Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 16 (1961)
Heft: 5

Artikel: Von der Gedankenlosigkeit in der Behandlung der Mathematik
Autor: Locher-Ernst, L.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-21291

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 29.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

ELEMENTE DER MATHEMATIK
Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrer

Publiziert mit Unterstützung des Schweizerischen Nationalfonds
zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung

El. Math. Band XVI Nr. 5 Seiten 97–120 Basel, 10. September 1961

Von der Gedankenlosigkeit in der Behandlung der Mathematik

1. Eine Diskussion – Ende der zwanziger Jahre – nach dem Vortrag eines bekannten Mathematikers vor einem Gremium, zu dem auch die Studierenden der letzten Semester Zutritt hatten, blieb mir in lebhafter Erinnerung. Als der Vertreter älteren Schlages, den wir als Idealisten bezeichnen können, den Nominalisten in die Enge trieb, behauptete dieser, die Formel $(a + b)^2 = a^2 + 2\,a\,b + b^2$ und das quadratische Reziprozitätsgesetz für die natürlichen Zahlen seien genau gleicher Natur. Der Idealist verwahrte sich entschieden dagegen und bezeichnete die erste Formel als trivial, das Reziprozitätsgesetz hingegen als eine tiefliegende Tatsache. Darauf wollte der Nominalist wissen, worin sich das Tieferliegen der einen Formel gegenüber der anderen ausdrücke; der Unterschied liege doch höchstens darin, dass die Beweisketten, durch welche die genannten Sachverhalte mit den Axiomen zusammenhängen, ungleich lang seien. Idealist und Nominalist beharrten auf ihren Standpunkten, ohne auch nur die geringste Annäherung vorzunehmen.

Wer hat recht? Von einem Gesichtspunkt aus gesehen erscheint es leicht, fast selbstverständlich, die Argumentation des Nominalisten anzuerkennen. Weshalb sollte denn ein grundsätzlicher Unterschied nur deshalb gemacht werden, weil die eine Beweiskette kurz, die andere bedeutend länger ist? Auf Grund eines andersgewählten Axiomensystems wären vielleicht die Herleitungen nicht mehr so stark verschieden lang. Andererseits lebt in jedem Idealisten – damals gehörten noch die meisten Mathematiker zu ihnen – das ihm als unbedingt sicher geltende Gefühl, der Nominalist versündige sich mit seinem Vertrivialisieren gegen den Geist der Mathematik.

Die Einstellung zu diesem Problem ist weitgehend verbunden mit der Haltung, die man gegenüber dem Wahrheitsbegriff einzunehmen vermag. Bis zum neunzehnten Jahrhundert galten die mathematischen Sachverhalte als unbedingte Wahrheiten, ja als Muster von solchen. Und bis gegen die Mitte unseres Jahrhunderts konnte man im Zusammenhang mit pädagogischen Fragen hören, der mathematische Unterricht diene zur Zucht des Denkens, das sich in der Mathematik an objektiven Tatbeständen zu üben habe.

Im Laufe des neunzehnten Jahrhunderts sah man sich veranlasst, eine erste Relativierung des Wahrheitsbegriffes vorzunehmen. Die Axiome gelten seither nicht mehr als «Urphänomene», als wahre Sachverhalte, sondern als mehr oder weniger zweckmässige Festsetzungen. Als wahr werden dann die Aussagen betrachtet, die aus diesen Festsetzungen durch richtiges Schliessen folgen.

In unserem Jahrhundert erfolgte die zweite Relativierung, indem man es aufgab, von einem an sich richtigen Schliessen zu sprechen. Auch die Regeln des Schliessens sind zu Festsetzungen geworden, die man mehr oder weniger zweckmässig treffen kann. Als wahr gelten nun noch die Aussagen, die auf Grund solcher Festsetzungen aus jenen Axiomen folgen.

Dass diese doppelte Relativierung des Wahrheitsbegriffs für den mathematischen Unterricht, insbesondere an den Gymnasien, tiefgreifende Änderungen in der Stellung der pädagogischen Bedeutung der Mathematik haben muss, ist zwar evident, wurde aber bis heute noch zu wenig gründlich durchdacht.

