}{2} - a, \quad N = \frac{b-1}{2} + a$$

on aura

$$n \geq 0, N > n \text{ et } A = \{N\} - \{n\}.$$

En effet

$$\{N\} - \{n\} = \frac{(N-n)(N+n+1)}{2} = \frac{2a \cdot (b-1+1)}{2} = ab = A.$$

En outre, comme  $a \geq 3$ , il vient:

$$n = \frac{b-1}{2} - a = \frac{b-1-2a}{2} < \frac{ab-3}{2} = \frac{A-3}{2}.$$

2<sup>e</sup> cas:  $3 \leq a \leq b \leq 2a$ .

\*) Les démonstrations en sont dues à M. le prof. N. KRITIKOS.

Puisque  $b$  est impair et  $2a$  pair, on aura

$$b+1 \leq 2a \text{ et } a - \frac{b+1}{2} \geq 0.$$

Nous pouvons donc poser

$$n = a - \frac{b+1}{2} \text{ et } N = a + \frac{b-1}{2};$$

nous obtenons alors:

$$\{N\} - \{n\} = \frac{(N-n)(N+n+1)}{2} = \frac{\left(\frac{b-1}{2} + \frac{b+1}{2}\right)(2a-1+1)}{2} = b a = A.$$

En outre:

$$n = a - \frac{b+1}{2} = \frac{2a-(b+1)}{2} < \frac{ab-3}{2} = \frac{A-3}{2},$$

car  $3 \leq a \leq b$ .

Par conséquent  $m(A) < (A-3)/2$  dans chacun des deux cas envisagés.

**Corollaire.** *Un nombre entier impair  $A \geq 3$  est premier ou composé selon que*

$$m(A) = \frac{A-3}{2} \text{ ou } m(A) < \frac{A-3}{2}.$$

*Quelques exemples numériques.* 1. Considérons le nombre

$$A = 2\,617\,163\,299.$$

Si nous lui ajoutons le nombre triangulaire  $\{351\} = 61776$  nous obtenons le nombre triangulaire  $2617225075 = \{72349\}$ . Comme  $351 < (A-3)/2$ , nous concluons que  $A$  est composé. Suivant ce qui précède, une décomposition de  $A$  en un produit de facteurs est la suivante:

$$A = \frac{(N-n)(N+n+1)}{2} = \frac{(72349-351)(72349+352)}{2} = 35999 \cdot 72701.$$

2. Prenons le nombre  $A = 3950760467$ . Si nous lui ajoutons le nombre  $\{7\} = 28$  nous obtenons le nombre triangulaire  $3950760495 = \{88890\}$ . Comme  $28 < (A-3)/2$ ,  $A$  est composé; en voici une décomposition:

$$A = \frac{(88890-7)(88890+8)}{2} = 88883 \cdot 44449.$$

3. Soit le nombre triangulaire

$$\{1\,000\,000\,006\} = 500\,000\,006\,500\,000\,021.$$

Si nous lui soustrayons un nombre triangulaire  $\{n\}$ , où  $n \leq 1\,000\,000\,003$ , nous obtiendrons un nombre composé  $A$  avec une décomposition connue.

P. ex. prenons  $\{n\} = \{12\} = 78$ . Nous aurons

$$\begin{aligned} A &= \{1\,000\,000\,006\} - \{12\} = 500\,000\,006\,499\,999\,943 \\ &= \frac{(1\,000\,000\,006 - 12)(1\,000\,000\,006 + 13)}{2} = 499\,999\,997 \cdot 1\,000\,000\,019. \end{aligned}$$

Prenons  $\{n\} = \{35\} = 630$ . Nous obtiendrons

$$\begin{aligned} A^* &= \{1\,000\,000\,006\} - \{35\} = 500\,000\,006\,499\,999\,391 \\ &= \frac{(1\,000\,000\,006 - 35)(1\,000\,000\,006 + 36)}{2} = 999\,999\,971 \cdot 500\,000\,021. \end{aligned}$$

*Une question.* Est-ce que la condition nécessaire et suffisante, énoncée plus haut, pour qu'un nombre impair  $\geq 3$  soit premier, pourrait être utilisée avec quelque avantage pour vérifier, à l'aide d'une calculatrice électronique, si un nombre donné est premier ou non?

