

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 16 (1961)
Heft: 4

Artikel: Eine einfache Lösung des Normalenproblems der Fläche zweiter Ordnung
Autor: Dirnböck, H.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-21289>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 02.05.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Eine einfache Lösung des Normalenproblems der Fläche zweiter Ordnung

1. Die Aufgabe, die Normalen aus einem Punkt $P(x_0 | y_0 | z_0)$ auf eine Fläche 2. Ordnung Φ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (1)$$

zu fällen, ist schon mehrmals in der Literatur behandelt worden [1]¹⁾, vorerst soll mit Hilfe einer bekannten analytischen Betrachtung [2, 3] ein Ergebnis vorweggenommen werden, das dann in den Absätzen 2 bis 4 mit einfachen Mitteln der projektiven Geometrie der *Ebene* erklärt werden wird.

Sucht man die Polarebenen von P bezüglich aller mit Φ konfokalen Flächen

$$\frac{x^2}{a^2 - \lambda} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda} + \frac{z^2}{c^2 - \lambda} = 1 \quad (\text{Parameter } \lambda), \quad (2)$$

so bilden diese Ebenen

$$\frac{x x_0}{a^2 - \lambda} + \frac{y y_0}{b^2 - \lambda} + \frac{z z_0}{c^2 - \lambda} = 1 \quad (\text{Parameter } \lambda) \quad (3)$$

eine Torse τ ; und zwar eine Torse 3. Klasse, weil für einen gegebenen Punkt $P_1(x_1 | y_1 | z_1)$ i. a. 3 Werte λ existieren, die (3) erfüllen. Die Gratlinie von τ ist die sogenannte BÖKLENSCHE Parabel 3. Ordnung [4], sie hat alle Ebenen (3) zu Schmiegeebenen, insbesondere die Ebenen des Hauptpoltetraeders von Φ und die Polarebene von P bezüglich Φ .

Die Pole einer festen Ebene $\bar{\varepsilon}$

$$\frac{x x_0}{a^2 - \lambda} + \frac{y y_0}{b^2 - \lambda} + \frac{z z_0}{c^2 - \lambda} = 1 \quad (\bar{3})$$

bezüglich aller Flächen (2) liegen auf einer Geraden e

$$\xi = x_0 \frac{a^2 - \lambda}{a^2 - \lambda}, \quad \eta = y_0 \frac{b^2 - \lambda}{b^2 - \lambda}, \quad \zeta = z_0 \frac{c^2 - \lambda}{c^2 - \lambda} \quad (\text{Parameter } \lambda), \quad (4)$$

die normal auf $\bar{\varepsilon}$ steht. e nennt man nach REYE [5] «Achse» von $\bar{\varepsilon}$ bezüglich aller Flächen (2). Allen Ebenen des Raumes entspricht vermöge der eindeutigen Zuordnung $e \leftrightarrow \bar{\varepsilon}$ der «Achsenkomplex» [5] der Schar (2). Es sei erwähnt, dass die in einer beliebigen Ebene liegenden Komplexstrahlen eine Parabel umhüllen und dass die durch einen beliebigen Punkt gehenden Komplexstrahlen einen gleichseitigen Kegel 2. Ordnung bilden.

Der Achsenkomplex enthält die Normalenkongruenz jeder Einzelfläche der Schar (2). Eine gemeinsame Tangentialebene von τ und Φ hat als Achse eine aus P an Φ legbare Normale; aus P gehen also 6 Normalen an Φ .

¹⁾ Die Zahlen in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis am Schluss der Arbeit.

Die Polarisierung aller Ebenen (3) an Φ (1) liefert eine Kurve α :

$$\xi = \frac{a^2 x_0}{a^2 - \lambda}, \quad \eta = \frac{b^2 y_0}{b^2 - \lambda}, \quad \zeta = \frac{c^2 z_0}{c^2 - \lambda} \text{ (Parameter } \lambda), \quad (5)$$

die schon von CHASLES [6] benützt wurde. (5) in die Gleichung einer beliebigen Ebene eingesetzt, ergibt i. a. 3 Werte λ ; α ist daher von 3. Ordnung. α geht durch die Ecken des Hauptpoltetraeders von Φ und durch P . Die 6 Schnittpunkte von α mit Φ sind nun die Fusspunkte der aus P auf Φ fällbaren Normalen. α trägt weiters die Fusspunkte der aus P auf alle Flächen

$$\frac{x^2}{k \cdot a^2} + \frac{y^2}{k \cdot b^2} + \frac{z^2}{k \cdot c^2} = 1 \text{ (Parameter } k) \quad (6)$$

fällbaren Lote, weil k nur auf den freien Parameter λ in (5) Einfluss hat. Die Normalen aus P auf (6) bilden übrigens einen Kegel 2. Ordnung.

