

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 16 (1961)
Heft: 4

Artikel: Über Aufsatzdreiecke
Autor: Geise, Gerhard
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-21287>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 02.05.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires — Rivista di matematica elementare

Zeitschrift zur Pflege der Mathematik

und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts

Organ für den Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrer

Publiziert mit Unterstützung des Schweizerischen Nationalfonds
zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung

El. Math.

Band XVI

Nr. 4

Seiten 73–96

Basel, 10. Juli 1961

Über Aufsatzdreiecke

Die Aufgabe 379 aus den *Elementen der Mathematik* (Bd. 15 [1960], S. 71)¹⁾ kann wie folgt verallgemeinert werden:

Die Punkte P_0, P_1, \dots, P_{k-1} ($k \geq 2$) seien Eckpunkte eines geschlossenen Polygons Π in der Ebene. $P_0 P_1 P'_0, P_1 P_2 P'_1, \dots, P_{k-1} P_0 P'_{k-1}$ mögen über den Seiten $P_0 P_1, P_1 P_2, \dots, P_{k-1} P_0$ errichtete Dreiecke sein, die alle zu einem gegebenen Dreieck $M_0 M_1 M$ gleichsinnig ähnlich seien (es sollen die Punkte P_r, P_{r+1}, P'_r ($r = 0, 1, \dots, k-1; P_k = P_0$) bez. entsprechen den Punkten M_0, M_1, M , die auch auf einer Geraden liegen dürfen; der Fall $M = M_0$ oder $M = M_1$ darf als uninteressant ausgeschlossen werden). Die Punkte $P'_0, P'_1, \dots, P'_{k-1}$ sind Eckpunkte eines neuen Polygons Π' . Durch Wiederholung des gleichen Konstruktionsverfahrens gelangt man von Π' zu einem Polygon Π'' usw. Nach s Schritten erhält man das Polygon $\Pi^{(s)}$ mit den Eckpunkten $P_0^{(s)}, P_1^{(s)}, \dots, P_{k-1}^{(s)}$. Was kann man über eine Konvergenz dieses Verfahrens aussagen?

Wir fassen die Ebene als Gaußsche Zahlenebene auf und beschreiben die Punkte P_r ($r = 0, 1, \dots, k-1$) durch gleichbezeichnete komplexe Zahlen. (Wenn nichts anderes verabredet wird, dann bedeuten grosse lateinische Buchstaben komplexe, kleine lateinische Buchstaben reelle Zahlen.) Als Punkte M_0 und M_1 wählen wir $M_0 = 0$ und $M_1 = 1$. Wird dann noch durch

$$M + N = 1 \quad (1)$$

die Zahl N eingeführt (nach Verabredung ist dann $M \cdot N \neq 0$), so überzeugt man sich sofort davon, dass gilt:

$$P_r^{(s+1)} = N \cdot P_r^{(s)} + M \cdot P_{r+1}^{(s)} \quad \left(\begin{array}{l} s = 0, 1, \dots; P_r^{(0)} = P_r; \\ r = 0, 1, \dots, k-1; P_k^{(s)} = P_0^{(s)} \end{array} \right) \quad (2)$$

und

$$\sum_{r=0}^{k-1} P_r^{(s)} = k \cdot S \quad (s = 0, 1, \dots), \quad (3)$$

¹⁾ Die Aufgabe 379 lautet: Die Punkte P_0, P_1, \dots, P_{k-1} ($k \geq 3$) seien Eckpunkte eines geschlossenen Polygons Π . Die Punkte $P'_0, P'_1, \dots, P'_{k-1}$ mögen die Seiten $P_0 P_1, P_1 P_2, \dots, P_{k-1} P_0$ von innen im Verhältnis $m:n$ teilen. Die Teilpunkte sind dann die Eckpunkte eines neuen Polygons Π' . Durch Wiederholung des gleichen Konstruktionsverfahrens gelangt man von Π' zu einem Polygon Π'' usw. Nach r Schritten erhält man das Polygon $\Pi^{(r)}$ mit den Eckpunkten $P_0^{(r)}, P_1^{(r)}, \dots, P_{k-1}^{(r)}$. Man zeige, dass die Punkte $P_i^{(r)}$ ($0 \leq i \leq k-1$) für $r \rightarrow \infty$ gegen den Schwerpunkt S von Π konvergieren.

wobei S den Schwerpunkt von Π angibt, den also alle Polygone $\Pi^{(s)}$ gemeinsam haben.