C. D. KTRISTOPOULOS, Athènes

### Solution to Aufgabe 260 (Second Part)<sup>1)</sup>

The following theorem is proved:

*If triangle DEF is inscribed in triangle ABC, with D on BC, E on CA, and F on AB, then the minimum of the perimeters of the four smaller triangles is always assumed by a corner triangle. The only case in which triangle DEF assumes this minimum is the case where D, E, and F are respectively the mid-points of BC, CA and AB, and the four triangles are congruent.*

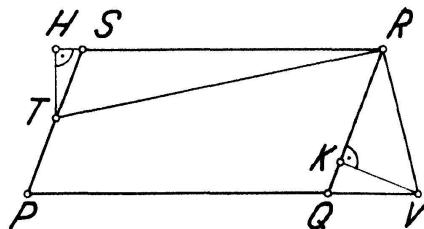
We first establish two lemmas.

**Lemma 1.** Suppose that PQRS is a parallelogram, T is on the segment PS and V is on the segment PQ. Then  $PT + PV \leq RT + RV$ , and the strict inequality holds except for the single case  $T = S, V = Q$ .

Proof:  $PT + PV = PS - TS + PQ - VQ = (RS - TS) + (RQ - VQ) \leq RT + RV$ . (The difference of two sides of a triangle is less than the third side).

**Lemma 2.** Suppose that PQRS is a parallelogram, T is between P and S, and V is on the ray PQ in the order PQV. Suppose further that  $PT + PV \geq RT + RV$ . Then  $QV > ST$ .

Proof: Let H be the foot of the perpendicular from T to the line RS, and K the foot of the perpendicular from V to the line RQ.



Figur 1

Case 1 (Shown in Figure 1):  $\alpha = \angle QPS$  is acute. We subtract the equality  $PQ + PS = RQ + RS$  from the inequality given in the hypothesis, and rearrange terms, obtaining the inequality

$$(PV - PQ) - (PS - PT) \geq (RT - RS) - (RQ - RV).$$

Now

$$PV - PQ = QV, \quad PS - PT = TS, \quad RT - RS > HS = TS \cos \alpha, \quad RQ - RV < KQ = QV \cos \alpha.$$

Substituting, we have the strict inequality

$$QV - TS > TS \cos \alpha - QV \cos \alpha, \quad QV (1 + \cos \alpha) > TS (1 + \cos \alpha), \quad QV > TS.$$

This argument holds without change if  $\alpha$  is a right angle.

Case 2.  $\alpha$  is obtuse. We start as in Case 1 but rearrange terms on the right, as follows:

$$(PV - PQ) - (PS - PT) \geq (RV - RQ) - (RS - RT).$$

Now, if  $\alpha' = 180^\circ - \alpha$ ,

$$RV - RQ > QK = QV \cos \alpha' = - QV \cos \alpha,$$

and

$$RS - RT < HS = TS \cos \alpha' = - TS \cos \alpha.$$

The remainder of the argument proceeds as in Case 1.

Now assume that the middle triangle DEF has the minimum of the perimeters. We then have

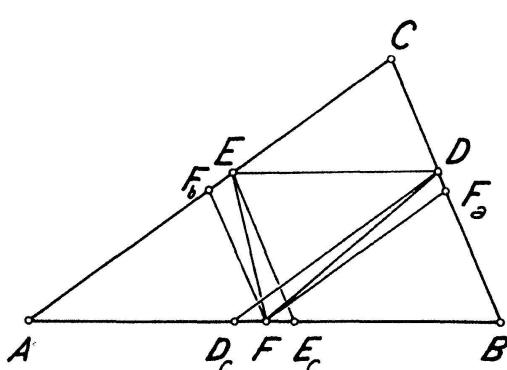
$$AE + AF \geq DE + DF, \tag{1}$$

$$BF + BD \geq EF + ED, \tag{2}$$

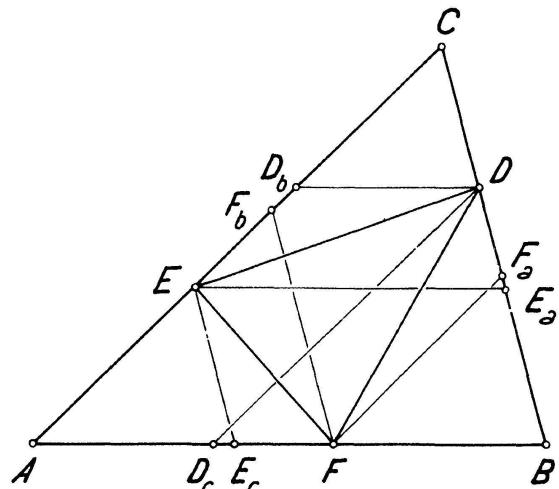
$$CD + CE \geq FD + FE. \tag{3}$$

<sup>1)</sup> Der erste, sich auf die Flächen der vier Dreiecke beziehende Teil der Aufgabe ist behandelt in El. Math. 12, 43 (1957).  
Red.

