Ungelöste Probleme

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **16 (1961)**

Heft 5

PDF erstellt am: **28.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Die beiden Figuren beziehen sich auf den ebenen Fall ($n = 2$) und zwar zeigt Figur 1 die Korona eines Kreisbereichs der Fläche $F = \pi$ mit $\varrho = 3$; es ergibt sich für die Koronafläche $F^\varrho = 12\pi = 37{,}699$. Dagegen zeigt Figur 2 die Korona eines regulären Dreiecksbereiches mit der gleichen Fläche $F = \pi$ und ebenso $\varrho = 3$; für die Koronafläche errechnet man hier $F^\varrho = 44{,}310$.

Wir lassen nun den kurzen Beweis unserer Behauptung (2) folgen: Zunächst führen wir zwei Hilfsmengen ein, nämlich

$$B^\varrho = \{ p \in E^n \mid \exists\, q \in A : \quad d(p, q) \leqq \varrho \}, \tag{3}$$

$$C^\varrho = \{ p \in E^n \mid \forall\, q \in A : \quad d(p, q) < \varrho \}. \tag{4}$$

Hierbei ist B^ϱ abgeschlossen und C^ϱ offen. Ausserdem gelten offensichtlich die folgenden Beziehungen

$$C^\varrho \subset B^\varrho ; \quad A^\varrho \cup C^\varrho = B^\varrho ; \quad A^\varrho \cap C^\varrho = \phi , \tag{5}$$

wobei ϕ die leere Menge bedeutet.

Ist K die abgeschlossene Kugel vom Radius 1 und dem Ursprung $o \in E^n$ als Mittelpunkt und bezeichnet $\underline{K}$ den offenen Kern von K, so gelten für die Hilfsmengen (3) und (4) die Darstellungen

$$B^\varrho = \varrho K + A ; \quad C^\varrho = (\varrho \underline{K} - A)^* , \tag{6}$$

wobei ϱ die Dilatation von o aus, die Mengenverknüpfungen $+$ und $-$ die Minkowskische Addition und Subtraktion bedeuten und $*$ schliesslich den Übergang zu der bezüglich o spiegelsymmetrischen Menge anzeigt[1]). Nach (5) ergibt sich

$$V^\varrho = V(A^\varrho) = V(B^\varrho) - V(C^\varrho) . \tag{7}$$

Die auf der rechten Seite auftretenden Volummasse können nach dem Brunn-Minkowskischen Satz und dem Spiegeltheorem von ERHARD SCHMIDT passend geschätzt werden, indem im Hinblick auf die Darstellungen (6) auf

$$V(B^\varrho)^{1/n} \geqq \varrho\, V(K)^{1/n} + V(A)^{1/n} \tag{8}$$

$$V(C^\varrho)^{1/n} \leqq \varrho\, V(\underline{K})^{1/n} - V(A)^{1/n} \tag{9}$$

geschlossen werden kann[2]). Verwendet man diese Ungleichungen in (7), so resultiert mit der Bemerkung $V(K) = V(\underline{K}) = \omega_n$ direkt die Behauptung (2). Soll dort Gleichheit bestehen, so muss das nämliche für die Ungleichungen (8) und (9) gelten, was unter den genannten Bedingungen $V > 0$ und $\varrho > D$ genau dann zutrifft, wenn A eine Kugel ist. Damit ist der Beweis beendet. H. HADWIGER (Bern)

Ungelöste Probleme

Nr. 40. Welches ist die kleinste natürliche Zahl m der Eigenschaft, dass es noch eine Überdeckung der Ebene durch m Punktmengen so gibt, dass keine der m Mengen ein Punktepaar der Distanz 1 enthält?

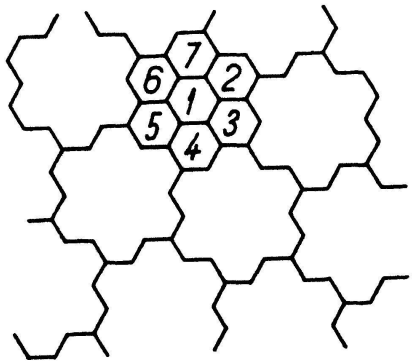
[1]) Vgl. H. HADWIGER, *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie*, Springer Verlag 1957; Seite 142.

[2]) Vgl. die in [1]) zitierten Vorlesungen, Seite 159.

