

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 16 (1961)  
**Heft:** 1

**Rubrik:** Aufgaben

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 11.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Aus (9) und (10) folgt

**Satz 4.** Das Produkt des arithmetischen Mittels der  $(n - 1)$ -dimensionalen Hypervolumina der Grenzsimplexe und des harmonischen Mittels der Simplexhöhen ist gleich dem Produkt des arithmetischen Mittels der Simplexhöhen und des harmonischen Mittels der  $(n - 1)$ -dimensionalen Hypervolumina der Grenzsimplexe und gleich dem  $n$ -fachen Hypervolumen des Simplex.

Aus Satz 4 lassen sich weitere Beziehungen ableiten, zum Beispiel:

$$H(h_i) : A(h_i) = H(V_i) : A(V_i), \quad (11)$$

oder mit Hilfe der infolge (8) trivialen Gleichung  $G(V_i) G(h_i) = n V$ :

$$H(h_i) : G(h_i) = G(V_i) : A(V_i), \quad (12)$$

$$H(V_i) : G(V_i) = G(h_i) : A(h_i). \quad (13)$$

J. SCHOPP (Budapest)

#### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] F. LEUENBERGER, *Einige Dreiecksungleichungen*, El. Math. 13, 121–126 (1958).
- [2] J. BERKES, *Bemerkungen zur Arbeit von F. LEUENBERGER über «Einige Dreiecksungleichungen»*, El. Math. 14, 62–63 (1959).
- [3] Aufgabe Nr. 372. El. Math. 15, 17 (1960).
- [4] Aufgabe Nr. 360. El. Math. 14, 89 (1959).
- [5] COXETER, *Regular Polytopes* (London 1948), S. 158.
- [6] COXETER, *Regular Polytopes* (London 1948), S. 123.

*Bemerkung der Redaktion:* Die Sätze 1 und 2 der vorstehenden Abhandlung sind in der Mitteilung von Herrn F. LEUENBERGER, El. Math. 15, 81–82, enthalten. Da Herr Schopp sein Manuskript am 23. Juni 1960 einsandte und die Beweise unterschiedlich sind, haben wir sie hier publiziert.

## Aufgaben

**Aufgabe 367.** Es sei  $O$  ein beliebiger Punkt im Innern eines Tetraeders  $A_1 A_2 A_3 A_4$ . Bedeutet  $R_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) den Abstand  $\overline{OA_i}$ ,  $r_i$  den Abstand der Seitenfläche

$$A_{i+1} A_{i+2} A_{i+3}$$

von  $O$ , so gelten die Ungleichungen

$$\sum_{i=1}^4 \frac{R_i}{3 \cdot 2^n r_i + (4 - 2^n) R_i} \geq 1 \quad (n = 0, 1, 2).$$

Gleichheit gilt für  $n = 0$  nur, falls  $O$  der Höhenschnittpunkt eines orthozentrischen Tetraeders ist, im Fall  $n = 1, 2$  nur für den Mittelpunkt  $O$  eines regulären Tetraeders.

Man beweise diese Ungleichungen.

Ist  $O$  analog innerer Punkt eines Dreiecks  $A_1 A_2 A_3$ ,  $R_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) der Abstand  $\overline{OA_i}$ ,  $r_i$  der Abstand der Seite  $A_{i+1} A_{i+2}$  von  $O$ , so gilt ein entsprechendes Ungleichungssystem. Wie heisst es<sup>1)</sup>?

F. LEUENBERGER, Zuoz

*Lösung:* Diese Aussage über das Tetraeder sowie die entsprechende für das Dreieck ergeben sich als Sonderfälle des folgenden allgemeineren Satzes:  $A_1, A_2, \dots, A_{n+1}$  seien die Eckpunkte eines  $n$ -dimensionalen Simplex,  $X$  sei ein beliebiger innerer Punkt. Die Ecktransversale  $A_i X$  schneide das durch die Punkte  $A_1, \dots, A_{i-1}, A_{i+1}, \dots, A_{n+1}$  aufgespannte  $(n - 1)$ -dimensionale Simplex im Punkt  $Y_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n + 1$ ). Wird  $\overline{A_i X} = R_i$ ,  $\overline{XY_i} = s_i$  gesetzt und bedeutet  $r_i$  den Abstand des Punktes  $X$  vom Teilsimplex  $A_1, \dots, A_{i-1}, A_{i+1}, \dots, A_{n+1}$ , dann gilt

<sup>1)</sup> Vgl. dazu J. BERKES, *Einfacher Beweis und Verallgemeinerung einer Dreiecksungleichung*, El. Math. 12, 121–123 (1957).