We first treat the special case where some side of triangle  $DEF$  is parallel to some side of triangle  $ABC$ . We may assume the notation chosen so that  $DE$  is parallel to  $AB$ . We make the construction indicated by Figure 2.  $DD_c$  and  $F_aF$  are parallel to  $CA$ ,  $EE_c$  and  $F_bF$  are parallel to  $CB$ ,  $D_c$  and  $E_c$  are on  $AB$ ,  $F_a$  is on  $BC$ , and  $F_b$  is on  $CA$ . Applying Lemma 2 to parallelogram  $AD_cDE$ , in view of (1) we conclude that  $D_c = F$ , or else  $D_c$  is between  $A$  and  $F$ . This implies that  $D = F_a$  or  $D$  is between  $C$  and  $F_a$ . Similarly,  $E = F_b$  or  $E$  is between  $C$  and  $F_b$ . Now applying Lemma 1 to the parallelogram  $CF_aFF_b$ , in view of (3) we conclude that  $D = F_a$  and  $E = F_b$ . This implies that  $D_c = F = E_c$  and that  $EF$  and  $FD$  are parallel, respectively, to  $BC$  and  $AC$ . But then  $D$ ,  $E$ , and  $F$  are the midpoints of  $BC$ ,  $CA$ , and  $AB$ .



Figur 2



Figur 3

Suppose now that no side of  $DEF$  is parallel to a side of  $ABC$ , so (Figure 3)  $D_c \neq F$ ,  $E_c \neq F$ ,  $E_a \neq D$ ,  $F_a \neq D$ ,  $F_b \neq E$ ,  $D_b \neq E$ . From (1) and Lemma 1 we conclude that one of  $E$ ,  $F$  is outside the parallelogram  $AD_cDD_b$ . The figure shows  $F$  outside, and we will assume this to be the case. (If in fact  $E$  is outside, we can change this to the case to be considered by interchanging the labels  $B$  and  $C$ , the labels  $b$  and  $c$ , and the labels  $E$  and  $F$ .) Thus we have

$$AF > AD_c. \quad (4)$$

Similarly we have

$$BD > BE_a \quad (5)$$

or

$$BF > BE_c, \quad (5')$$

and

$$CE > CF_b \quad (6)$$

or

$$CD > CF_a. \quad (6')$$

But (6') is false because of (4) – observe parallels – so (6) is true. But (6) contradicts (5') so (4), (5), and (6) are all true. Then  $E$  is on the interval  $AD_b$  by (5), and similarly  $F$  is on  $BE_c$  and  $D$  is on  $CF_a$ . Now applying Lemma 2 to parallelograms  $AD_cDD_b$ ,  $BE_aEE_c$ , and  $CF_bFF_a$ , in view of (1), (2) and (3) we conclude that

