

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 16 (1961)
Heft: 2

Rubrik: Aufgaben

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 23.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Aufgaben

Aufgabe 371. Sind a, b, c, d gerichtete Gerade (Speere) der euklidischen Ebene und sind $\widehat{ab}, \widehat{ac}, \widehat{ad}, \widehat{bc}, \widehat{bd}, \widehat{cd}$, von 0 und π verschiedene Winkel zwischen 0 und 2π , dann ist

$$\sin \widehat{ab} \cdot \sin \widehat{cd} + \sin \widehat{ad} \cdot \sin \widehat{bc} = \sin \widehat{ac} \cdot \sin \widehat{bd}.$$

R. LAUFFER, Graz

Lösung: Wir führen in der Ebene ein Vektorsystem mit orthonormierten kartesischen Koordinaten ein, wobei die Lage des Systems willkürlich gewählt werden kann. In diesem System sind dann den gegebenen Speeren $a = a_1, b = a_2, c = a_3, d = a_4$ in eindeutiger Weise die gleichgerichteten Einheitsvektoren $e_i = (x_i, y_i)$ mit $|e_i| = 1$ ($i = 1, 2, 3, 4$) zugeordnet. Für den positiv orientierten Winkel zwischen a_i und a_k gilt dann (Flächeninhalt des Parallelogramms!)

$$\sin \widehat{a_i a_k} = \sin (e_i, e_k) = x_i y_k - x_k y_i \quad (i, k = 1, 2, 3, 4).$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} \sin \widehat{ab} \cdot \sin \widehat{cd} + \sin \widehat{ad} \cdot \sin \widehat{bc} &= (x_1 y_2 - x_2 y_1) (x_3 y_4 - x_4 y_3) \\ &\quad + (x_1 y_4 - x_4 y_1) (x_2 y_3 - x_3 y_2) \\ &= -x_1 x_4 y_2 y_3 - x_2 x_3 y_1 y_4 + x_1 x_2 y_3 y_4 + x_3 x_4 y_1 y_2 \\ &= (x_1 y_3 - x_3 y_1) (x_2 y_4 - x_4 y_2) = \sin \widehat{ac} \cdot \sin \widehat{bd}, \quad \text{q. e. d.} \end{aligned}$$

O. REUTTER, Ochsenhausen

W. JÄNICHEN (Berlin) beweist eine allgemeinere Formel, in der die a_i vier im Raum gelegene Speere bedeuten. Jedes der drei Sinusprodukte in der Formel der Aufgabe muss dann mit dem Cosinus desjenigen Winkels multipliziert werden, den die durch die Winkel in den Sinusfaktoren bestimmten Ebenen bei passender Orientierung bilden.

Weitere Lösungen sandten B. BOLLOBÁS (Budapest), H. FRISCHKNECHT (Berneck), G. GEISE (Dresden), E. HERRMANN (Porz am Rhein), H. MEILI (Winterthur), I. PAASCHE (München), J. SCHOPP (Budapest), G. N. VLAHAVAS (London), C. VUILLE (La Sagne).

Aufgabe 372. Ein Tetraeder mit den Seitenflächen a_i und den zugehörigen Höhen h_i ($i = 1, 2, 3, 4$) habe den Inkugelradius ϱ und den Umkugelradius r . Der Mittelpunkt der Umkugel liege im Innern des Tetraeders. Man beweise folgende Ungleichung:

$$16 \varrho \leq 4 \prod_{i=1}^4 h_i^{1/4} \leq \sum_{i=1}^4 h_i \leq (4 + \sqrt{2}) r.$$

J. BERKES, Szeged

Lösung: Die Ungleichung der Aufgabe lässt sich hinsichtlich der Abschätzung nach oben wesentlich verschärfen. Sind H, G, A und Q harmonisches, geometrisches, arithmetisches und quadratisches Mittel der Höhen h_i , so gilt ohne Einschränkung für den Umkugelmittelpunkt des Tetraeders

$$4 \varrho = H \leq G \leq A \leq Q \leq \frac{4}{3} r,$$

wie an anderer Stelle¹⁾ gezeigt wurde.