Verschiedentlich haben sich Fachleute mit dieser Frage befasst, ohne dass eine Lösung erzielt worden ist. Herrn V. L. KLEE (Seattle, USA) verdanken wir hierüber einige Informationen. Das Problem soll E. NELSON zuzuschreiben sein; Einschränkungen für m erzielte J. ISBELL. Unabhängig hiervon hat sich der Unterzeichnete vor einigen Jahren mit P. ERDÖS über Fragen dieser Art unterhalten. Heute weiss man über die Zahl m lediglich, dass sie sich der Einschränkung

$$4 \leqq m \leqq 7$$

fügen muss. Dass $m \geqq 4$ gilt, ist leicht einzusehen. Ist nämlich die Ebene durch $n = 3$ Punktmengen überdeckt, so enthält wenigstens eine dieser Mengen sicher ein Punktepaar der Distanz 1. In der Tat: Nehmen wir an, die Ebene wäre durch die drei Punktmengen A, B, C überdeckt, und keine würde ein Punktepaar der Distanz 1 aufweisen. Wir betrachten einen Rhombus $pvqu$, $d(pv) = d(vq) = d(qu) = d(up) = d(uv) = 1$, $d(pq) = \sqrt{3}$. Nehmen wir an, dass p zu A gehört, so muss von den beiden Punkten u und v der eine zu B und der andere zu C gehören. Hieraus folgt, dass q wieder in A liegen muss. Da man den Rhombus um p drehen kann, ohne dass sich an der beschriebenen Sachlage etwas ändert, folgt nun, dass der Kreis um p vom Radius $\sqrt{3}$ ganz von A überdeckt ist, was offensichtlich einen flagranten Widerspruch zur Gegenannahme darstellt, wonach sich insbesondere in A die Distanz 1 nicht realisieren darf.



Dass andererseits $m \leqq 7$ gilt, ist mit einem Beispiel einer besonderen Überdeckung der Ebene mit $n = 7$ Punktmengen zu belegen, wobei keine der Mengen ein Punktepaar der Distanz 1 enthält[1]). Spiegelt man ein reguläres 6-Eck der Seitenlänge $s = 2/5$ an den sechs Seiten, so entsteht ein regelmässiges 18-Eck (vgl. die Figur), das eine Parkettierung der Ebene im Sinne der Elementargeometrie mit translationsgleichen Exemplaren gestattet. Werden nun die in den 18-Ecken homolog liegenden abgeschlossenen 6-Ecke zu Mengen zusammengefasst, so entstehen 7 abgeschlossene und translationsgleiche Punktmengen, die insgesamt die Ebene überdecken. Wie eine rechnerische Kontrolle ergibt, werden die Distanzen d des Intervalls

$$4/5 < d < \sqrt{28}/5$$

nicht durch Punktepaare der Mengen realisiert, wobei noch zu vermerken ist, dass die Distanz $d = 1$ dem Intervall angehört. H. HADWIGER

[1]) Das nachfolgende Beispiel ist der Note «*Überdeckung des euklidischen Raumes durch kongruente Mengen*», Portugaliae Math. *4*, 1946, entnommen.

Zweiter Nachtrag zu Nr. 12

Die extremalen konvexen n-Ecke der Ebene, die bei vorgeschriebenem Durchmesser $D = 1$ den maximalen Flächeninhalt F_n aufweisen, sind für gerade n, $n > 4$, noch nicht bekannt. Ihre Bestimmung bildet das ungelöste Problem, auf das wir an dieser Stelle zurückkommen. Im ersten Nachtrag (Bd. XIII, 85) veröffentlichten wir einen uns von J. J. SCHÄFFER (Montevideo) zur Verfügung gestellten einfachen Beweis dafür, dass das reguläre n-Eck sicher nicht extremal ist, wie dies für ungerade n, $n \geqq 3$, stets der Fall ist.

Für gerade n, $n > 4$, gilt allgemein

$$\frac{n}{8} \sin \frac{2\pi}{n} = \underline{F}_n < F_n < \overline{F}_n = \frac{n}{2} \cos \frac{\pi}{n} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2n}, \tag{1}$$