Die Normalprojektion α' von α auf $z = 0$ ist eine gleichseitige Hyperbel

$$\xi = \frac{a^2 x_0}{a^2 - \lambda}, \quad \eta = \frac{b^2 x_0}{b^2 - \lambda}, \quad \zeta = 0 \text{ (Parameter } \lambda). \quad (7)$$

Analoges gilt für die Projektionen α'' und α''' in die Ebenen $x = 0$ bzw. $y = 0$. Diese Hyperbeln, die ja α bestimmen, ohne Heranziehung der projektiven Geometrie des Raumes zu erklären, ist Gegenstand dieser Arbeit.

2. Obwohl allgemein bekannt, sei doch kurz die Aufgabe behandelt, in der Ebene die Normalen aus einem Punkt P auf eine Kurve 2. Ordnung c zu fällen (Figur 1):

Jede Gerade g durch P hat bezüglich c einen Pol G (der auf der Polaren p von P bezüglich c liegt); das Lot \bar{g} aus G auf g umhüllt eine (nach CHASLES benannte) Parabel γ [7], wenn sich g um P dreht. Bezeichnet man nämlich die Fernpunkte von g und \bar{g} mit G_u bzw. \bar{G}_u , die Ferngerade der Ebene mit \bar{u} , so ist

$$P(g, \dots, a, b, u, n) \overline{\wedge}^2) \bar{u}(G_u, \dots, A_u, B_u, U_u, N_u) \wedge^2) \bar{u}(\bar{G}_u, \dots, \bar{A}_u, \bar{B}_u, \bar{U}_u, \bar{N}_u),$$

weiters

$$P(g, \dots, a, b, u, n) \wedge p(G, \dots, A, B, U, N),$$

also

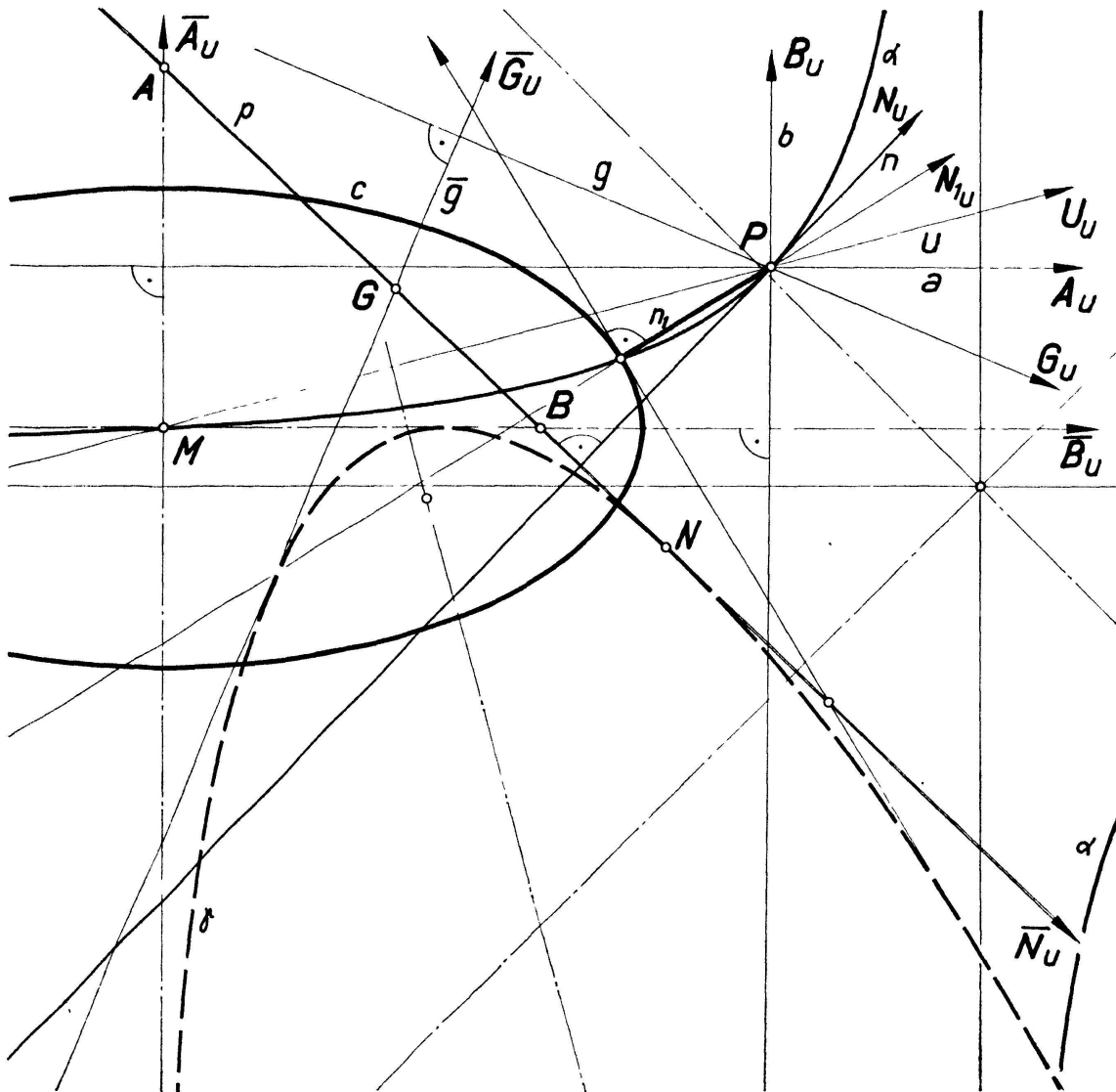
$$p(G, \dots, A, B, U, N) \wedge \bar{u}(\bar{G}_u, \dots, \bar{A}_u, \bar{B}_u, \bar{U}_u, \bar{N}_u).$$

