

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 16 (1961)  
**Heft:** 4

**Artikel:** Ausfüllung von Eiliniien durch einbeschriebene gleichseitige und gleichwinklige n-Ecke  
**Autor:** Giering, O.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-21288>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 21.05.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

daher einmal statt der Polygonfolge  $II^{(s)}$  ( $s = 0, 1, \dots$ ) die Folge  $II^{[s]}$  ( $s = 0, 1, \dots$ ), die im Raum  $\mathfrak{R}_k$  durch

$$p^{[s+1]} = \mathfrak{Q}^{-1} \cdot p^{[s]} \quad \text{bzw.} \quad (20)$$

$$p^{[s+1]} = (\mathfrak{Q}^{-1})^{s+1} \cdot p = \mathfrak{B} \cdot \left[ 1, \frac{1}{L_1}, \dots, \frac{1}{L_{k-1}} \right]^{s+1} \cdot \mathfrak{B}^{-1} \cdot p \quad (s = 0, 1, \dots) \quad (20')$$

beschrieben wird. (Neue Aufgabe: Lässt sich die neue Polygonfolge auch konstruktiv herstellen?) Da die  $L_1, \dots, L_{k-1}$  eine der oben nicht eingeklammerten Bedingungen (I) oder (II) erfüllen, trifft jetzt der entsprechende eingeklammerte Fall zu. Wir erhalten: *Notwendig und hinreichend für die Konvergenz des neuen Verfahrens ist, dass der Punkt  $p$ , der das Ausgangspolygon  $II$  angibt, in den Fällen (I) eine Darstellung*

$$p = C_0 \cdot l_0 + \sum_{r=j+1}^{k-1} C_r \cdot l_r, \quad (21')$$

in den Fällen (II) eine Darstellung

$$p = C_0 \cdot l_0 + \sum_{r=j}^{k-1} C_r \cdot l_r \quad (21'')$$

besitzt. Ist bei (I) das eine Verfahren konvergent, so ist das andere sicher divergent, und bei (II) konvergieren beide Verfahren nur genau dann, wenn gilt:

$$p = C_0 \cdot l_0 + C_j \cdot l_j.$$

*NB.* Wie Herr Prof. Dr. R. BEREIS (Dresden) dem Verfasser mitteilte, hat für den Fall, dass  $k = 3$  und das Dreieck  $M_0M_1M$  gleichseitig ist, Herr Prof. Dr. HEINRICH (Dresden) ähnliche Untersuchungen durchgeführt.

GERHARD GEISE, Dresden

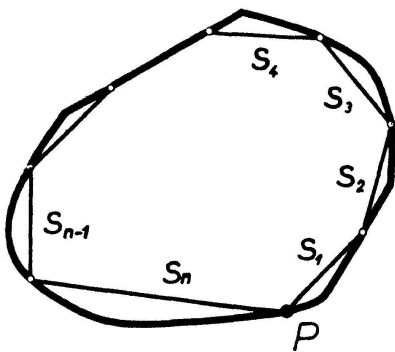
*Zusatz bei der Korrektur:* Herr Prof. Dr. HEINRICH (Dresden) vermittelte freundlicherweise dem Verfasser einen Hinweis von Herrn Prof. Dr. WUNDERLICH (Wien), dem zu entnehmen ist, daß in der Arbeit von J. H. CADWELL, A property of linear cyclic transformations, Math. Gaz. 37, 85–89 (1953) (Referat: Zentralblatt 57, 117 (1954)) eine andere Verallgemeinerung der Aufgabe 379 für den Raum vorliegt.

