

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 16 (1961)  
**Heft:** 5

**Artikel:** Die Kugel als Körper extremaler Korona  
**Autor:** Hadwiger, H.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-21292>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 15.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

kann. Wie oft hört man die naive Frage, was es denn in der Mathematik noch Neues zu entdecken gebe, nachdem man sich mehr als zweitausend Jahre mit den Zahlen usf. wissenschaftlich auseinandergesetzt habe. Dass diese Frage in weiten Kreisen, wie gesagt auch in den gebildetsten, zu treffen ist, weist deutlich auf einen Mangel in der Gedankenführung im mathematischen Unterricht hin. Die Einsicht in die Tatsache, dass die Erweiterung der Erkenntnisse auf irgendeinem Gebiete auch wesentlich eine Erweiterung des Kreises der offenen Fragen bedeutet, scheint zu wenig verbreitet zu sein. (*Fortsetzung im nächsten Heft*) L. LOCHER-ERNST

## Die Kugel als Körper extremaler Korona

Es bezeichne  $A$  eine beschränkte und abgeschlossene Punktmenge des  $n$ -dimensionalen euklidischen Raumes  $E^n$ . Für ein  $\varrho > 0$  werde

$$A^\varrho = \{p \in E^n \mid \exists q \in A : d(p, q) = \varrho\} \quad (1)$$

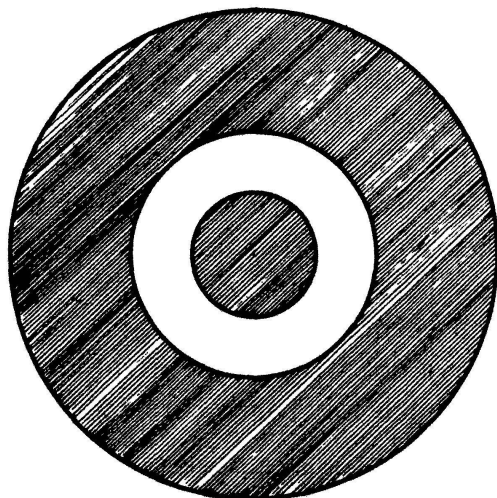
gesetzt, wobei  $d(p, q)$  die euklidische Distanz der beiden Punkte  $p$  und  $q$  bedeutet.  $A^\varrho$  ist also die Menge derjenigen Punkte des Raumes, die von wenigstens einem Punkt von  $A$  den Abstand  $\varrho$  aufweisen. Man kann  $A^\varrho$  auch als Vereinigungsmenge der Kugelflächen vom Radius  $\varrho$  auffassen, die um Punkte von  $A$  als Mittelpunkte gelegt werden können. Ist  $\varrho$  grösser als der Durchmesser  $D(A)$  von  $A$ , so stellt  $A^\varrho$  eine Punktmenge dar, die  $A$  umschliesst; wir wollen sie eine Korona von  $A$  nennen.

Wie  $A$  ist auch die Korona  $A^\varrho$  abgeschlossen und beschränkt. Man kann diesen Mengen demnach Volummasse  $V$  und  $V^\varrho$  zuschreiben (Lebesguesche Masse). In der vorliegenden Note wollen wir zeigen, dass die Kugel unter allen Punkt Mengen gleichen Volumens das kleinst mögliche Koronavolumen aufweist. Diese Tatsache wird durch die Ungleichung

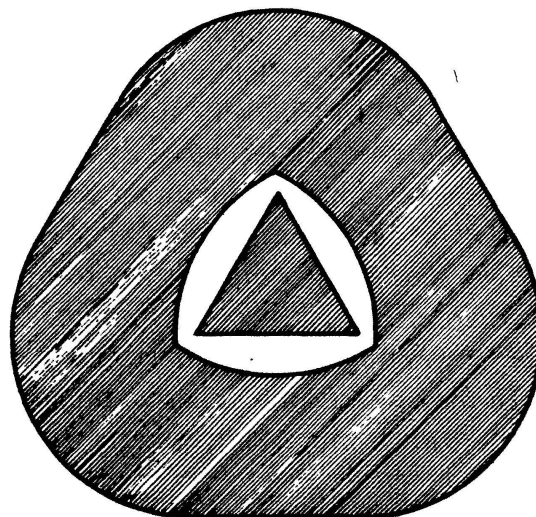
$$V^\varrho \geq [\varrho \omega_n^{1/n} + V^{1/n}]^n - [\varrho \omega_n^{1/n} - V^{1/n}]^n \quad (2)$$

ausgedrückt, wobei  $\omega_n$  das Volumen der  $n$ -dimensionalen Einheitskugel bezeichnet.