$$D_cF > D_bE, \quad (7)$$

$$E_aD > E_cF, \quad (8)$$

$$F_bE > F_aD. \quad (9)$$

Now  $FF_a$  and  $DD_c$  are parallel to  $AC$ , so

$$D_cF/F_aD = AB/BC. \quad (10)$$

Similarly,

$$E_aD/D_bE = BC/CA \quad (11)$$

and

$$F_bE/E_cF = CA/AB. \quad (12)$$

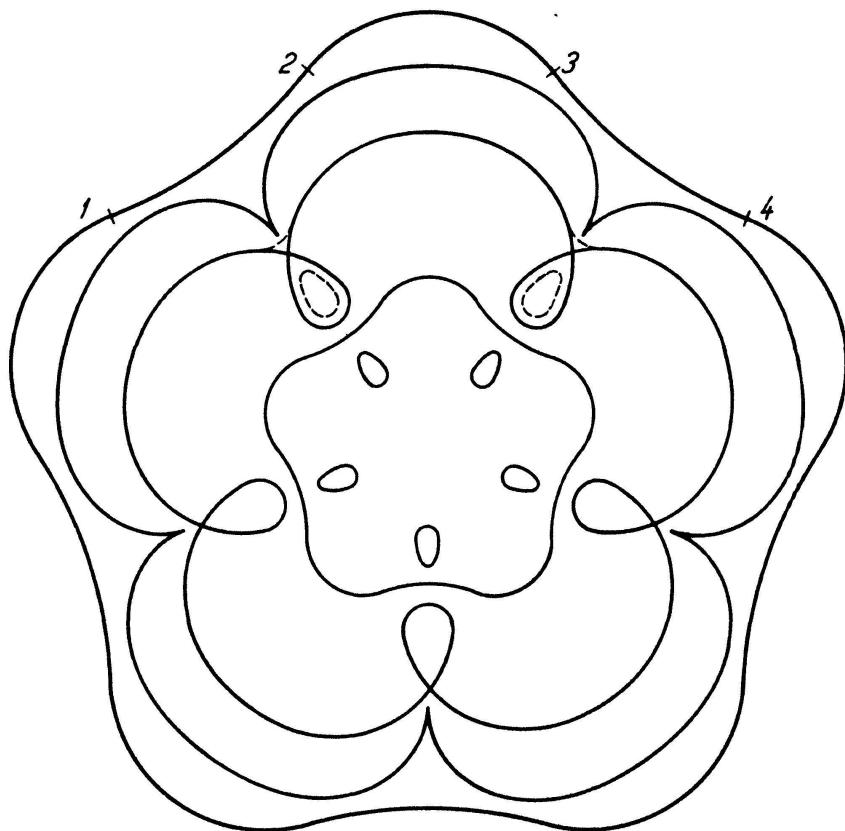
Note that if (10), (11), and (12) are multiplied together we have a fraction equal to 1, such that the three factors in the numerator are the left members of (7), (8), and (9), and the three factors in the denominator are the three right (smaller) members. But this is a contradiction and the proof is complete.

J. H. ROBERTS, Duke University, Durham, North Carolina, USA

### Wendestellen, Spitzen und Schleifen

Bei der Behandlung der eigentlichen und der uneigentlichen Singularitäten ebener, glatter Kurven<sup>1)</sup> (Wendestellen, Dorn- und Schnabelspitzen, bzw. mehrfache Punkte und mehrfache Tangenten) wird man selbstverständlich zunächst jede Singularität für sich allein untersuchen. Didaktisch eindringlich vermittelt werden diese Dinge aber erst dadurch, dass man sie in ein Ganzes hineinfügt und die möglichen Übergänge betrachtet. Die drei folgenden Figuren mögen Beispiele hierfür liefern.

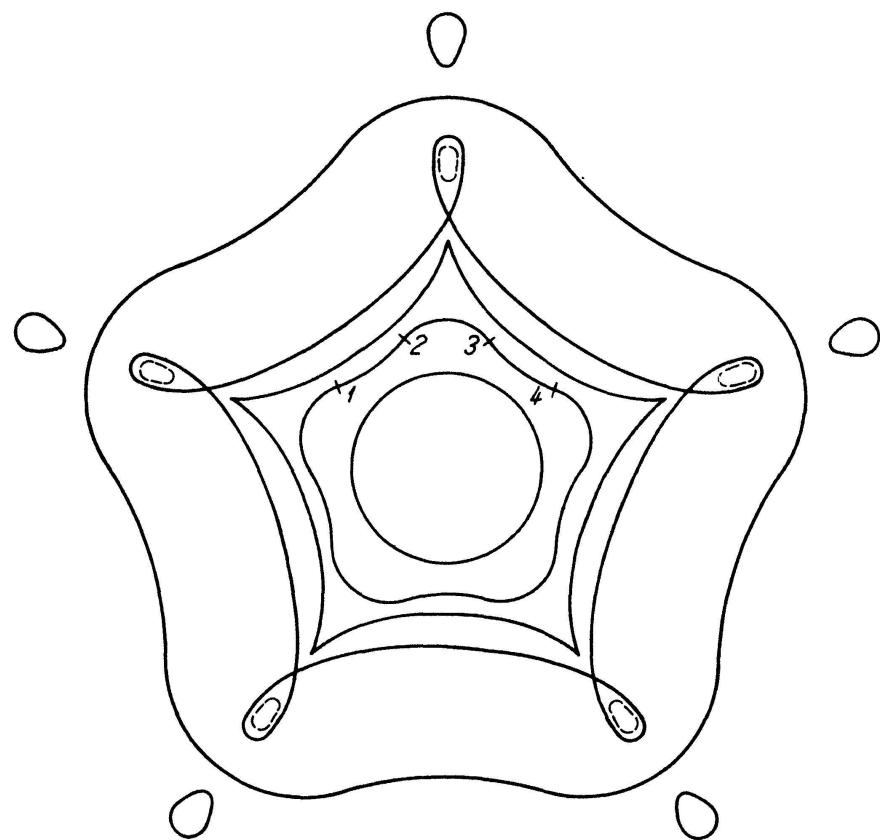
Wir gehen von einer Kurve aus, die an eigentlichen Singularitäten blosse Wendestellen 1, 2, 3, 4, ... aufweist; zum Beispiel derart, dass wir den Umfang eines Kreises wellig machen, so dass man von Aus- und von Einbuchtungen sprechen kann. Man kann nun zwei benachbarte Wendestellen entweder gegen eine Einbuchtung (Figur 1) oder gegen eine Ausbuchtung (Figur 2) hin rücken lassen. (Die einzelnen Umformungen sind in den Figuren, nur um Platz zu sparen, nicht nebeneinander, sondern ineinander gezeichnet, wodurch eine nicht sachgemäße Verkleinerung nach innen erforderlich ist.)