¹⁾ F. LEUENBERGER, *Extremaleigenschaften der Summe der wichtigsten Ecktransversalen des n-dimensionalen Simplex*, El. Math. 15, 81–82 (1960).

Für die Abschätzung $A \leq 4r/3$ lässt sich im Andenken an den kürzlich verstorbenen Tetraederspezialisten V. THÉBAULT, der folgende direkte Beweis geben:

Die sechs Ebenen, welche man durch die Mitten der Tetraederkanten normal zu den Gegenkanten legen kann, schneiden sich bekanntlich im Punkte M von Monge. Aus der Relation²⁾

$$\sum \overline{MA}_i^2 = 4r^2$$

mit A_i als Tetraederecke folgert man wegen $A \leq Q$ etwa

$$\sum \overline{MA}_i \leq 4r, \quad (1)$$

mit Gleichheit nur, wenn M zugleich Umkugelmittelpunkt des Tetraeders ist. Ist H_i der Fusspunkt von h_i , B_i der Schnittpunkt der Höhenverlängerung mit der Umkugel, so gilt offenbar $(h_i + \overline{H_iB_i})/2 \leq r$. Ist M_i der Fusspunkt der Normalen von M auf die Gegenfläche von A_i , so gilt deshalb wegen $\overline{H_iB_i}/2 = \overline{MM_i}$ ³⁾ die Ungleichung $h_i/2 + \overline{MM_i} \leq r$, woraus

$$\frac{1}{2} \sum h_i + \sum \overline{MM_i} \leq 4r \quad (2)$$

folgt. Addition von (1) und (2) liefert

$$\frac{1}{2} \sum h_i + \sum (\overline{MA}_i + \overline{MM}_i) \leq 8r. \quad (3)$$

Ersichtlich ist aber $h_i \leq \overline{MA}_i + \overline{MM}_i$ und deshalb nach Summation dank (3)

$$\frac{3}{2} \sum h_i \leq 8r,$$

womit in der Tat die behauptete Relation gilt. Aus dem Beweisgang ergibt sich, dass Gleichheit nur für das reguläre Tetraeder vorhanden ist. F. LEUENBERGER, Zuoz

Weitere Lösungen mit Verschärfung sandten O. REUTTER (Ochsenhausen) und J. SCHOPP (Budapest).

Aufgabe 373. Ein Rhombus vom Umfang 4 besitze in orthonormierten kartesischen Koordinaten die Eckpunkte $(0, 0)$, (x, ξ) , (y, η) , (z, ζ) . Es sei φ der Rhombuswinkel im Ursprung und

$$A = \begin{pmatrix} x & y & z \\ \xi & \eta & \zeta \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} x & \xi \\ y & \eta \\ z & \zeta \end{pmatrix}.$$

Man zeige, dass die Eigenwerte von AA' nur von φ , nicht aber von der Lage des Rhombus abhängen. Für welche φ werden die Eigenwerte einander gleich? I. PAASCHE, München

Lösung: Für die Eigenwerte von AA' gilt die Gleichung

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 + z^2 - \lambda & x\xi + y\eta + z\zeta \\ x\xi + y\eta + z\zeta & \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Das heisst

$$\begin{aligned} \lambda^2 - (x^2 + \xi^2 + y^2 + \eta^2 + z^2 + \zeta^2)\lambda + (x^2 + y^2 + z^2) \cdot (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) - (x\xi + y\eta + z\zeta)^2 &= \\ = \lambda^2 - (x^2 + \xi^2 + y^2 + \eta^2 + z^2 + \zeta^2)\lambda + (x\eta - y\xi)^2 + (x\zeta - z\xi)^2 + (y\zeta - z\eta)^2 &= 0. \end{aligned}$$

²⁾ V. THÉBAULT, *Parmi les belles figures de la géométrie dans l'espace (Géométrie du tétraèdre)* Vuibert, Paris 1955, p. 97.

³⁾ A. a. O., p. 8.

Nach den Voraussetzungen gelten die folgenden Gleichungen:

$$x^2 + \xi^2 = z^2 + \zeta^2 = 1, \quad y^2 + \eta^2 = 4 \cos^2 \frac{\varphi}{2},$$

$$|x\eta - y\xi| = |x\zeta - z\xi| = |y\zeta - z\eta| = \sin \varphi.$$

Folglich ist

$$\lambda^2 - \left(2 + 4 \cos^2 \frac{\varphi}{2}\right) \lambda + 3 \sin^2 \varphi = 0.$$

Daraus folgt, dass die Eigenwerte nur von φ abhängen.