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{R_i}{x R_i + r_i} \geq \sum_{i=1}^{n+1} \frac{R_i}{x R_i + s_i} \geq \frac{n+1}{x + \frac{1}{n}} \quad \text{für } 0 \leq x \leq 1.$$

Für  $0 \leq x < 1$  besteht Gleichheit genau dann, wenn das Simplex regulär und  $X$  der Mittelpunkt ist. Für  $x = 1$  besteht Gleichheit genau dann, wenn das Simplex orthozentrisch und  $X$  das Orthozentrum ist.

Die drei in der Aufgabe angegebenen Ungleichungen über das Tetraeder ergeben sich aus dem obigen Satz für  $n = 3$  und  $x = 1$  bzw.  $x = 1/3$  bzw.  $x = 0$ . Für  $x = 1/3$  und  $x = 0$  besteht Gleichheit nur dann, wenn  $X$  der Mittelpunkt eines regulären Tetraeders ist. Für  $x = 1$  tritt Gleichheit genau dann ein, wenn das Tetraeder orthozentrisch und  $X$  der Höhenschnittpunkt ist. Liegt ein Dreieck vor ( $n = 2$ ), dann gilt

$$\sum_{i=1}^3 \frac{R_i}{x R_i + r_i} \geq \sum_{i=1}^3 \frac{R_i}{x R_i + s_i} \geq \frac{3}{x + \frac{1}{2}} \quad \text{für } 0 \leq x \leq 1.$$

Für  $0 \leq x < 1$  besteht Gleichheit nur dann, wenn  $X$  der Mittelpunkt eines gleichseitigen Dreiecks ist. Für  $x = 1$  trifft dies zu, wenn  $X$  der Höhenschnittpunkt eines beliebigen spitzwinkligen Dreiecks ist (jedes Dreieck ist orthozentrisch).

*Beweis des Satzes: a)* Zunächst zeigen wir, dass

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{R_i}{R_i + s_i} = n$$

für jeden inneren Punkt  $X$  eines beliebigen Simplex  $A_1, A_2, \dots, A_{n+1}$  gilt. In einem Ortsvektorensystem mit beliebigem Bezugspunkt seien  $\mathbf{a}_i, \mathbf{x}, \mathbf{y}_i$  die Ortsvektoren der Punkte  $A_i, X, Y_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n+1$ ). Da  $X$  ein innerer Punkt des Simplex ist, gilt die Darstellung

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \mathbf{a}_i, \quad \text{wo } 0 < \lambda_i < 1 \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1.$$

Dann ist für  $i = 1, 2, \dots, n+1$

$$\mathbf{y}_i = \frac{1}{1 - \lambda_i} \sum_{k \neq i} \lambda_k \mathbf{a}_k,$$

also

$$(1 - \lambda_i) \mathbf{y}_i = \sum_{k \neq i} \lambda_k \mathbf{a}_k = \mathbf{x} - \lambda_i \mathbf{a}_i$$

und damit

$$\begin{aligned} \mathbf{x} - \mathbf{a}_i &= \mathbf{x} - \lambda_i \mathbf{a}_i - (1 - \lambda_i) \mathbf{a}_i \\ &= (1 - \lambda_i) (\mathbf{y}_i - \mathbf{a}_i) = (1 - \lambda_i) \{(\mathbf{y}_i - \mathbf{x}) + (\mathbf{x} - \mathbf{a}_i)\}. \end{aligned}$$