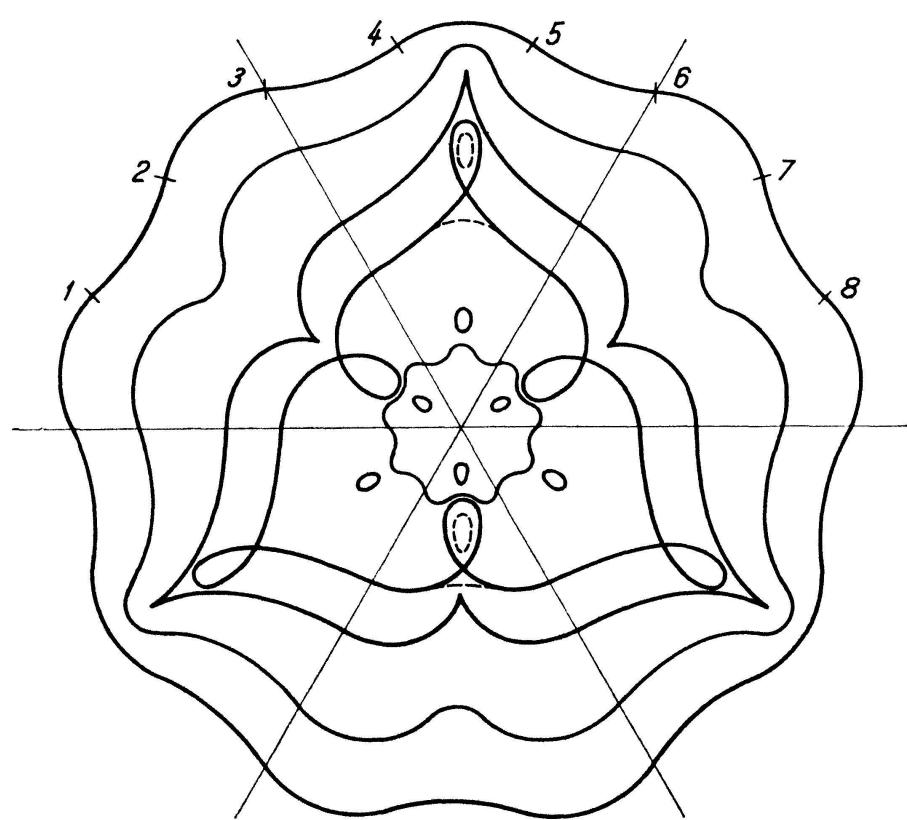
Figur 1

In Figur 1 rücken 1 und 2, 3 und 4, usw., je gegen eine Einbuchtung. Im Grenzfall ergeben sich nach innen gerichtete Spitzen, die man in üblicher Weise in Schleifen überführen kann. Durch einen bekannten Prozess erfolgt die Ablösung der Schleifen in Form von Ovalen. Das Ergebnis ist dieselbe wellige Grundform wie zu Beginn, aber nun versehen mit Ovalen im Innern.

<sup>1)</sup> Näheres in dem Buche L. LOCHER-ERNST, *Einführung in die freie Geometrie ebener Kurven*. Birkhäuser Verlag, Basel 1952.



Figur 2



Figur 3

In Figur 2 (von innen her zu lesen) rücken 2 und 3 usw. je gegen eine Ausbuchtung. Weiter erhält man Dornspitzen nach aussen, dann Schleifen, die zur Absonderung von Ovalen nach aussen Anlass bieten. Das Ergebnis ist dieselbe wellige Grundform wie zu Beginn, aber mit Ovalen im Äussern.