Über die in dieser oder jener Weise vollzogenen formalen Axiomatisierungen der Mengenlehre sagt BOURBAKI[1]):

«Si elles satisfont les formalistes, c'est que ces derniers refusent de prendre en considération les réactions psychologiques individuelles de chaque mathématicien; ils estiment qu'un langage formalisé a rempli sa tâche lorsqu'il peut transcrire les raisonnements mathématiques sous une forme dépourvue d'ambiguïté, et servir ainsi de véhicule à la pensée mathématique; libre à chacun, diraient-ils, de penser ce qu'il voudra sur la «nature» des êtres mathématiques ou la «vérité» des théorèmes qu'il utilise, pourvu que ses raisonnements puissent être transcrits dans le langage commun.»

Eine elegante Lösung des angezeigten Problems wählt Herr N. BOURBAKI, indem er sagt (Seite 81 des in [1]) genannten Buches):

«Les mathématiciens ont toujours été persuadés qu'ils démontrent des «vérités» ou des «propositions vraies»; une telle conviction ne peut évidemment être que d'ordre sentimental ou métaphysique, et ce n'est pas en se plaçant sur le terrain de la mathématique qu'on peut la justifier, ni même lui donner un sens qui n'en fasse pas une tautologie. L'histoire du concept de vérité en mathématique relève donc de l'histoire de la philosophie et non de celle des mathématiques; mais l'évolution de ce concept a eu une influence indéniable sur celle des mathématiques, et à ce titre nous ne pouvons la passer sous silence.»

In einer erfreulich deutlichen Art sprach sich gelegentlich K. MENGER[2]) so aus:

«Ich, für meinen Teil, glaube, ..., dass das, was der Mathematiker tut, nichts anderes ist, als die Herleitung von Aussagen mit Hilfe gewisser aufzuzählender (in verschiedener Weise wählbaren) Methoden aus gewissen aufzuzählenden (in verschiedener Weise wählbarer) Aussagen – und dass alles, was Mathematik und Logik über diese, einer «Begründung» weder fähige noch bedürftige Tätigkeit des Mathematikers aussagen können, in dieser simplen Tatsachenfeststellung besteht.»

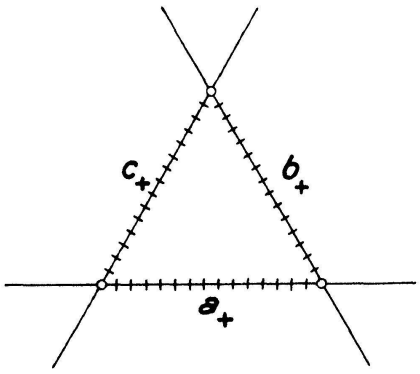
Von einem Gedankeninhalt zu reden, der unabhängig von den in Zeichen notierten Methoden und Aussagen besteht, der fähig ist, eine Begründung für das Tun zu tragen, hat keinen Sinn mehr – sofern man sich nicht darauf beschränken will, als Begründung allein die Nützlichkeit zur Konstruktion gewisser Mechanismen anzuerkennen. Dies führt konsequent schliesslich dazu, die Gedankenlosigkeit des Mathematisierens zum Prinzip zu erheben.

2. Man spricht heute davon, dass im Laufe unseres Jahrhunderts die Mathematik immer mehr Strukturtheorie geworden sei. Diese Entwicklung begann mit der Bildung

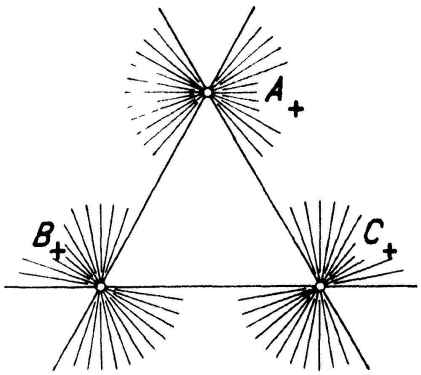
[1]) N. BOURBAKI: *Eléments de Mathématique.* Livre I, chapitre 4: Structures, p. 105. Hermann, Paris 1957.