Da die Vektoren  $\mathbf{y}_i - \mathbf{x}$  und  $\mathbf{x} - \mathbf{a}_i$  gleichgerichtet sind, folgt

$$| \mathbf{x} - \mathbf{a}_i | = (1 - \lambda_i) \{ | \mathbf{y}_i - \mathbf{x} | + | \mathbf{x} - \mathbf{a}_i | \},$$

das heisst

$$R_i = (1 - \lambda_i) \{ s_i + R_i \}.$$

Demnach ist

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{R_i}{R_i + s_i} = \sum_{i=1}^{n+1} (1 - \lambda_i) = n + 1 - \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = n,$$

was zu beweisen war.

*b)* Nun weisen wir nach, dass für  $0 \leq x \leq 1$  die Ungleichung

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{R_i}{x R_i + s_i} \geq \frac{n+1}{x + \frac{1}{n}}$$

gilt und dass Gleichheit für  $0 \leq x < 1$  nur dann besteht, wenn  $s_i/R_i = 1/n$  für alle  $i$ , das heisst, wenn  $X$  der Mittelpunkt eines regulären Simplex ist (für  $x = 1$  besteht nach a) in jedem Falle Gleichheit). Wir betrachten die beiden Funktionen

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{R_i}{x R_i + s_i} \quad \text{und} \quad g(x) = \frac{n+1}{x + \frac{1}{n}}.$$

$f(x)$  und  $g(x)$  sind im Intervall  $0 \leq x \leq 1$  positiv und monoton fallend und es ist  $f(1) = g(1) = n$ . Die Ableitungen sind

$$f'(x) = - \sum_{i=1}^{n+1} \frac{R_i^2}{(x R_i + s_i)^2} \quad \text{und} \quad g'(x) = - \frac{g^2(x)}{n+1}.$$

Wegen

$$f^2(x) = \left( \sum_{i=1}^{n+1} \frac{R_i}{x R_i + s_i} \right)^2 \leq (n+1) \sum_{i=1}^{n+1} \frac{R_i^2}{(x R_i + s_i)^2} \quad (1)$$

ist  $f'(x) \leq -f^2(x)/(n+1)$ , also

$$f'(x) - g'(x) \leq -\frac{1}{n+1} \{f^2(x) - g^2(x)\} = -\frac{f(x) + g(x)}{n+1} \{f(x) - g(x)\}. \quad (2)$$

Weil

$$\frac{f(x) + g(x)}{n+1}$$

in  $0 \leq x \leq 1$  positiv ist, folgt<sup>2)</sup> für  $0 \leq x \leq 1$   $f(x) - g(x) \geq f(1) - g(1) = 0$ , das heisst

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{R_i}{x R_i + s_i} \geq \frac{n+1}{x + \frac{1}{n}}. \quad (3)$$

In (3) besteht für jedes  $x$  in  $0 \leq x \leq 1$  genau dann Gleichheit, wenn dies in (2) und damit in (1) zutrifft, wenn also (bei festem  $x$  in  $0 \leq x < 1$ )  $R_i/(x R_i + s_i)$  konstant ist für  $i = 1, 2, \dots, n+1$ . Nach (3) ist dies nur dann der Fall, wenn für alle  $i$  simultan gilt

$$\frac{R_i}{x R_i + s_i} = \frac{1}{x + \frac{1}{n}}, \quad \text{also} \quad \frac{s_i}{R_i} = \frac{1}{n},$$

was zu beweisen war.

c) Aus a) und b) folgt schliesslich die im Satz ausgesprochene Behauptung. Für ein beliebiges Simplex gilt nämlich

$$r_i \leq s_i \quad (i = 1, 2, \dots, n+1), \quad (4)$$

und simultane Gleichheit besteht genau dann, wenn das Simplex orthozentrisch und  $X$  das Orthozentrum ist. (3) und (4) liefert die für  $0 \leq x \leq 1$  gültige Doppelungleichung

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{R_i}{x R_i + r_i} \geq \sum_{i=1}^{n+1} \frac{R_i}{x R_i + s_i} \geq \frac{n+1}{x + \frac{1}{n}}.$$

Hier tritt nach (3) und (4) für  $0 \leq x < 1$  nur dann Gleichheit ein, wenn  $X$  der Mittelpunkt eines regulären Simplex ist. Dagegen besteht für  $x = 1$  nach a) und (4) genau dann Gleichheit, wenn  $X$  das Orthozentrum eines orthozentrischen Simplex ist.