wobei noch das Schrankenverhältnis

$$\frac{\underline{F}_n}{\overline{F}_n} = \cos^2 \frac{\pi}{2n} \tag{2}$$

vermerkt werden soll. Nun ist es H. BIERI (Bern) gelungen, das Problem für $n = 6$ im achsensymmetrischen Fall zu lösen. Hierbei ist einzuräumen, dass das extremale Polygon auch im allgemeinen Fall achsiale Symmetrie aufweisen dürfte, so dass die gefundene Lösung vermutlich allgemeine Gültigkeit hat. Die von BIERI erzielte Lösung ist indessen nicht einfach angebbar, und die Form, in der die eindeutige Kennzeichnung des extremalen Polygons und des maximalen Flächeninhaltes erfolgen muss, regt an, sich über den Begriff «Lösung eines elementargeometrischen Problems» einige nützliche Gedanken zu machen. Wir geben hier die Lösung: Der maximale Flächeninhalt eines konvexen und achsensymmetrischen Sechsecks vom Durchmesser $D = 1$ ist durch

$$F_6 = f(a^*) \tag{3}$$

ausgedrückt, wobei a^* die einzige im Intervall $0 \leqq a \leqq 1$ liegende Wurzel der Gleichung

$$f'(a) = 0 \tag{4}$$

ist, wo f die im Intervall $0 \leqq a \leqq 1$ von unten konkave Funktion

$$f(a) = \frac{1}{4}\{2a + (1-a)\sqrt{4-a^2} + a\sqrt{4-(1+a)^2}\} \tag{5}$$

bezeichnet. a^* ist irrational. Die Bedingung (4) führt auf die Gleichung

$$\sum_{\nu=0}^{10} p_\nu a^\nu = 0 \tag{6}$$

zehnten Grades mit den Koeffizienten

ν	p_ν	ν	p_ν
0	− 351		
1	720	6	284
2	630	7	−344
3	−1584	8	− 78
4	− 512	9	32
5	1204	10	8

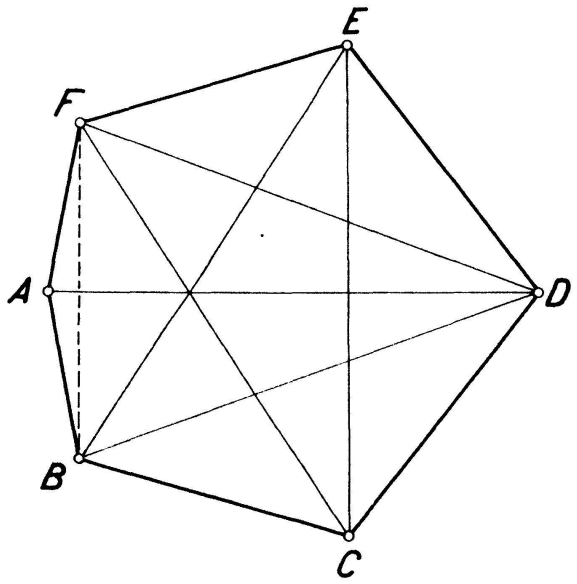
Die numerische Auswertung der Bedingung (4), die mit Einsatz des Rechenautomaten des Instituts für angewandte Mathematik an der Universität Bern erfolgte, liefert die folgenden Resultate:

$$a^* = 0{,}687543\ldots\,; \qquad F_6 = f(a^*) = 0{,}67498144\ldots \tag{7}$$

Es sei noch die Ungleichung (1) im Falle $n = 6$ zum Vergleich herangezogen, die

$$\frac{3\sqrt{3}}{8} = 0{,}64952\cdots < F_6 < 0{,}696152\ldots = \frac{6\sqrt{3} - 9}{2} \tag{8}$$

liefert. Die Figur zeigt das zugehörende extremale 6-Eck $ABCDEF$.



Symmetrieachse ist die Gerade AD. Das Polygon hat die höchste Zahl von Durchmessern, die bei einem konvexen Sechseck vorkommen können. Es sind dies die sechs Strecken AD, DB, DF, BE, FC, EC. Die Diagonale BF hat die Länge a^*. Wird die Diagonale BF von variabler Länge a angenommen, die oben angegebene Durchmesserkonfiguration beibehalten, so ergibt sich eine einparametrige Sechsecksschar. Der Hauptteil des Bierischen Beweises besteht darin, zu zeigen, dass das gesuchte extremale Sechseck dieser Schar angehören muss. Das übrige ergibt sich mit der Bemerkung, dass $f(a)$ der Flächeninhalt des Scharsechsecks ist, wobei noch die Funktion f im Intervall $0 \leqq a \leqq 1$ passend diskutiert werden muss. H. HADWIGER

Kleine Mitteilungen

Quelques remarques sur une relation entre nombres impairs et nombres triangulaires

Pour abréger les notations, je désignerai par

$$\{n\}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

les nombres triangulaires

$$0,\ 0+1,\ 0+1+2, \ldots, 0+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}, \ldots .$$