## Ausfüllung von Eilinen durch einbeschriebene gleichseitige und gleichwinklige $n$ -Ecke

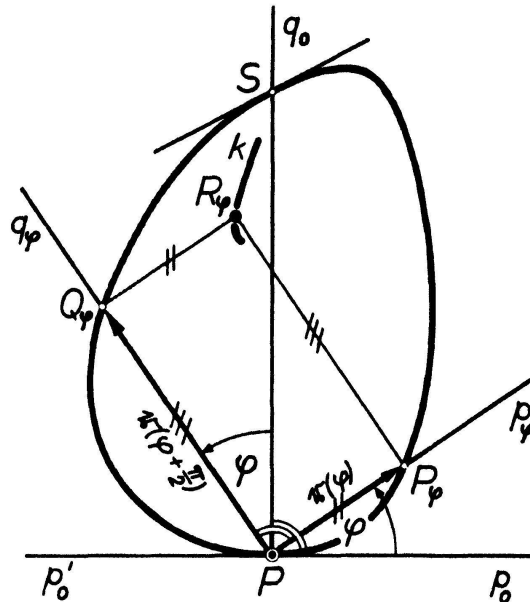
Einer Eilinie<sup>1)</sup> werde, ausgehend von einem festen Eilinenpunkt  $P$ , ein konvexer Sehnenzug mit (hinreichend kleinen) gleichlangen Sehnen  $s_1, s_2, \dots, s_{n-1}$  einbeschrieben, so dass er durch die Sehne  $s_n$ , die seinen Endpunkt mit  $P$  verbindet, zu einem konvexen Sehnenzug geschlossen wird (Figur 1). Ist dabei  $s_{n-1} \neq s_n$ , so lässt sich durch stetige Vergrößerung der gleichlangen Sehnen  $s_k$  ( $k = 1, \dots, n-1$ ) im Falle  $s_{n-1} < s_n$  bzw. Verkleinerung im Falle  $s_{n-1} > s_n$  zu jedem Eilinenpunkt  $P$  ein der Eilinie einbeschriebenes gleichseitiges  $n$ -Eck finden.

<sup>1)</sup> Eine Eilinie sei eine ebene, geschlossene, konvexe und stückweise stetig differenzierbare Kurve.

Die abgeschlossene Vereinigungsmenge aller einbeschriebenen gleichseitigen  $n$ -Ecke, die identisch ist mit dem von der Eilinie berandeten Eibereich, werde als «Ausfüllung» der Eilinie durch gleichseitige  $n$ -Ecke bezeichnet. Für  $n = 3$  erhält man eine Ausfüllung durch gleichseitige Dreiecke, für  $n = 4$  durch Rhomben<sup>2)</sup>. Es gilt also



Figur 1



Figur 2

**Satz 1:** Jede Eilinie kann durch einbeschriebene gleichseitige  $n$ -Ecke ausgefüllt werden.

Die Ausfüllung einer Eilinie durch gleichwinklige  $n$ -Ecke leistet für  $n = 3$  Satz 1, da jedes gleichseitige Dreieck gleichwinklig ist.

Durch graphische Gegenbeispiele überzeugt man sich sofort, dass im allgemeinen für  $n > 4$  keine Ausfüllung möglich ist. Es wird daher im folgenden die Ausfüllbarkeit durch gleichwinklige Vierecke, also Rechtecke studiert<sup>3)</sup>.

Jede Stützgerade  $p$  einer Eilinie wird in einem Stützpunkt  $P$  in zwei Halbstützgeraden  $p_0$  und  $p'_0$  geteilt (Figur 2). Die von  $P$  ins Eiliniennere weisende Halbnormale  $q_0$  schneidet die Eilinie noch in einem weiteren Punkt  $S$  und bildet mit der Halbstützgeraden  $p_0$  den rechten Winkel  $(p_0, q_0)$ <sup>4)</sup>. Dreht man  $(p_0, q_0)$  um seinen Scheitel  $P$  derart, dass in der durch den Drehwinkel  $\varphi = \pi/2$  festgelegten Endlage  $(p_{\pi/2}, q_{\pi/2})$  der Schenkel  $p_{\pi/2}$  auf die Halbnormale  $q_0$  fällt, so schneiden die Schenkel  $p_\varphi, q_\varphi$  die Eilinie in jeder Zwischenlage  $(p_\varphi, q_\varphi)$  ( $0 < \varphi < \pi/2$ ) in je einem weiteren von  $P$  verschiedenen Punkt und zwar  $p_\varphi$  in  $P_\varphi$  und  $q_\varphi$  in  $Q_\varphi$  (es ist also  $P_0 = Q_{\pi/2} = P$  und  $P_{\pi/2} = Q_0 = S$ ). Die Punkte  $P, P_\varphi$  und  $Q_\varphi$  lassen sich für  $0 < \varphi < \pi/2$  zu einem Rechteck  $PP_\varphi Q_\varphi R_\varphi$  ergänzen. Für die Ausgangslage  $(p_0, q_0)$  des rechten Winkels  $(p_\varphi, q_\varphi)$  entartet das Rechteck  $PP_\varphi Q_\varphi R_\varphi$  in die von der Eilinie aus der Halbnormalen  $q_0$  ausgeschnittene Strecke  $\overline{PS}$ ; dasselbe gilt für die Endlage  $(p_{\pi/2}, q_{\pi/2})$ . Ist die Rechtecksecke  $R_\varphi$  für alle  $\varphi$  ein fester Punkt, so fällt er mit  $S$  zusammen, und die Eilinie ist notwendig der Kreis über  $\overline{PS}$ . Wird dieser Sonderfall im folgenden ausgeschlossen, so durchlaufen die Punkte  $R_\varphi$  eine Ortskurve  $k$ , die aus Stetigkeitsgründen in  $S$  geschlossen ist.