Ist jede Punktfolge $P_r^{(0)}, P_r^{(1)}, \dots$ ($r = 0, 1, \dots, k-1$) beschränkt, so soll von Konvergenz, ist wenigstens eine dieser Folgen nicht beschränkt, so soll von Divergenz des Verfahrens gesprochen werden.

Jetzt bilden wir für jedes s ($s = 0, 1, \dots$) aus den k Zahlen $P_0^{(s)}, P_1^{(s)}, \dots, P_{k-1}^{(s)}$ (in dieser Reihenfolge) einen Spaltenvektor $\mathfrak{p}^{(s)}$ und deuten $\mathfrak{p}^{(s)}$ als einen Punkt des komplexen euklidischen Raumes \mathfrak{R}_k der Dimension k . Mit Hilfe der (quadratischen) Matrix k -ter Ordnung²⁾

$$\mathfrak{Q} = \begin{vmatrix} N & M & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & N & M & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & M \\ M & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & N \end{vmatrix} \quad (4)$$

ergibt sich:

$$\mathfrak{p}^{(s+1)} = \mathfrak{Q} \cdot \mathfrak{p}^{(s)} \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}^{(s+1)} = \mathfrak{Q}^{s+1} \cdot \mathfrak{p} \quad (s = 0, 1, \dots). \quad (5)$$

Werden die k -ten Einheitswurzeln

$$\varepsilon_r = e^{\frac{2\pi i}{k} r} \quad (r = 0, 1, \dots, k-1) \quad (6)$$

eingeführt, so lassen sich die Eigenwerte L_0, L_1, \dots, L_{k-1} von \mathfrak{Q} in der folgenden Weise angeben³⁾:

$$L_r = N + M \cdot \varepsilon_r \quad (r = 0, 1, \dots, k-1). \quad (7)$$

Man überlegt sich sofort, dass die zu L_r gehörenden Eigenvektoren genau die Vektoren

$$\mathfrak{l}_r = C \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \varepsilon_r \\ \varepsilon_r^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \varepsilon_r^{k-1} \end{bmatrix} \quad (r = 0, 1, \dots, k-1) \quad (8)$$

²⁾ Matrizen dieser Bauart, wo jede Zeile aus der vorhergehenden durch zyklische Vertauschung der Zeilenelemente hervorgeht, werden manchmal zyklische Matrizen genannt. (R. ZURMÜHL nennt in seinem Buch *Matrizen*, Berlin 1950, S. 245, eine Matrix zyklisch, wenn eine endliche Potenz gleich der Einheitsmatrix ist.)

³⁾ Vergleiche z. B. G. KOWALEWSKI, *Einführung in die Determinantentheorie*, Leipzig 1909, S. 115ff., oder W. SCHMEIDLER, *Vorträge über Determinanten und Matrizen*, Berlin 1949, S. 28f.

sind, wo C jeweils alle komplexen Zahlen durchläuft. Nun lässt sich die Matrix \mathfrak{Q} in der folgenden Form angeben:

$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{B} \mathfrak{d} \mathfrak{B}^{-1}, \tag{9}$$

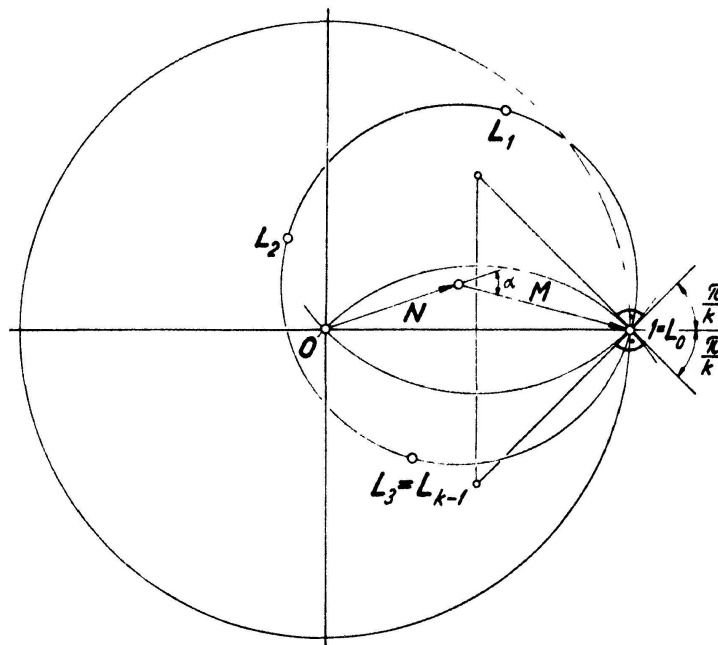
wenn gesetzt wird:

$$\mathfrak{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ 1 & \varepsilon_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \varepsilon_{k-1} \\ 1 & \varepsilon_1^2 & \cdot & \cdot & \cdot & \varepsilon_{k-1}^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \varepsilon_1^{k-1} & \cdot & \cdot & \cdot & \varepsilon_{k-1}^{k-1} \end{bmatrix} \tag{10}$$

$$\text{und } \mathfrak{d} = \begin{bmatrix} L_0 & & & & & \\ & L_1 & & & & \\ & & \cdot & & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & & \cdot & \\ & & & & & L_{k-1} \\ 0 & & & & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & L_1 & & & & \\ & & \cdot & & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & & \cdot & \\ & & & & & L_{k-1} \\ 0 & & & & & \end{bmatrix}$$

und statt (5) kann geschrieben werden:

$$p^{(s+1)} = \mathfrak{B} \mathfrak{d} \mathfrak{B}^{-1} \cdot p^{(s)} \quad \text{und} \quad p^{(s+1)} = \mathfrak{B} \mathfrak{d}^{s+1} \mathfrak{B}^{-1} \cdot p \quad (s = 0, 1, \dots). \tag{5'}$$



Figur 1
(Fall L_{k-1} für $k = 4$)

Es erhellt sich, dass Konvergenz oder Divergenz des Verfahrens nur von den Eigenwerten L_1, \dots, L_{k-1} der Matrix \mathfrak{Q} abhängt. Beachtet man, dass die Eigenwerte in der Gaußschen Zahlenebene auf einem Kreise um N durch 1 liegen, so ergeben sich die folgenden für eine Konvergenzuntersuchung wesentlichen Fälle (Fig. 1):

$$I_j. \quad (j = 0, \dots, k-1) : \\ |L_r| < 1 \text{ (bzw. } > 1) \text{ für } r = 1, \dots, j, \\ |L_r| > 1 \text{ (bzw. } < 1) \text{ für } r = j+1, \dots, k-1.$$

(Der Fall (I_{k-1}) enthält die erwähnte Aufgabe 379, bei der $M = \bar{M} = m$, $N = \bar{N} = n$, $m + n = 1$, $m \cdot n > 0$ zu setzen ist.)

$$II_j. \quad (j = 1, \dots, k-1) : \\ |L_r| < 1 \text{ (bzw. } > 1) \text{ für } r = 1, \dots, j-1, \\ |L_j| = 1, \\ |L_r| > 1 \text{ (bzw. } < 1) \text{ für } r = j+1, \dots, k-1.$$

Von diesen Fällen untersuchen wir nur die nicht eingeklammerten, da die in Klammern gesetzten Möglichkeiten mit einer ganz entsprechenden Behandlung zu erledigen sind. Notieren wir noch die Inverse der Matrix \mathfrak{B} , die im folgenden explizit benötigt wird:

$$\mathfrak{B}^{-1} = \frac{1}{k} \cdot \bar{\mathfrak{B}}. \quad (11)$$

Das Verfahren konvergiert nun offenbar genau dann, wenn (in allen Fällen (I) und (II)) jene Komponenten des Spaltenvektors $\mathfrak{B}^{-1} \cdot \mathfrak{p}$ verschwinden, die mit Potenzen von Eigenwerten multipliziert werden, deren Beträge grösser als 1 sind, also nur genau dann, wenn die P_0, P_1, \dots, P_{k-1} den folgenden Bedingungen genügen:

$$0 = \sum_{r=0}^{k-1} \varepsilon_r^{-t} \cdot P_r \quad (t = j+1, \dots, k-1). \quad (12)$$

Das sind $k - j - 1$ lineare Gleichungen, deren jede eine den Nullpunkt enthaltende Hyperebene des \mathfrak{R}_k darstellt und die zusammen einen linearen Unterraum \mathfrak{U}_{j+1} der Dimension $j+1$ in \mathfrak{R}_k definieren. Da sich die Punkte \mathfrak{p} von \mathfrak{U}_{j+1} in der Form

$$\mathfrak{p} = \sum_{r=0}^j C_r \cdot l_r \quad (13)$$

angeben lassen, wo die C_r alle komplexen Zahlen durchlaufen, kann man auch sagen: *Notwendig und hinreichend für die Konvergenz des Verfahrens ist, dass der Punkt \mathfrak{p} , der das Ausgangspolygon \mathfrak{II} angibt, eine Darstellung (13) besitzt.* – Ist $j = 0$ (Fall I_0), dann ist \mathfrak{U}_1 die Gerade $\mathfrak{p} = C_0 \cdot l_0$ durch den Nullpunkt. Das bedeutet in der Ebene, dass das Verfahren nur für die zu einem Punkt ausgearteten Polygone konvergiert. Ist $j = k - 1$ (zum Beispiel Fall (I_{k-1}) , der die Aufgabe 379 enthält), dann ist die Konvergenz für jeden Punkt von \mathfrak{R}_k , also für jedes Polygon der Ebene, gesichert.