Die Eigenwerte sind einander gleich, wenn die Diskriminante der obigen Gleichung gleich Null ist; das heisst

$$\begin{aligned} 1 + 4 \cos^2 \frac{\varphi}{2} + 4 \cos^4 \frac{\varphi}{2} - 3 \sin^2 \varphi &= \\ = 1 + 4 \cos^2 \frac{\varphi}{2} + 4 \cos^4 \frac{\varphi}{2} - 12 \cos^2 \frac{\varphi}{2} + 12 \cos^4 \frac{\varphi}{2} &= \\ = 16 \cos^4 \frac{\varphi}{2} - 8 \cos^2 \frac{\varphi}{2} + 1 &= \left(4 \cos^2 \frac{\varphi}{2} - 1\right)^2 = 0. \end{aligned}$$

Also ist dann

$$\cos \frac{\varphi}{2} = \pm \frac{1}{2}$$

und

$$\varphi = \frac{2\pi}{3}.$$

B. BOLLOBÁS, Budapest

Weitere Lösungen sandten E. HERRMANN (Porz am Rhein), W. JÄNICHEN (Berlin), L. KIEFFER (Luxemburg), O. REUTTER (Ochsenhausen), R. STEUERWALD † (Alzing/Deutschland), H. VOGLER (Wien).

Aufgabe 374. Es bedeute $d(m)$ die Anzahl der Teiler der natürlichen Zahl m . Man beweise, dass, abgesehen von einigen wenigen Ausnahmen, $d(n!)$ ein Teiler von $n!$ ist. Welches sind die Ausnahmewerte für n ?

P. ERDÖS

Lösung: Alle lateinischen Buchstaben bedeuten nichtnegative ganze Zahlen und alle griechischen Buchstaben reelle Zahlen. p_1, p_2, \dots sei die Folge der Primzahlen. Bekanntlich ist

$$n! = \prod_{s=1}^{\infty} p_s^{a_s}, \quad a_s = \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{n}{p_s^m} \right],$$

wobei $[\alpha]$ die grösste ganze Zahl $\leq \alpha$ bedeutet. Die Anzahl der natürlichen Teiler von $n!$ ist dann

$$d(n!) = \prod_{s=1}^{\infty} (a_s + 1) = \prod_{s=1}^{\infty} p_s^{b_s},$$

und wir haben $b_s \leq a_s$ für jedes s zu zeigen. Ist r eine vorgegebene positive Zahl, so bedeute $N(r)$ die Anzahl der Primfaktoren von $n!$, für die $a_s = r$ ist. Man hat somit zu zeigen, dass

$$b_s = \sum_{i,k} N(k p_s^i - 1) \leq \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{n}{p_s^m} \right]$$

für jedes s gilt. Wir beweisen, dass allgemeiner

$$\sum_{k=1}^{\infty} N(k q - 1) \leq \left[\frac{n}{q} \right] \quad (1)$$

für jedes $q \geq 2$ und $n > n_0$ gilt. Alle N mit $k > n/q$ verschwinden in (1), denn aus

$$k q - 1 = \left[\frac{n}{q} \right] + \left[\frac{n}{p^2} \right] + \cdots < \frac{n}{p-1} \leq n$$

folgt $kq \leq n$. Wir werden also k nur von 1 bis $[n/q]$ laufen lassen.

Zum Beweise von (1) brauchen wir einige Hilfssätze:

I. Sind p_i und p_k zwei verschiedene Primzahlen, so folgt aus

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{n}{p_i^m} \right] = \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{n}{p_k^m} \right],$$

dass nur die ersten Glieder der Summen von Null verschieden sein können. Diese ersten Glieder müssen jedenfalls gleich sein, also $n/p_i = t + \vartheta_1$, $n/p_k = t + \vartheta_2$ ($0 \leq \vartheta_{1,2} < 1$). Ist nun $k > i$ und $t \geq p_i$, das heisst $[n/p_i^2] \neq 0$, so ergibt sich die unmögliche Beziehung

$$t(p_k - p_i) = \vartheta_1 p_i - \vartheta_2 p_k < p_i.$$

II. Für $n \geq 6$ enthalten die durch $n/(r+1) < \xi \leq n/r$ definierten Intervalle J_r , für kein r die Primzahlen 2 und 3. Sonst wäre nämlich $r > 0,5 n - 1$ und $r \leq n/3$, also $n < 6$.