[2]) Im Vorwort des Buches von F. WAISMANN: *Einführung in das mathematische Denken.* Gerold & Co., Wien 1936.

des Gruppenbegriffes und mit den Einsichten in den Umstand, dass sich gewisse Sachverhalte verschiedener mathematischer Gebiete von derselben Gruppe oder, allgemeiner gesprochen, von derselben Struktur beherrscht erwiesen. Es ist an dieser Stelle nicht nötig, an eindrückliche Beispiele zu erinnern. In der Tat ergaben sich hieraus Erkenntnisse von vorher ungeahnten Zusammenhängen. Mit Recht hatte man den Eindruck, damit in manchen mathematischen Einzeldisziplinen in die Tiefe vorgedrungen zu sein. Diesen Vorstoss in die Tiefe suchte man weiter und weiter zu treiben, bis man schliesslich überhaupt nur noch die formalen Strukturen im Gesichtsfeld behielt. Es liegt mir ferne, die Fruchtbarkeit dieser Entwicklung nicht voll anzuerkennen. Wenn sich am Horizont ein neues Licht zeigt, ist es das Vorrecht der Pioniere, ihren Blick auf dieses allein zu richten. Es darf dabei im Fortgang aber nicht vergessen werden, dass auf einem solchen Wege allzu leicht auch vieles verloren geht, dass man sogar blind wird für Sachverhalte, die auch in Betracht zu ziehen sind.



Figur 1



Figur 2

An einem einfachen Beispiel möge illustriert werden, was damit gemeint ist:

Drei Geraden a, b, c (Figur 1) zerlegen das Punktfeld der projektiven Ebene in vier Punktgebiete. Die Segmente, die eines dieser Gebiete begrenzen, seien mit a_+, b_+, c_+ bezeichnet, die übrigen Segmente entsprechend mit a_-, b_-, c_-. Die vier Gebiete können durch die begrenzenden Segmente gegeben werden:

$$a_+ b_+ c_+ , \quad a_+ b_- c_- , \quad b_+ c_- a_- , \quad c_+ a_- b_- .$$

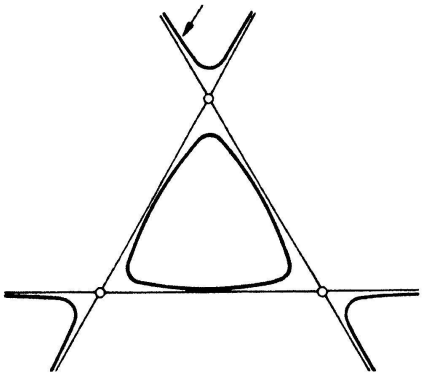
Drei Punkte A, B, C (Figur 2) gliedern das Strahlenfeld der projektiven Ebene in vier Strahlenbereiche. Die Winkelfelder, die einen dieser Bereiche begrenzen, seien mit A_+, B_+, C_+ bezeichnet, die übrigen Winkelfelder entsprechend mit A_-, B_-, C_-. Die vier Bereiche können durch die begrenzenden Winkelfelder gegeben werden:

$$A_+ B_+ C_+ , \quad A_+ B_- C_- , \quad B_+ C_- A_- , \quad C_+ A_- B_- .$$

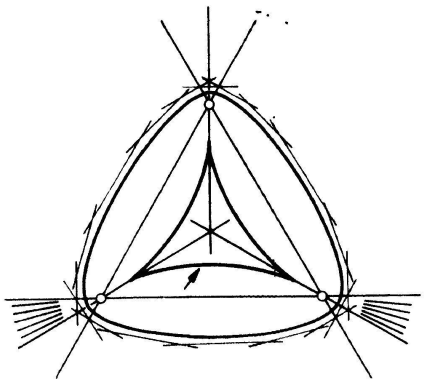
Den Inbegriff der drei Geraden a, b, c betrachten wir als zerfallene Kurve dritter Ordnung. Durch stetige Umformung erhält man zwei Haupttypen der Kurven dritter Ordnung (sechster Klasse)[3]), nämlich die zweiteilige Form (Figur 3), bestehend aus einem Zuge mit drei Wendestellen und einem Oval, sowie die einteilige Form (Figur 5) mit drei Wendestellen.