Wir setzen jetzt voraus, dass für das Polygon P_0, \dots, P_{k-1} das Verfahren konvergiert und fragen, was in der Grenze erhalten wird. Da wir jetzt (in allen Fällen [I] und [II]) auf die Eigenwerte L_{j+1}, \dots, L_{k-1} keine Rücksicht zu nehmen brauchen, ersetzen wir die Diagonalmatrix \mathfrak{d} durch die folgende⁴⁾:

$$\mathfrak{d}^* = [1, L_1, \dots, L_j, *, \dots, *], \quad (13)$$

⁴⁾ Wir notieren künftig nur noch die Elemente der Hauptdiagonale.

wo die $*$ 0 oder 1 bedeuten mögen, und erhalten bei I_j :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \mathfrak{d}^{*r} = [1, 0, \dots, 0, *, \dots, *] = \mathfrak{d}_0, \quad (14)$$

während bei (II_j) in der Grenze eine Folge von Diagonalmatrizen

$$\mathfrak{d}_t = [1, 0, \dots, 0, \eta L_j^t, *, \dots, *] \quad (t = 1, 2, \dots) \quad (15)$$

zu setzen ist, wenn η eine «genügend hohe» Potenz von L_j bedeutet, die für einen Augenblick den nicht existierenden Grenzwert $\lim_{r \rightarrow \infty} L_j^r$ ersetzen mag. Es ist nun leicht einzusehen, dass im Falle I_j gilt:

$$\mathfrak{B} \mathfrak{d}_0 \mathfrak{B}^{-1} \mathfrak{p} = S \cdot l_0 \quad \text{mit} \quad S = \frac{1}{k} \sum_{r=0}^{k-1} P_r, \quad (16)$$

und das bedeutet in der Ebene, dass alle Folgen $P_r^{(0)}, P_r^{(1)}, \dots$ den Schwerpunkt S von Π als Grenzpunkt besitzen, und im Fall II_j :

$$\mathfrak{B} \mathfrak{d}_t \mathfrak{B}^{-1} \mathfrak{p} = S \cdot l_0 + L_j^t \cdot Q \cdot l_j \quad \text{mit} \quad Q = \eta \cdot \frac{1}{k} \cdot \sum_{r=0}^{k-1} \varepsilon_r^{-j} \cdot P_r \quad (t = 0, 1, \dots), \quad (17)$$

und das bedeutet in der Ebene: Ist $Q = 0$, liegt also \mathfrak{p} nicht nur in \mathfrak{U}_{j+1} , sondern sogar in \mathfrak{U}_j , dann streben wieder alle Folgen gegen den Schwerpunkt S von Π . Ist aber $Q \neq 0$ und k_0 die Ordnung von ε_j , so kann man sagen, dass die Polygone $\Pi^{(s)}$ gegen eine Folge regelmässiger k_0 -Ecke mit dem gemeinsamen Schwer- und Umkreismittelpunkt S und dem gleichen Umkreisradius $\varrho = |Q|$ streben.

Es soll noch eine Bedingung dafür aufgestellt werden, dass der Fall (I_{k-1}) vorliegt, dem die Aufgabe 379 angehört. Damit alle Eigenwerte L_1, \dots, L_{k-1} im Innern des Einheitskreises liegen, braucht nur

$$|L_1|^2 < 1 \quad \text{und} \quad |L_{k-1}|^2 < 1 \quad (18)$$

zu gelten. Beachtet man die Identität $1 = (M + N)(\bar{M} + \bar{N})$ und bezeichnet den Winkel, den die beiden «Vektoren» M und N miteinander einschliessen, mit α , so folgt aus (7) und (18) nach einfacher Rechnung:

$$|\alpha| < \frac{\pi}{k}. \quad (19)$$

Diese Bedingung lässt eine einfache geometrische Deutung zu (Abb. 1): Der Punkt N muss sich im Innern eines Kreisbogen-Zweiecks mit den Ecken O und 1 befinden, bei dem für jeden Kreisbogen der Umfangswinkel über der Sehne $\overline{O1}$ gleich $\pi(k-1)/k$ ist. Wenn also das Dreieck $O1M$ sozusagen nur «flach genug» ist, dann konvergiert das Verfahren für alle Polygone der Ebene und liefert in der Grenze den Schwerpunkt des Ausgangspolygons.