<sup>2)</sup> Fordert man bei  $n = 4$  keine Gleichseitigkeit, sondern nur  $s_1 = s_4$  und  $s_2 = s_3$ , so erhält man eine Ausfüllung durch Drachen, bei der Forderung  $s_1 = s_3, s_2 = s_4$  eine Ausfüllung durch Parallelogramme.

<sup>3)</sup> Übrigens kann jeder Eilinie ein Quadrat einbeschrieben werden; vgl. I. M. JAGLOM und W. G. BOLZANSKI, *Konvexe Figuren* (Berlin 1956), S. 24.

<sup>4)</sup>  $P$  und  $S$  seien zunächst keine Ecken der Eilinie.

Die Eilinie sei durch ihre von  $P$  ausstrahlenden Ortsvektoren in der Form  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\varphi)$  ( $0 \leq \varphi \leq \pi$ ) gegeben, mit  $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}(\pi) = \mathbf{o}$ . Somit ist  $\mathbf{r}^* = \mathbf{r}(\varphi) + \mathbf{r}(\varphi + \pi/2)$  ( $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ ) eine Darstellung von  $k$ . Mit der Eilinie ist auch  $k$  stetig und in  $S$  stetig differenzierbar; ausserdem enthält  $k$  niemals den Punkt  $P$ . Die Ortskurve  $k$  schneidet die Eilinie sicher dann in  $S$ , wenn  $\dot{\mathbf{r}}(\pi/2)$ , der Tangentenvektor der Eilinie in  $S$ , und  $\dot{\mathbf{r}}(0) + \dot{\mathbf{r}}(\pi/2)$ , der Tangentenvektor der Ortskurve  $k$  in  $S$ , nicht parallel sind. Dies ist stets der Fall, wenn  $\dot{\mathbf{r}}(0)$  nicht parallel zu  $\dot{\mathbf{r}}(\pi/2)$  ist. Somit gilt: *Besitzt die Eilinie in  $P$  keine Doppelnormale, so durchsetzt die Ortskurve  $k$  der Rechtecksecken  $R_\varphi$  die Eilinie in  $S$ .*

Es sind nun zwei Fälle zu unterscheiden: 1.  $k$  schneidet die Eilinie in  $S$  nicht nur für  $\varphi = 0$  (bzw.  $\pi/2$ ), sondern überdies für mindestens ein  $\varphi_0 \neq 0$  (bzw.  $\pi/2$ ). Dann besitzt die Eilinie ein einbeschriebenes Rechteck mit den Ecken  $P, P_{\varphi_0}, Q_{\varphi_0}$  und  $R_{\varphi_0} = S$ . 2.  $k$  schneidet die Eilinie in  $S$  nur für  $\varphi = 0$  (bzw.  $\pi/2$ ). Da die Eilinie die Ebene nach dem Jordanschen Kurvensatz in ein inneres und ein äusseres Gebiet zerlegt, muss daher die stetige Kurve  $k$  die Eilinie in mindestens einem weiteren Punkt  $R_{\varphi_0} \neq S$  (und  $\neq P$ ) schneiden. Die Eilinie besitzt also auch in diesem Fall ein einbeschriebenes Rechteck mit den Ecken  $P, P_{\varphi_0}, Q_{\varphi_0}$  und  $R_{\varphi_0} \neq S$ .