[3]) Es ist nicht nötig, bloss an algebraische Kurven zu denken. Es kann sich um allgemeinere Kurven handeln, für welche die Ordnung als die maximale Anzahl der (reellen) Schnittpunkte erklärt ist, welche die Kurve mit einer Geraden besitzt (entsprechend die Klasse). Näheres findet man in den folgenden Büchern des Verfassers: *Einführung in die freie Geometrie ebener Kurven* (Birkhäuser Verlag, Basel 1952), *Raum und Gegenraum* (Philosophisch-Anthroposophischer Verlag am Goetheanum, Dornach 1957).

Die zweiteilige Form entsteht folgendermassen: Die Punkte der Segmente a_+, b_+, c_+ werden in das Gebiet $a_+ b_+ c_+$ verschoben. Der durch einen Pfeil bezeichnete, von zwei Wendestellen auf der Ferngeraden begrenzte Kurvenbogen entsteht aus den «Hälften» der Segmente b_- und c_- durch Hereinrücken in das Gebiet $a_+ b_- c_-$. Entsprechend die beiden übrigen Bögen.

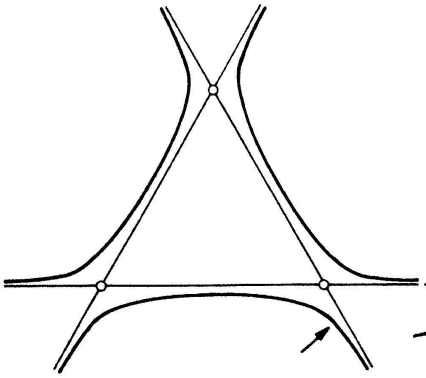


Figur 3

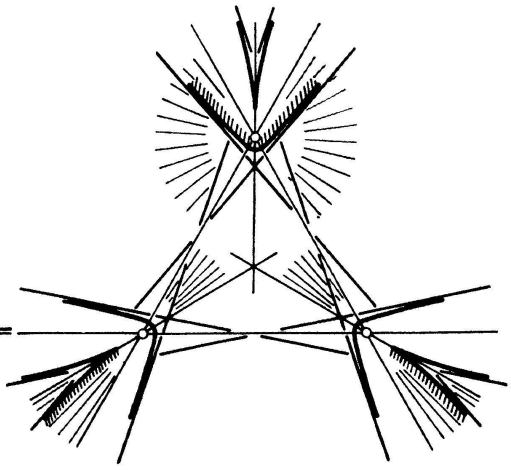


Figur 4

Der durch einen Pfeil bezeichnete, auch durch zwei Wendestellen begrenzte Teilbogen der einteiligen Form (Figur 5) ergibt sich durch Verschieben der Punkte des Segmentes a_+ und der Punkte der «Hälften» der Segmente b_- und c_- in das Gebiet $a_+ b_- c_-$.



Figur 5



Figur 6

Die Figuren 4 und 6 zeigen zwei Haupttypen der Kurven dritter Klasse (sechster Ordnung), die sich durch die entsprechenden polaren stetigen Umformungen der drei Strahlenbüschel A, B, C ergeben.

Die zweiteilige Form (Figur 4) entsteht wie folgt: Die Strahlen der Winkelfelder A_+, B_+, C_+ werden in den Bereich $A_+ B_+ C_+$ verschoben und bilden dann ein Oval. Die «Hälften» der Winkelfelder B_-, C_- (in Figur 4 angedeutet) werden in den Bereich $A_+ B_- C_-$ verschoben, so dass ein von Spitzen begrenzter Bogen (mit Pfeil bezeichnet) gebildet wird. Entsprechend die beiden übrigen Bögen.

Zur Bildung der einteiligen Form (Figur 6) nehmen wir als Material zunächst alle Strahlen aus A_+ und je die «Hälfte» der Strahlen aus B_- und C_- (in Figur 6 angedeutet) und bilden durch leichtes Verschieben *einen* (zweimal über die Ferngerade führenden) Bogen (in Figur 6 hervorgehoben). Entsprechend die beiden anderen Teil-

bögen. Damit wird vollkommen überschaubar, wie die einteilige Grundform mit drei Spitzen aus den Büscheln A, B, C hervorgeht.