In Figur 3 betrachte man, von 1 ausgehend, je sechs aufeinanderfolgende Wendestellen. 1 und 2 rücken gegen eine Einbuchtung zusammen, die Wendestelle 3 bleibt, 4 und 5 rücken gegen eine Ausbuchtung, die nächste Wendestelle 6 bleibt als solche erhalten; usw. Es ergeben sich «fortschreitende Lemniskaten». Die Ablösung der Ovalen erfolgt abwechselnd nach innen und nach aussen.

Solche zusammenfassende Bilder vermitteln für wichtige Umformungen eine Vertrautheit, die sich auf anderen Wegen kaum so angenehm gewinnen lässt. Zu den verschiedenen Massnahmen, die für eine durchgreifende Neugestaltung des mathematischen Unterrichts zu treffen sind, gehört auch das Einbeziehen einer lebendigen Kurvengeometrie.

L. LOCHER-ERNST

## Aufgaben

**Aufgabe 383.** Die Verbindungsgerade eines festen Punktes  $A$  mit der Mitte  $M$  eines Kreises  $k$  schneide  $k$  in den Punkten  $P$  und  $Q$ . Durchläuft  $k$  ein hyperbolisches Kreisbüschel, so erfüllen bekanntlich die Punkte  $P, Q$  im allgemeinen eine monozirkulare Kubik vom Geschlecht Null mit drei im endlichen liegenden reellen Scheiteln. Wie kann man für jene dieser «Fokalen», die eine Symmetriearchse besitzen, die Scheitelkrümmungskreise einfach konstruieren, und wo muss der Aufpunkt  $A$ , der zugleich der singuläre Brennpunkt der Kubik ist, gewählt werden, damit die drei Scheitelkrümmungskreise kongruent werden?

R. BEREIS, Dresden

*Lösung des Aufgabenstellers:* Kurven geforderter Art mit Symmetriearchsen erhält man naturgemäß, wenn man den Aufpunkt  $A$  (Figur) in der Symmetriearchse des gegebenen hyperbolischen Kreisbüschels wählt, die die beiden konjugiert komplexen Grundpunkte trägt. Die so erzeugten Fokalen sind anallagmatisch – also zu sich selbst invers – mit dem Inversionszentrum  $A$ . Der Inversionskreis gehört dem ergänzenden elliptischen Kreisbüschel an und geht durch die Nullkreise  $N_1, N_2$ . Jede dieser  $c_3$  kann somit auch als Hüllkurve einer einparametrischen Schar von doppeltberührenden Kreisen  $k_d$  aufgefasst werden, die den erwähnten Inversionskreis als gemeinsamen Orthogonalkreis besitzen. Die Mitten der Kreise  $k_d$  erfüllen die sogenannte Deferente  $\Delta$  der betrachteten  $c_3$ , die von den Streckensymmetralen entsprechender Punktpaare  $P, Q$  umhüllt wird.  $\Delta$  ist demnach eine Parabel mit dem Brennpunkt  $A$  und der Mittengeraden des Kreisbüschels als Scheitel-tangente. Die Leitgerade  $l$  der Parabel  $\Delta$ , die auch als Kissoiden der  $c_3$  mit dem Aufpunkt  $A$  erhalten werden kann, ist ferner Asymptote der  $c_3$ .

Die Punkte  $P, Q$  rücken für die beiden Nullkreise  $N_1, N_2$  des Kreisbüschels zusammen. Die zugehörigen Krümmungskreise müssen daher die  $c_3$  vierpunktig berühren, das heißt, die Nullkreise  $N_1, N_2$  des Kreisbüschels sind Scheitel der  $c_3$ . Die zugehörigen Krümmungsmitten  $K_1, K_2$  sind als Punkte der Parabel  $\Delta$  leicht zu konstruieren. So liegt zum Beispiel  $K_2$  auf der Normalen zu  $[AN_2]$  in  $N_2$  (= Tangente der Parabel  $\Delta$ ). Hat  $A$  von der Büschelsymmetralen den Abstand  $a$ , und beträgt die Entfernung der beiden Nullkreise  $N_1 N_2 = 2b$ , so erhält man für den Krümmungsradius in  $N_1$  bzw. in  $N_2$

$$\varrho_{1,2} = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 + b^2},$$

während der Krümmungskreis im Symmetriescheitel  $A$  invers zur Asymptote  $l$  liegt und daher den Radius

$$\varrho_A = \frac{1}{4a} (a^2 + b^2)$$

besitzt.