Da die Ausfüllung einer Eilinie durch einbeschriebene Rechtecke unempfindlich ist gegen höchstens abzählbar viele Eiliniennpunkte  $P$ , die nicht Ecken eines einbeschriebenen Rechtecks sind, dies jedoch höchstens in solchen Eiliniennpunkten eintritt, in denen die Eilinie eine Doppelnormale besitzt und überdies bei nur stückweise stetig differenzierbaren Eiliniern höchstens endlich viele weitere Ausnahmepunkte  $P$  hinzukommen, so gilt

**Satz 2:** *Jede Eilinie mit höchstens abzählbar vielen Doppelnormalen kann durch einbeschriebene Rechtecke ausgefüllt werden.*

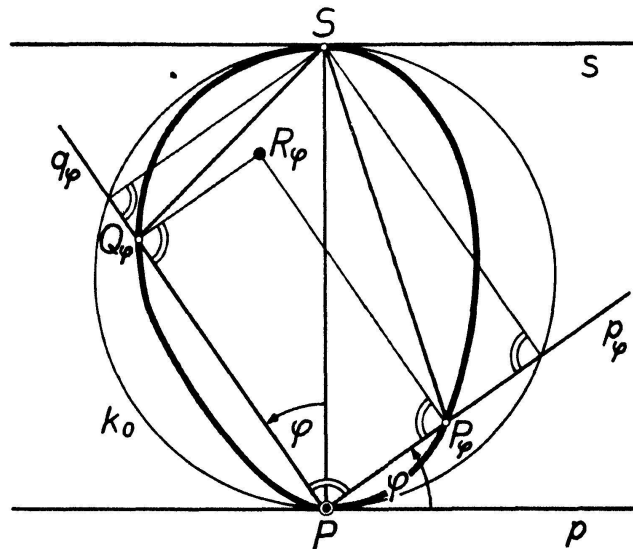
Ist  $\overline{PS}$  Doppelnormale, so berühren sich – wie man leicht nachrechnet – Eilinie und Ortskurve  $k$  in  $S$  und haben dort sogar gleiche Krümmung, wenn diese existiert. In diesem Fall lässt sich also nicht mit dem lokalen Verhalten der Eilinie in  $P$  und  $S$  entscheiden, ob sie ein einbeschriebenes Rechteck mit der Ecke  $P$  besitzt, jedoch lassen sich leicht zwei Klassen von Eiliniern angeben, denen kein Rechteck mit der Ecke  $P$  einbeschrieben ist:

**Satz 3:** *Verläuft eine Eilinie (mit Ausnahme von  $P$  und  $S$ ) ganz im Innern bzw. ganz im Äussern des Kreises  $k_0$  über  $\overline{PS}$ , so verläuft die zu  $P$  gehörende Ortskurve  $k$  (mit Ausnahme von  $S$ ) ganz im Innern bzw. ganz im Äussern der Eilinie; es gibt also kein der Eilinie einbeschriebenes Rechteck mit der Ecke  $P$ .*

Zum Nachweis verlaufe die Eilinie mit Ausnahme von  $P$  und  $S$  etwa ganz im Innern des Kreises  $k_0$  über  $\overline{PS}$  (Figur 3). Da die Schnittpunkte  $P_\varphi, Q_\varphi$  der Schenkel des rechten Winkels  $(\phi_\varphi, q_\varphi)$  mit der Eilinie für  $\varphi \neq 0$  (bzw.  $\pi/2$ ) im Innern des Kreises  $k_0$  liegen, ist das der Eilinie einbeschriebene, sicher konvexe Viereck  $PP_\varphi SQ_\varphi$  in  $P_\varphi$  und  $Q_\varphi$  stumpfwinklig und  $R_\varphi$  liegt daher als Schnittpunkt der Lote auf  $\overline{PP_\varphi}$  in  $P_\varphi$  und  $\overline{PQ_\varphi}$  in  $Q_\varphi$  im Innern der Eilinie. Damit liegt aber die ganze Ortskurve  $k$  mit Ausnahme von  $S$  im Innern der Eilinie. Analog schliesst man für den in Satz 3 genannten zweiten Fall.