Man wird wohl zugeben, dass es ohne Übung nicht selbstverständlich erscheint, wie die beiden entsprechenden Typen der Kurven dritter Ordnung und dritter Klasse aus den zerfallenden Gebilden, nämlich den Inbegriffen von drei Punktreihen und von drei Strahlenbüscheln hervorgehen. Rein formal behandelt kann man die Vorgänge aber als gleich bezeichnen. Bleibt man bei algebraischen Gebilden, kann man von der Nullsetzung des Produktes dreier Linearformen dazu übergehen, dieses Produkt gleich einer positiven oder negativen Konstanten mit «kleinem» Betrag zu setzen. Ob man unter den Variablen Punkt- oder Linienkoordinaten versteht, bleibt dabei gleichgültig. Die «Struktur» der Gebilde ist dieselbe. *Die konkreten Unterschiede innerhalb des Punkt- und des Strahlenfeldes gehören aber zweifellos auch zur Geometrie.* Es ist gedankenlos, ob der Identität der Struktur die *auch der Mathematik* angehörenden Unterschiede in verschiedenen Realisierungen dieser Struktur als unwesentlich wegzulassen. Ja, die Tatsache des Bestehens derselben Struktur erscheint erst dann im rechten Lichte, wenn man sie gegen die Fülle der einzelnen Realisierungen abzuheben versteht.

3. Ein anderes Beispiel möge auf einen weiteren Umstand hinweisen, der viel zu wenig beachtet wird. Für das elementare Rechnen mit natürlichen Zahlen kann man dieses oder jenes Axiomensystem zugrunde legen. Die meisten Lehrer werden mit einem gewissen Stolz vorführen, wie man mit dem betreffenden System und mit den geeignet gewählten «logischen» Regeln nunmehr die Arithmetik der natürlichen Zahlen aufbauen kann. Es wird damit der Eindruck erweckt, dass man die Sachverhalte im Reiche der natürlichen Zahlen mit jenem System und mit jenen Regeln vollkommen beherrsche. Leider wissen viele Mathematiker nicht, dass dies eine Täuschung ist. Zu den bedeutsamen Ergebnissen unseres Jahrhunderts gehört der von TH. SKOLEM[4]) entdeckte Sachverhalt, dass es unmöglich ist, die natürlichen Zahlen durch ein endliches Axiomensystem eindeutig zu charakterisieren. Das heisst, wie man auch ein finites System wählen mag, es gibt stets verschiedenartige Bereiche, die Realisierungen jenes Systems darstellen. Diese Tatsache sollte jeder Darstellung von Strukturtheorien mit roten Lettern vorangestellt oder mindestens frühzeitig eingegliedert werden. Sie bringt einem den richtigen Respekt für das Gebilde der Reihe der natürlichen Zahlen bei. Ein vollkommenes Beherrschen ist nur im Gebiete gewisser abstrahierter Begriffsbildungen möglich, zum Beispiel für die Restklassen. Tatsächlich sind die natürlichen Zahlen derart individuell, dass sie durch ein finites Axiomensystem nicht im oben genannten Sinne eindeutig gekennzeichnet werden können. Dass man diesen Umstand heute zu wenig betont, rechne ich auch zu den Gedankenlosigkeiten in der Behandlung der Mathematik. Der Sachverhalt vermittelt einem die nötige Reserve gegenüber den formalen Strukturtheorien. Für den unterrichtenden Mathematiker ist es von fundamentaler Bedeutung, diese Dinge zu kennen, weil die Stimmung seines Unterrichts dadurch wesentlich beeinflusst wird.

In diesem Zusammenhange möge eine Erfahrung erwähnt werden, die man immer wieder, auch mit Akademikern, ja erstaunlicherweise auch mit Ingenieuren machen

---

[4]) TH. SKOLEM: *Über die Unmöglichkeit einer vollständigen Charakterisierung der Zahlenreihe mittels eines endlichen Axiomensystems.* Norsk. Math. Forenings Skrifter, Ser. II. 1933. Eine auch heute noch anregende Darstellung einschlägiger Fragen findet man in dem in Fussnote [2]) genannten Buche.