Im Falle  $V > 0$  und  $\varrho > D(A)$  gilt in (2) das Gleichheitszeichen dann und nur dann, wenn  $A$  eine Kugel ist.



Figur 1



Figur 2

Die beiden Figuren beziehen sich auf den ebenen Fall ( $n = 2$ ) und zwar zeigt Figur 1 die Korona eines Kreisbereichs der Fläche  $F = \pi$  mit  $\varrho = 3$ ; es ergibt sich für die Koronafläche  $F^e = 12\pi = 37,699$ . Dagegen zeigt Figur 2 die Korona eines regulären Dreiecksbereiches mit der gleichen Fläche  $F = \pi$  und ebenso  $\varrho = 3$ ; für die Koronafläche errechnet man hier  $F^e = 44,310$ .

Wir lassen nun den kurzen Beweis unserer Behauptung (2) folgen: Zunächst führen wir zwei Hilfsmengen ein, nämlich

$$B^e = \{p \in E^n \mid \exists q \in A : d(p, q) \leq \varrho\}, \tag{3}$$

$$C^e = \{p \in E^n \mid \forall q \in A : d(p, q) < \varrho\}. \tag{4}$$

Hierbei ist  $B^e$  abgeschlossen und  $C^e$  offen. Ausserdem gelten offensichtlich die folgenden Beziehungen

$$C^e \subset B^e ; \quad A^e \cup C^e = B^e ; \quad A^e \cap C^e = \phi, \tag{5}$$

wobei  $\phi$  die leere Menge bedeutet.

Ist  $K$  die abgeschlossene Kugel vom Radius 1 und dem Ursprung  $o \in E^n$  als Mittelpunkt und bezeichnet  $\underline{K}$  den offenen Kern von  $K$ , so gelten für die Hilfsmengen (3) und (4) die Darstellungen

$$B^e = \varrho K + A ; \quad C^e = (\varrho \underline{K} - A)^*, \tag{6}$$

wobei  $\varrho$  die Dilatation von  $o$  aus, die Mengenverknüpfungen  $+$  und  $-$  die Minkowskische Addition und Subtraktion bedeuten und  $*$  schliesslich den Übergang zu der bezüglich  $o$  spiegelsymmetrischen Menge anzeigt<sup>1)</sup>. Nach (5) ergibt sich

$$V^e = V(A^e) = V(B^e) - V(C^e). \tag{7}$$

Die auf der rechten Seite auftretenden Volummasse können nach dem Brunn-Minkowskischen Satz und dem Spiegeltheorem von ERHARD SCHMIDT passend geschätzt werden, indem im Hinblick auf die Darstellungen (6) auf

$$V(B^e)^{1/n} \geq \varrho V(K)^{1/n} + V(A)^{1/n} \tag{8}$$

$$V(C^e)^{1/n} \leq \varrho V(\underline{K})^{1/n} - V(A)^{1/n} \tag{9}$$

geschlossen werden kann<sup>2)</sup>. Verwendet man diese Ungleichungen in (7), so resultiert mit der Bemerkung  $V(K) = V(\underline{K}) = \omega_n$  direkt die Behauptung (2). Soll dort Gleichheit bestehen, so muss das nämliche für die Ungleichungen (8) und (9) gelten, was unter den genannten Bedingungen  $V > 0$  und  $\varrho > D$  genau dann zutrifft, wenn  $A$  eine Kugel ist. Damit ist der Beweis beendet.

H. HADWIGER (Bern)

## Ungelöste Probleme

**Nr. 40.** Welches ist die kleinste natürliche Zahl  $m$  der Eigenschaft, dass es noch eine Überdeckung der Ebene durch  $m$  Punkt mengen so gibt, dass keine der  $m$  Mengen ein Punktepaar der Distanz 1 enthält?

<sup>1)</sup> Vgl. H. HADWIGER, *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie*, Springer Verlag 1957; Seite 142.

<sup>2)</sup> Vgl. die in <sup>1)</sup> zitierten Vorlesungen, Seite 159.