III. Ist $n \geq 12$ und die Länge von J_r mindestens 2, dann ist $n/(r+1) \geq 4$. Man hat nur $r \geq 3$ zu betrachten, und dann folgt aus $n \geq 2r(r+1)$ $n \geq 3(r+1)^2/2$, somit $n/(r+1) \geq 3(r+1)/2 > 4$.

IV. Z_r bedeute die Anzahl der in J_r enthaltenen natürlichen Zahlen. Es ist stets $Z_r < n/r - n/(r+1) + 1$.

a) Ist die Intervalllänge mindestens 2 und $r \geq 3$, dann ist $Z_r < 2n/(r+1)^2$. Aus $n/r - n/(r+1) + 1 > 2n/(r+1)^2$ würde nämlich in Verbindung mit $n \geq 2r(r+1)$ folgen, dass $r < 3$.

b) Für $n \geq 12$ und $r = 2$ ist ersichtlich $Z_r < \frac{9}{8} \frac{2n}{(r+1)^2}$.

c) Für $n \geq 12$ und $r = 1$ ist ersichtlich $Z_r < \frac{7}{6} \frac{2n}{(r+1)^2}$.

Durch eine einfache Siebbetrachtung ergibt sich, dass unter m ($m \geq 2$) aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen, unter denen 2 und 3 nicht vorkommen, sich höchstens $2m/3$ Primzahlen befinden. Unter m ($m \geq 15$) konsekutiven natürlichen Zahlen befinden sich höchstens $2m/5$ Primzahlen. Mit P_r bezeichnen wir nun die Anzahl der Primzahlen in J_r .

V. Ist $n \geq 12$ und die Intervalllänge mindestens 2, dann ist $P_r \leq n/2(r+1)$.

Beweis: J_r enthält nach Voraussetzung mehr als eine natürliche Zahl, unter denen wegen (III) 2 und 3 nicht vorkommen.

a) $r \geq 3$. Nach (IVa) erhält man $P_r \leq 2Z_r/3 < 4n/3(r+1)^2 < n/2(r+1)$.

b) $r = 2$. Nach (IVb) erhält man $P_r \leq 2Z_r/3 < 3n/2(r+1)^2 \leq n/2(r+1)$.

c) $r = 1$. Für $n \geq 30$ ist $P_1 \leq 2Z_1/5$. Von $n = 12$ bis $n = 29$ gilt $P_1 \leq 3Z_1/7$.

Nach (IVc) gilt somit auch hier $P_r \leq 3Z_1/7 < n/2(r+1)$.

VI. Ist $n \geq 6$ und die Intervalllänge kleiner als 2, dann ist $P_r \leq 1$, denn es ist $Z_r \leq 2$ und J_r enthält wegen (II) die Zahlen 2 und 3 nicht beide.

VII. Ist $\alpha > 2$ so ist die Anzahl der Primzahlen p , für die $p-1 \leq \alpha$ ist, höchstens $3\alpha/4$. Beweis: Für $\alpha \geq 14$ übertrifft die Anzahl der zusammengesetzten Zahlen die Anzahl der Primzahlen $\leq \alpha$ um mehr als 1. Daher ist die fragliche Anzahl für $\alpha \geq 14$ sogar $\leq \alpha/2$. Für $2 < \alpha < 14$ sieht man die Richtigkeit sofort ein.

Wir zeigen nun zuerst, dass $N_r \leq \text{Max}(1, P_r)$. Ist $N_r \neq 0$ und auch das Glied $[n/p^2]$ im Ausdruck für $a_s = r$ von Null verschieden, so ist nach (I) $N_r = 1$. Ist aber allein $[n/p]$ ungleich Null, also $[n/p] = r$, so ist $n/(r+1) < p \leq n/r$, das heisst $N_r \leq P_r$.