Verläuft eine Eilinie mit der Doppelnormalen  $\overline{PS}$  weder ganz im Innern noch ganz im Äussern des Kreises  $k_0$ , so sind verschiedene Fälle möglich:

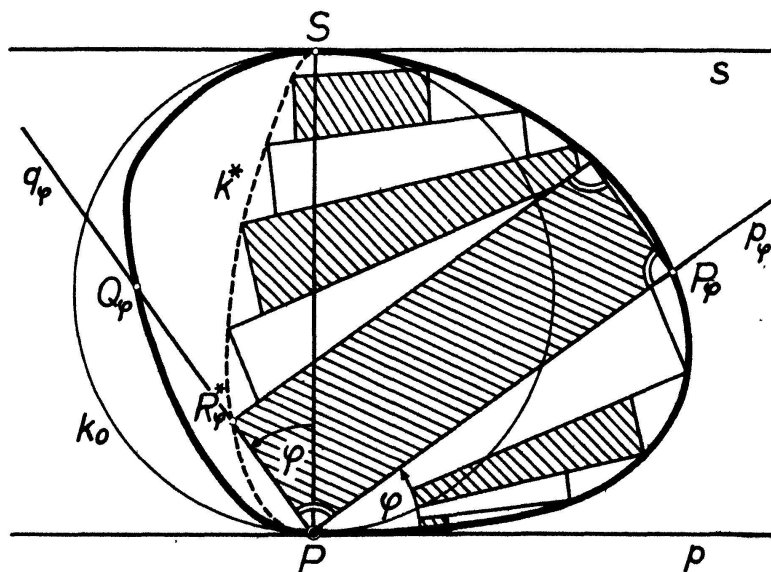
1. Gibt es mindestens ein der Eilinie eingeschriebenes Viereck  $PP_{\varphi_0}SQ_{\varphi_0}$  mit bei  $P_{\varphi_0}$  und  $Q_{\varphi_0}$  spitzen Winkeln und mindestens ein ihr eingeschriebenes Viereck  $PP_{\varphi_1}SQ_{\varphi_1}$  mit bei  $P_{\varphi_1}$  und  $Q_{\varphi_1}$  stumpfen Winkeln, so dass mindestens eine Rechtecksecke  $R_{\varphi_0}$  im Innern und mindestens eine Rechtecksecke  $R_{\varphi_1}$  im Äußern der Eilinie liegt, so gibt es aus Stetigkeitsgründen ein der Eilinie eingeschriebenes Rechteck für eine Drehlage  $\varphi_0 < \varphi < \varphi_1$ .



Figur 3

2. Ist eine Eiliniensehne  $\overline{P_\varphi Q_\varphi} \neq \overline{PS}$  zugleich Durchmesser von  $k_0$ , so ist  $PP_\varphi SQ_\varphi$  ein der Eilinie eingeschriebenes Rechteck.

3. Verläuft nur der eine Eiliniensbogen  $\widehat{PS}$  ausserhalb  $k_0$  und die allein durch diesen definierte Ortskurve  $k^*$  der Rechtecksecken  $R_\varphi^*$  ganz im Innern oder ganz im Äußern der Eilinie, so gibt es kein der Eilinie eingeschriebenes Rechteck mit der Ecke  $P$  (Figur 4).



Figur 4

Hat eine Eilinie überabzählbar viele Doppelnormalen, wie zum Beispiel eine Kurve konstanter Breite, und besitzt sie mindestens eine Symmetrieachse, so ist sie – wie man leicht einsieht – durch eingeschriebene Rechtecke ausfüllbar.

O. GIERING, Stuttgart