O. REUTTER, Ochsenhausen (Deutschland)

Der Aufgabensteller hat nachträglich seine Formeln auch auf den  $R_n$  verallgemeinert, wobei 3 und 4 durch  $n$  und  $n+1$  zu ersetzen sind, während der Exponent  $n$  hier die Werte  $0, 1, \dots, k$  mit  $[(n+1)/2^k] = 1$  annimmt. Die oben unter a) bewiesene Formel gewinnt er durch eine Inhaltsbetrachtung in folgender Weise:

<sup>2)</sup> Die Ableitung von  $\ln \{f(x) - g(x)\}$  ist in  $0 \leq x \leq 1$  negativ! (Red.)

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{R_i}{R_i + s_i} = \sum_{i=1}^{n+1} \left(1 - \frac{s_i}{R_i + s_i}\right) = n + 1 - \sum_{i=1}^{n+1} \frac{V_i}{V} = n.$$

Hier ist  $V$  das Volumen des durch  $A_1, A_2, \dots, A_{n+1}$  bestimmten Simplex und  $V_i$  das Volumen des Simplex, in dem  $A_i$  durch  $Y_i$  ersetzt ist.

**Aufgabe 368.** Es sei  $f(x)$  im endlichen Intervall  $a \leq x \leq b$  positiv und beschränkt. Man beweise, dass es in diesem Intervall zwei Zahlen  $x_1$  und  $x_2$  gibt, für die

$$\frac{(x_2 - x_1) f^2(x_1)}{f(x_2)} > \frac{1}{4} (b - a) f(a)$$

gilt.

O. REUTTER, Ochsenhausen (Deutschland)

*Lösung:* Wäre die Behauptung nicht richtig, so würde für jedes Wertepaar

$$x_1, x_2 (a \leq x_1 \leq b, a \leq x_2 \leq b)$$

$$\frac{(x_2 - x_1) f^2(x_1)}{f(x_2)} \leq \frac{1}{4} (b - a) f(a)$$

gelten, also

$$f(x_2) \geq \frac{4 (x_2 - x_1) f^2(x_1)}{(b - a) f(a)}. \quad (1)$$

Betrachten wir die durch

$$c_1 = \frac{a + b}{2}, \quad c_k = c_{k-1} + \frac{b - a}{2^k} (k > 1)$$

definierte Folge. Es sei nun  $x_1 = a, x_2 = c_1$ ; für diese Werte folgt aus (1), dass

$$f(c_1) \geq \frac{4 (c_1 - a) f^2(a)}{(b - a) f(a)} = 2 f(a).$$

Wir wenden vollständige Induktion nach  $k$  an und wir nehmen an, dass

$$f(c_k) \geq 2^k f(a) \quad (2)$$

gilt.

Nach (1) und (2) ergibt sich nun für jedes  $k$

$$f(c_{k+1}) \geq \frac{4 (c_{k+1} - c_k) f^2(c_k)}{(b - a) f(a)} \geq \frac{(b - a) 2^{1-k} \cdot 2^{2k} f^2(a)}{(b - a) f(a)} = 2^{k+1} f(a).$$

Das ist aber unmöglich, weil  $f(x)$  beschränkt ist, womit die Behauptung bewiesen ist.

BELA BOLLOBÁS, Budapest

Weitere Lösungen sandten J. FIEDLER (Regensburg) und W. JÄNICHEN (Berlin).

**Aufgabe 369.** Es gibt Quadratzahlen, bei denen in dekadischer Schreibweise auf die Einer eine Anzahl gleicher Ziffern folgen, zum Beispiel  $3333^2 = 11108889$ . Wie muss man die ersten beiden Ziffern wählen (im Beispiel 9 und 8), damit die Übereinstimmung der Ziffern von der zweiten bis zur  $k$ -ten Stelle für beliebiges  $k$  durch Quadratzahlen realisierbar ist?