Wir beweisen jetzt

$$\sum_{k=1}^{\lfloor n/q \rfloor} N(kq-1) \leq \left[\frac{n}{q} \right] \quad n \geq 12, \quad q \geq 2. \quad (2)$$

a) $n/(q-1) - n/q \geq 2$. Wegen (III) und (V) ist jetzt

$$N(q-1) \leq \text{Max}(1, P_{q-1}) \leq n/2q.$$

Also ergibt sich

$$\sum N(kq-1) \leq \frac{u}{2q} + R,$$

wo R die Anzahl der p sei, für die $r \geq 2q-1$ ist. R ist nicht grösser als die Anzahl der Primzahlen, die der Ungleichung $n/(p-1) \geq 2q-1$ oder $p-1 \leq n/(2q-1)$ genügen. Nach (III) gilt $n/(2q-1) > 2$, also ist nach (VII) $R \leq 3n/(8q-4) \leq n/2q$. Somit ist (2) in diesem Fall bewiesen.

b) $n/(q-1) - n/q < 2$. Jetzt ist für jedes k die Ungleichung $n/(kq-1) - n/kq < 2$ richtig und nach (VI) ist $P_{kq-1} \leq 1$ und somit $N(kq-1) \leq 1$. Also gilt (2) auch hier.

Es bleibt noch die Untersuchung der Zahlen $n < 12$ übrig. Man findet, dass für $n = 3$ und $n = 5$ die Behauptung nicht gilt. J. FIEDLER, Regensburg

Neue Aufgaben

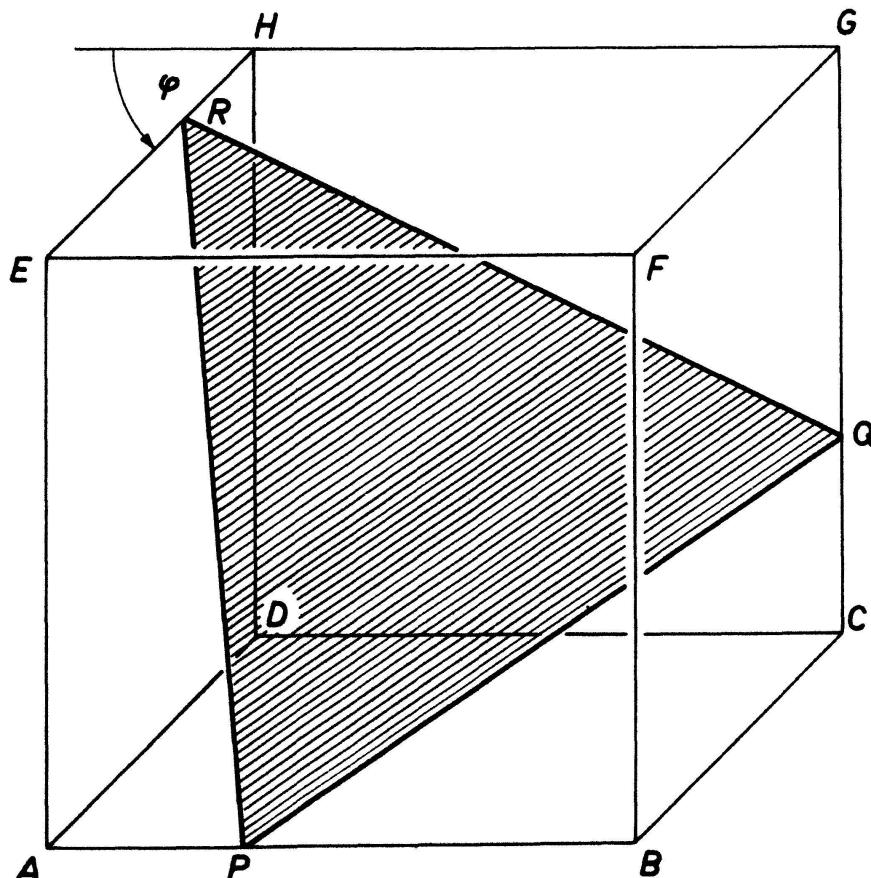
399. Find the general polynomial solution of