Die projektiven Punktreihen auf p und \bar{u} erzeugen also eine Parabel γ . Da \bar{N}_u der Fernpunkt von p ist, berührt γ die Gerade p in N . Den aus P auf c möglichen Loten n_i entsprechen gemeinsame Tangenten von c und γ . Es ist also $i = 1, \dots, 4$, doch ist in Figur 1 nur das reelle Lot n_1 eingezeichnet.

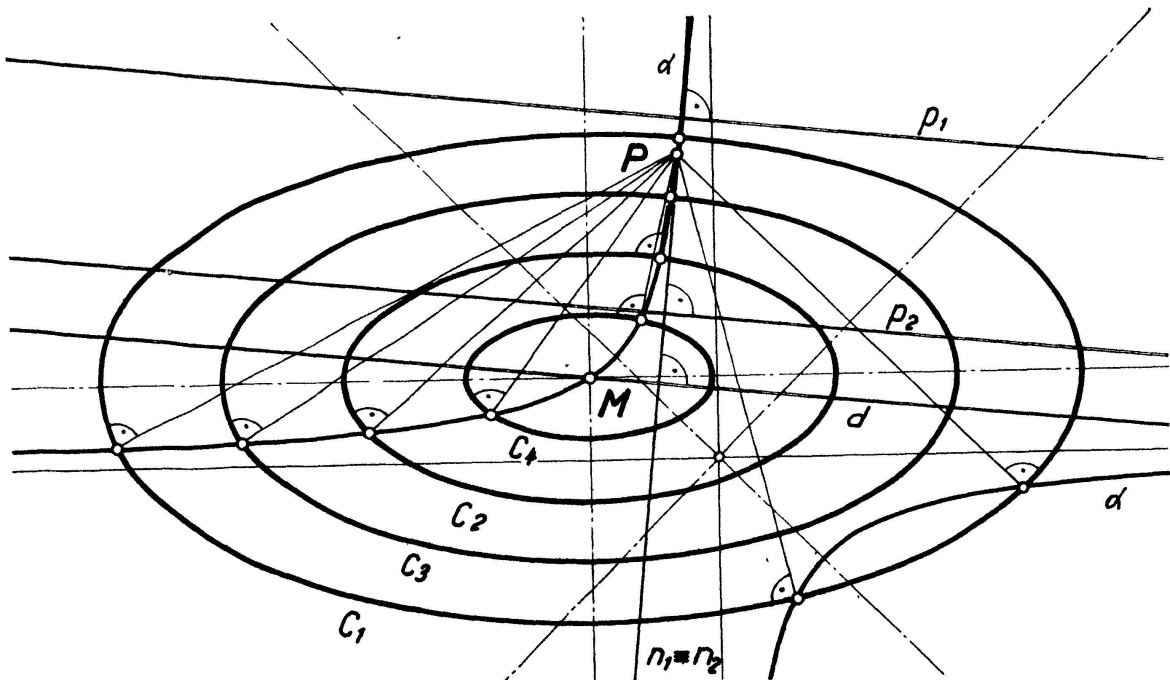
Polarisiert man γ an c (sucht man also die Pole aller \bar{g}), so entsteht die bekannte (gleichseitige) Apollonische Hyperbel α^3 , diese geht durch die Pole von \bar{b} und \bar{a} , also die Fernpunkte der Achsen von c , und durch den Pol von \bar{u} , das ist M . γ berührt p in N , daher berührt α im Punkte P die Gerade n .