Zum Schluss behandeln wir eine Art Umkehrung der Aufgabe. Wird

$$|\mathfrak{Q}| = \prod_{r=1}^{k-1} L_r \neq 0$$

vorausgesetzt, so ergibt sich die bemerkenswerte Tatsache, dass durch das Polygon $\Pi^{(s)}$ nicht nur $\Pi^{(s+1)}$, sondern auch $\Pi^{(s-1)}$ eindeutig festgelegt ist. Betrachten wir

daher einmal statt der Polygonfolge $II^{(s)}$ ($s = 0, 1, \dots$) die Folge $II^{[s]}$ ($s = 0, 1, \dots$), die im Raum \mathfrak{R}_k durch

$$p^{[s+1]} = \mathfrak{Q}^{-1} \cdot p^{[s]} \quad \text{bzw.} \quad (20)$$

$$p^{[s+1]} = (\mathfrak{Q}^{-1})^{s+1} \cdot p = \mathfrak{B} \cdot \left[1, \frac{1}{L_1}, \dots, \frac{1}{L_{k-1}} \right]^{s+1} \cdot \mathfrak{B}^{-1} \cdot p \quad (s = 0, 1, \dots) \quad (20')$$

beschrieben wird. (Neue Aufgabe: Lässt sich die neue Polygonfolge auch konstruktiv herstellen?) Da die L_1, \dots, L_{k-1} eine der oben nicht eingeklammerten Bedingungen (I) oder (II) erfüllen, trifft jetzt der entsprechende eingeklammerte Fall zu. Wir erhalten: *Notwendig und hinreichend für die Konvergenz des neuen Verfahrens ist, dass der Punkt p , der das Ausgangspolygon II angibt, in den Fällen (I) eine Darstellung*

$$p = C_0 \cdot l_0 + \sum_{r=j+1}^{k-1} C_r \cdot l_r, \quad (21')$$

in den Fällen (II) eine Darstellung

$$p = C_0 \cdot l_0 + \sum_{r=j}^{k-1} C_r \cdot l_r \quad (21'')$$

besitzt. Ist bei (I) das eine Verfahren konvergent, so ist das andere sicher divergent, und bei (II) konvergieren beide Verfahren nur genau dann, wenn gilt:

$$p = C_0 \cdot l_0 + C_j \cdot l_j.$$

NB. Wie Herr Prof. Dr. R. BEREIS (Dresden) dem Verfasser mitteilte, hat für den Fall, dass $k = 3$ und das Dreieck M_0M_1M gleichseitig ist, Herr Prof. Dr. HEINRICH (Dresden) ähnliche Untersuchungen durchgeführt.

GERHARD GEISE, Dresden

Zusatz bei der Korrektur: Herr Prof. Dr. HEINRICH (Dresden) vermittelte freundlicherweise dem Verfasser einen Hinweis von Herrn Prof. Dr. WUNDERLICH (Wien), dem zu entnehmen ist, daß in der Arbeit von J. H. CADWELL, A property of linear cyclic transformations, Math. Gaz. 37, 85–89 (1953) (Referat: Zentralblatt 57, 117 (1954)) eine andere Verallgemeinerung der Aufgabe 379 für den Raum vorliegt.

Ausfüllung von Eilinen durch einbeschriebene gleichseitige und gleichwinklige n -Ecke

Einer Eilinie¹⁾ werde, ausgehend von einem festen Eilinenpunkt P , ein konvexer Sehnenzug mit (hinreichend kleinen) gleichlangen Sehnen s_1, s_2, \dots, s_{n-1} einbeschrieben, so dass er durch die Sehne s_n , die seinen Endpunkt mit P verbindet, zu einem konvexen Sehnenzug geschlossen wird (Figur 1). Ist dabei $s_{n-1} \neq s_n$, so lässt sich durch stetige Vergrößerung der gleichlangen Sehnen s_k ($k = 1, \dots, n-1$) im Falle $s_{n-1} < s_n$ bzw. Verkleinerung im Falle $s_{n-1} > s_n$ zu jedem Eilinenpunkt P ein der Eilinie einbeschriebenes gleichseitiges n -Eck finden.

¹⁾ Eine Eilinie sei eine ebene, geschlossene, konvexe und stückweise stetig differenzierbare Kurve.