$$\{\Phi((x+y)^2) - \Phi(x^2) - \Phi(y^2)\}^2 \equiv 4\Phi(x^2)\Phi(y^2) \pmod{p},$$

where p is a prime > 2 . L. CARLITZ, Duke University, Durham, N. C. USA

400. Auf den drei zueinander windschiefen Kanten AB, CG, HE eines Würfels wird je ein Punkt derart angenommen, dass die drei Teilverhältnisse

$$(AB \cdot P) = (CG \cdot Q) = (HE \cdot R)$$



Figur 1

gleich gross sind. Die Punkte P, Q, R bilden sodann bekanntlich ein gleichseitiges Dreieck. Zeichnet man von dieser Konfiguration einen Schrägriss mit dem Verzerrungswinkel $\varphi = 45^\circ$ und dem Verkürzungsverhältnis $\lambda = 1/2$, so bilden die Schrägbilder P^s, Q^s, R^s , wenn man den Würfel in einfachste Lage zur Bildebene bringt, ein Dreieck, das sich nur wenig von einem gleichseitigen unterscheidet. Wie müssen φ und λ gewählt werden, damit der Schrägriss des Dreiecks P, Q, R tatsächlich ein gleichseitiges Dreieck wird? (vgl. Fig. 1). R. BEREIS, Dresden

401. Aus drei gegebenen, sich gegenseitig schneidenden Kugeln sollen durch eine Ebene drei sich gegenseitig berührende Kreise herausgeschnitten werden.

C. BINDSCHEDLER, Küsnacht

402. Es ist

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{\theta_n(x) x^n}{n}, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

wobei $0 < \theta_n(x) < 1$. Man beweise, dass bei festem x die Folge $\theta_1(x), \theta_2(x), \theta_3(x), \dots$ monoton fallend ist.

W. JÄNICHEN, Berlin

Aufgaben für die Schule

Es wird kein Anspruch auf Originalität der Aufgaben erhoben; Autoren und Quellen werden im allgemeinen nicht genannt. Die Daten für Aufgaben aus der Darstellenden Geometrie sind durchweg so festgelegt, dass der Ursprung des Koordinatensystems in der Mitte des linken Randes eines Blattes vom Format A4 gewählt werden soll, x -Achse nach rechts, y -Achse nach vorn, z -Achse nach oben, Einheit 1 cm. Anregungen und Beiträge sind zu senden an Prof. Dr. WILLI LÜSSY, Bülrainstrasse 51, Winterthur.

1. Ein Kreis hat den Mittelpunkt M und einen Durchmesser $AB = 2r$. Auf der Verlängerung des Durchmessers wird $MZ = u$ gewählt und durch Z eine Sekante gezogen, die den Kreis in C_1 und C_2 schneidet. Es ist

$$\tg \frac{1}{2} \not\propto ZMC_1 \cdot \tg \frac{1}{2} \not\propto ZMC_2$$

konstant für jede Lage der Sekante durch Z .

► Die Konstante hat den Wert $(u-r)/(u+r)$.

2. Verhalten sich die Seiten eines Dreiecks wie $6:5:4$, so ist $\alpha = 2\gamma$.

3. Gilt in einem Dreieck

$$b = 4c \cos\left(30^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(30^\circ - \frac{\alpha}{2}\right),$$

so ist auch

$$\alpha = 2\gamma \quad \text{und} \quad a^2 = c(b+c).$$

4. Gilt in einem Dreieck

$$3b = a + c,$$

so ist auch

$$\ctg \frac{\alpha}{2} + \ctg \frac{\gamma}{2} = \ctg \frac{\beta}{2},$$

$$\ctg \frac{\alpha}{2} \cdot \ctg \frac{\gamma}{2} = 2,$$

$$3(1 + \cos \alpha \cos \gamma) = 5(\cos \alpha + \cos \gamma),$$

$$\varrho_b = 2\varrho,$$

$$\frac{1}{\varrho_b} = \frac{1}{\varrho_a} + \frac{1}{\varrho_c}.$$

5. Die Mittellinien eines Dreiecks bilden mit den von ihnen halbierten Seiten im gleichen Sinne die Winkel u, v und w . Es ist

$$\ctg u + \ctg v + \ctg w = 0.$$