kann. Wie oft hört man die naive Frage, was es denn in der Mathematik noch Neues zu entdecken gebe, nachdem man sich mehr als zweitausend Jahre mit den Zahlen usf. wissenschaftlich auseinandergesetzt habe. Dass diese Frage in weiten Kreisen, wie gesagt auch in den gebildetsten, zu treffen ist, weist deutlich auf einen Mangel in der Gedankenführung im mathematischen Unterricht hin. Die Einsicht in die Tatsache, dass die Erweiterung der Erkenntnisse auf irgendeinem Gebiete auch wesentlich eine Erweiterung des Kreises der offenen Fragen bedeutet, scheint zu wenig verbreitet zu sein. *(Fortsetzung im nächsten Heft)* L. LOCHER-ERNST

Die Kugel als Körper extremaler Korona

Es bezeichne A eine beschränkte und abgeschlossene Punktmenge des n-dimensionalen euklidischen Raumes E^n. Für ein $\varrho > 0$ werde

$$A^\varrho = \{p \in E^n \mid \exists\, q \in A : \quad d(p, q) = \varrho\} \tag{1}$$

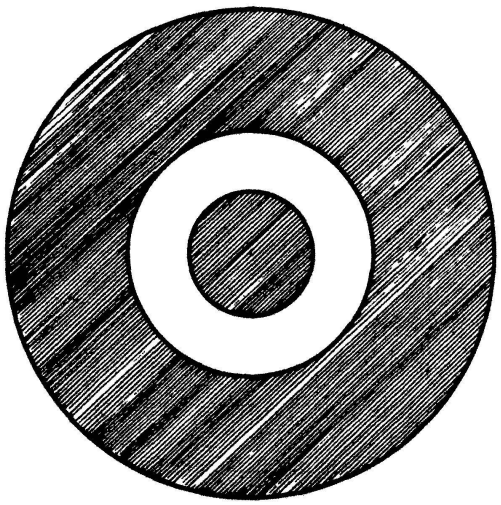
gesetzt, wobei $d(p, q)$ die euklidische Distanz der beiden Punkte p und q bedeutet. A^ϱ ist also die Menge derjenigen Punkte des Raumes, die von wenigstens einem Punkt von A den Abstand ϱ aufweisen. Man kann A^ϱ auch als Vereinigungsmenge der Kugelflächen vom Radius ϱ auffassen, die um Punkte von A als Mittelpunkte gelegt werden können. Ist ϱ grösser als der Durchmesser $D(A)$ von A, so stellt A^ϱ eine Punktmenge dar, die A umschliesst; wir wollen sie eine Korona von A nennen.

Wie A ist auch die Korona A^ϱ abgeschlossen und beschränkt. Man kann diesen Mengen demnach Volummasse V und V^ϱ zuschreiben (Lebesguesche Masse). In der vorliegenden Note wollen wir zeigen, dass die Kugel unter allen Punktmengen gleichen Volumens das kleinst mögliche Koronavolumen aufweist. Diese Tatsache wird durch die Ungleichung

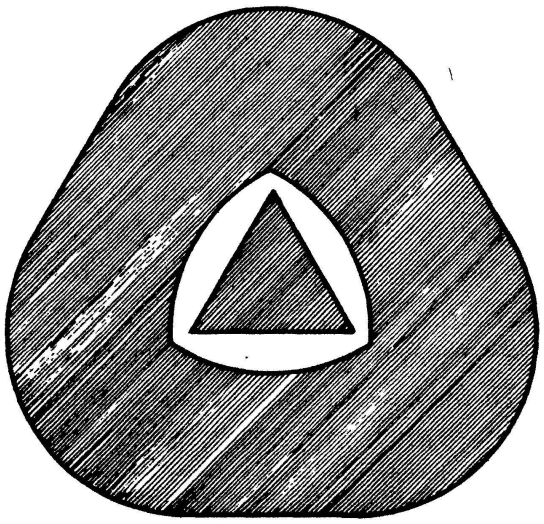
$$V^\varrho \geqq [\varrho\, \omega_n^{1/n} + V^{1/n}]^n - [\varrho\, \omega_n^{1/n} - V^{1/n}]^n \tag{2}$$

ausgedrückt, wobei ω_n das Volumen der n-dimensionalen Einheitskugel bezeichnet.

Im Falle $V > 0$ und $\varrho > D(A)$ gilt in (2) das Gleichheitszeichen dann und nur dann, wenn A eine Kugel ist.



Figur 1



Figur 2