²⁾ $\overline{\wedge} \wedge$ bedeutet projektive, $\overline{\wedge}^2$ perspektive Verwandtschaft zwischen Grundgebilden 1. Stufe.

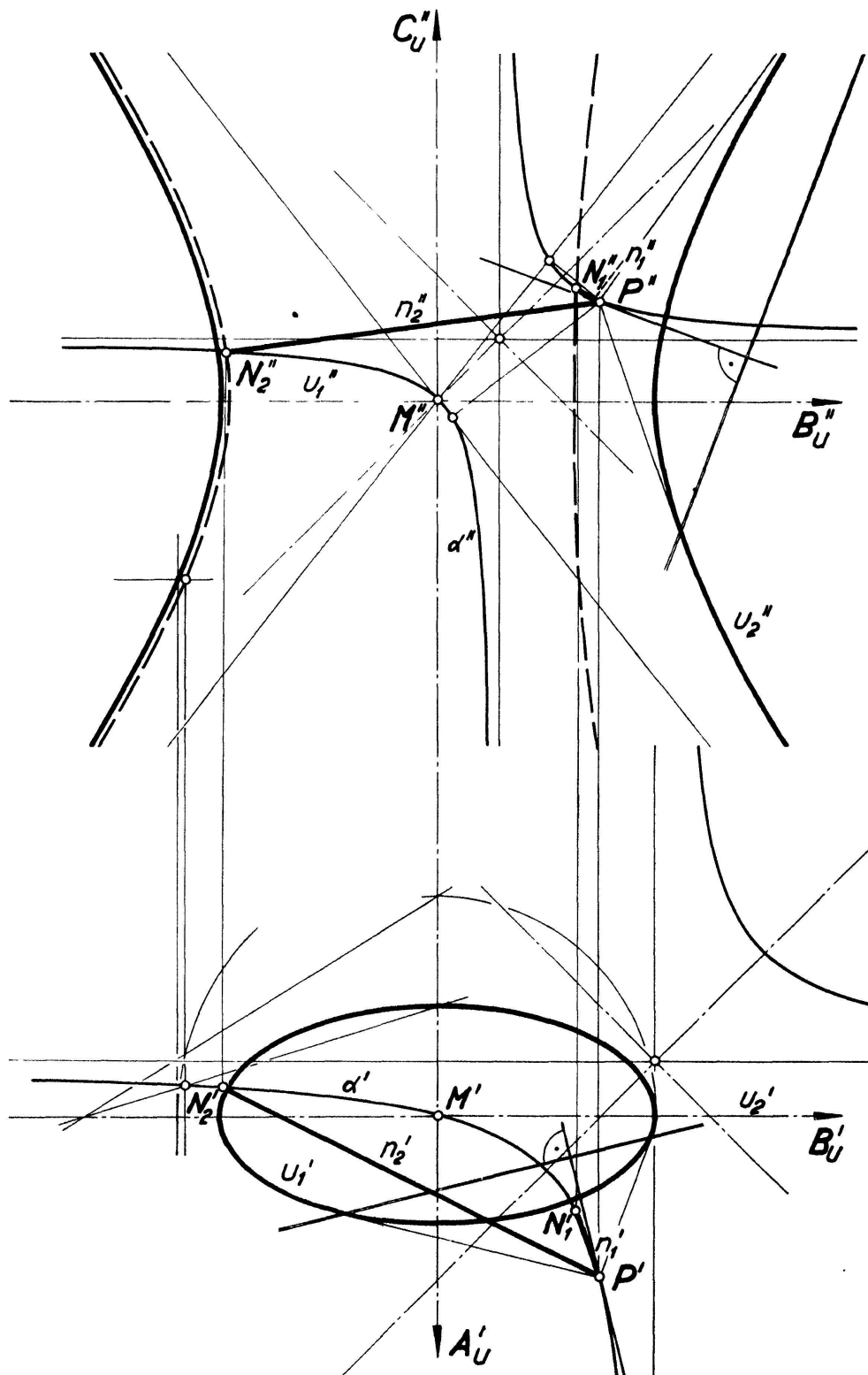
³⁾ Buch 5, § 58–63.



Figur 1



Figur 2



Figur 3

Durch die 5 Bestimmungsstücke $[M, \bar{B}_u, \bar{A}_u, P + n]$ ist α bestimmt. Wegen der polaren Verwandtschaft von α mit γ sind die Schnittpunkte von α mit c die Fusspunkte der aus P an c legbaren Lote.