R. WAGNER, Karlsruhe

*Lösung des Aufgabenstellers:* Es sind zwei Ziffern  $s$  und  $t$  so zu bestimmen, dass die quadratische Kongruenz

$$x^2 \equiv s + t (10 + \dots + 10^k) \pmod{10^{k+1}} \quad (1)$$

oder – gleichbedeutend damit –

$$y^2 = (3x)^2 \equiv 9s - 10t \pmod{10^{k+1}}$$

für alle  $k$  lösbar wird.

Zunächst muss  $s$  mod. 5 quadratischer Rest sein:  $s = 0, 1, 4, 5, 6, 9$ .

Aus  $s = 0$  folgt natürlich  $t = 0$ .

Für  $s = 5$  betrachte man  $9s - 10t = 45 - 10t \pmod{5^2}$  und  $\pmod{2^3}$ . Es folgt  $t \equiv 2$  mod. 5 und  $t \equiv 2$  mod. 4, also  $t = 2$ .

Für  $s = 4$  betrachte man  $9s - 10t = 36 - 10t \pmod{2^5}$ . Man erhält  $t = 2t'$  und  $t' \equiv 0, 1, 5 \pmod{2^3}$ , also  $t = 0, 2$ .

Für  $s = 6$  betrachte man  $9s - 10t = 54 - 10t \pmod{2^6}$ . Man erhält  $t = 2t' - 1$  und  $-5t'$  muss quadratischer Rest mod.  $2^4$  sein:  $t = 5$ .

Für  $s = 1,9$  muss  $1 - 2t \pmod{2^3}$  quadratischer Rest sein:  $t = 0, 4, 8$ . Dies ist auch hinreichend, weil  $9s - 10t$  und 10 teilerfremd sind. In den vorhergehenden Fällen ist  $9s - 10t = 0, 25, 36, 16, 4$  jeweils sogar selbst Quadratzahl. Die gesuchten Ziffernpaare sind also

$$\begin{array}{cccccccccc} s & = & 0 & 5 & 4 & 4 & 6 & 1 & 1 & 1 & 9 & 9 & 9 \\ t & = & 0 & 2 & 0 & 2 & 5 & 0 & 4 & 8 & 0 & 4 & 8 \end{array}$$

Die zugehörigen Lösungen von (1) sind trivial beim 1., 3., 6., 9. Paar; beim 2., 4., 5., 11. Paar kann man

$$x = n + 3(10 + \dots + 10^k) \text{ mit } n = 5, 2, 4, 3$$

wählen. Bei den übrigen Paaren hat man kein übersichtliches Bildungsgesetz für die Ziffernfolge der Lösungen von (1).

O. REUTTER (Ochsenhausen, Deutschland) zeigt, dass das Quadrat der Zahl

$$x = 2 + 3 \sum_{k=0}^{n-1} 10^k$$

die Einerziffer 5 hat, dass die nächsten  $n$  Ziffern alle 2 sind und dass die letzten  $n - 1$  Ziffern alle 1 sind.

**Aufgabe 370.** Für wieviele Zahlen der mod.  $p$  verschiedenen Restklassen

$$1, 2, \dots, p - 2$$

ist

$$\text{ind. } a < \text{ind. } (a + 1), \quad 0 \leq \text{ind. } a \leq p - 2?$$