3. Figur 2 zeigt die Kurven 2. Ordnung c_1 und c_2 , die den gemeinsamen Mittelpunkt M als Ähnlichkeitszentrum haben.

Ein Punkt P hat bezüglich c_1 und c_2 zwei Polaren p_1 und p_2 , die parallel sind, weil die zu $[PM]$ konjugierten Durchmesser (in bezug auf die beiden Kurven) identisch sind. Die Normalen n_1 und n_2 aus P auf p_1 und p_2 sind daher ebenfalls identisch. Damit ist gezeigt, dass die zu P gehörigen Apollonischen Hyperbeln identisch sind, weil die in Nr. 2 aufgezählten 5 Bestimmungsstücke dieselben sind.

Auch alle weiteren, aus c_1 durch zentrische Ähnlichkeit mit dem Zentrum M hervorgegangenen Kurven $c_3, c_4 \dots$ ⁴⁾ haben dieselbe zu P gehörige Apollonische Hyperbel α .

4. Die in Nr. 1 gestellte Aufgabe ist nun leicht zu erledigen. Man stelle die gegebene Fläche 2. Ordnung Φ in zugeordneten Normalrissen (Grund- und Aufriss) so dar, dass 2 Symmetrieebenen der Fläche parallel zu den Bildebenen π_1 und π_2 liegen. In Figur 3 ist Φ als einschaliges Hyperboloid angenommen.

Denkt man sich Φ durch Ebenen parallel zu π_1 geschnitten und die Schnittkurven auf π_1 projiziert, so entsteht ein Kurvenbüschel wie in Nr. 3.

Für ein gesuchtes Lot n_i ist notwendig, dass sein Grundriss n_i' auf den Grundriss der 1. Hauptgeraden h_i' der Tangentialebene des Lotfußpunktes N_i normal steht. Die 1. Hauptgeraden der Tangentialebenen von Φ sind Tangenten der soeben eingeführten Schnittkurven. *Die Apollonische Hyperbel α' von P' bezüglich des 1. scheinbaren Umrisses u_i' von Φ ist daher ein Ort für N_i' .*

Auch im Aufriss entsteht eine Apollonische Hyperbel α'' als Ort für N_i'' .

Die Fernpunkte der Hauptachsen von Φ sollen A_u, B_u und C_u heißen. Die beiden hyperbolischen Zylinder $[C_u \alpha']$ und $[A_u \alpha'']$ haben als Schnittgebilde ausser der Ferngeraden $[C_u A_u]$ noch jene von CHASLES [6] benützte Kurve 3. Ordnung α . Die 6 Schnittpunkte ($\alpha \Phi$) sind also die Fußpunkte N_i der gesuchten Lote n_i .

Zur Konstruktion reeller N_i wird man den projizierenden Zylinder $[C_u \alpha']$ mit Φ schneiden und den Aufriss dieser Kurve 4. Ordnung mit α'' zum Schnitt bringen. In Figur 3 sind nur 2 reelle N_i eingezeichnet.

Aus Nr. 3 folgt überdies, dass alle aus Φ durch zentrische Ähnlichkeit mit dem Zentrum M hervorgegangenen Flächen dieselbe zu P gehörige Ortskurve α für die Lotfußpunkte haben.

Es soll späteren Arbeiten vorbehalten sein, zu untersuchen, ob obiger Satz Analoga im Euklidischen Raum höherer Dimension hat. Durch günstige Abbildungsverfahren des n -dimensionalen Raumes wird es dann möglich sein, auch das Normalenproblem für Hyperflächen 2. Ordnung (der Dimension $n - 1$) übersichtlich zu lösen.

H. DIRNBÖCK, Graz

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] O. STAUDE, *Flächen 2. Ordnung und ihre Systeme*, Enc. d. math. Wiss. III 2, 198.
- [2] S. LIE, *Geometrie der Berührungstransformationen*, p. 320.
- [3] H. F. BAKER, *Principles of Geometry*, p. 102.
- [4] O. BÖKLEN, J. f. Math. 96, 169 (1884).
- [5] T. REYE, *Die Geometrie der Lage*, 2. Abteilung, p. 214.
- [6] CHASLES, J. de math. (1), 3, 215 (1838).
- [7] CHASLES, J. de math. 3, 420, (1838).

⁴⁾ Diese Kurven bilden ein «Berührungsbüschel» mit den Fernpunkten von c_1 als Grundpunkten und den Asymptoten von c_1 als Grundtangente.