W. JÄNICHEN, Berlin-Zehlendorf

*Lösung des Aufgabenstellers:* Für irgend eine mod.  $p$  primitive Wurzel  $g$  ist

$$1 + g^{\text{ind. } a} \equiv g^{\text{ind. } (a+1)} \pmod{p}.$$

Es sei nun  $a$  eine Restklasse, für die

$$\text{ind. } a < \text{ind. } (a + 1),$$

so folgt nach Multiplikation der Kongruenz mit  $g^p - 1 - \text{ind. } a$

$$g^p - 1 - \text{ind. } a + 1 \equiv g^{\text{ind. } (a+1)} - \text{ind. } a \pmod{p},$$

und für

$$b \equiv g^p - 1 - \text{ind. } a \pmod{p}$$

ist

$$b + 1 \equiv g^{\text{ind. } (a+1)} - \text{ind. } a \pmod{p},$$

folglich

$$\text{ind. } b = p - 1 - \text{ind. } a, \quad \text{ind. } (b + 1) = \text{ind. } (a + 1) - \text{ind. } a.$$

Da

$$p - 1 - \text{ind. } a > \text{ind. } (a + 1) - \text{ind. } a,$$

so ist  $b$  eine Restklasse, für die

$$\text{ind. } b > \text{ind. } (b + 1).$$

Jeder Restklasse  $a$ , für die  $\text{ind. } a < \text{ind. } (a + 1)$ , entspricht also eine Restklasse  $b$ , für die  $\text{ind. } b > \text{ind. } (b + 1)$ . Ausgenommen ist der Fall  $\text{ind. } a = 0$ , also  $a = 1$ . Hier ist  $g^{p-1} - \text{ind. } a$  durch  $g^0$  zu ersetzen, also

$$b \equiv g^0 \equiv 1, \quad b + 1 \equiv g^{\text{ind. } 2} \equiv 2 \pmod{p},$$

also

$$\text{ind. } b < \text{ind. } (b + 1).$$

$a = 1$  entspricht also die gleiche Restklasse  $b = 1$ . Umgekehrt entspricht jeder Restklasse  $a \neq 1$ , für die  $\text{ind. } a > \text{ind. } (a + 1)$ , ein und nur ein  $b$ , für das  $\text{ind. } b < \text{ind. } (b + 1)$ . Die Anzahl  $N$  der Restklassen  $a$ , für die  $\text{ind. } a < \text{ind. } (a + 1)$ , ist daher um 1 grösser als die, für die  $\text{ind. } a > \text{ind. } (a + 1)$ , daher

$$N + N - 1 = p - 2,$$

$$N = \frac{p - 1}{2}.$$

### Neue Aufgaben

395.  $u, v, n$  seien natürliche Zahlen, die der Ungleichung

$$A = 2^u (2v + 1) \leq n$$

genügen. Ferner sei

$$1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_k \leq n$$

eine Folge von natürlichen Zahlen, die folgende Bedingungen erfüllt: 1.  $A$  kommt unter den  $a_i$  ( $1 \leq i \leq k$ ) vor, das heisst  $A = a_r$  für einen Index  $r \leq k$ . 2. Kein  $a_i$  ist durch ein  $a_j$  mit  $j \neq i$  teilbar. Man beweise, dass die maximale Anzahl dieser Zahlen  $a_i$  gegeben wird durch

$$\max k = n - \left[ \frac{n}{2} \right] - \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{n}{3^u (2v + 1)} - 1 \right) \right].$$

[ $y$ ] bedeutet die grösste ganze Zahl  $\leq y$ , und für  $y \leq 0$  wird  $[y] = 0$  gesetzt.

P. ERDÖS

396. Die Tatsache, dass Potenzen mit teilerfremder Basis teilerfremd sind, wird gern zum Beweis der Irrationalität  $n$ -ter Wurzeln verwendet; sie ist eine unmittelbare Folge aus der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung. Man beweise sie ohne Benutzung der Lehre von den Primzahlen. E. TEUFFEL, Stuttgart

397. Das Dreieck  $P_1 P_2 P_3$  sei dem Einheitskreis einbeschrieben. Es sei  $I$  der Inkreismittelpunkt,  $r$  der Inkreisradius und  $H$  der Höhenschnittpunkt. Man setze

$$c_i = (-1)^k \overline{P_i H} - \overline{P_i I} + \frac{2r}{\overline{P_i I}} \quad (i = 1, 2, 3),$$

wo  $k = 2n$  oder  $= 2n + 1$  ist, je nachdem der Winkel bei  $P_i$  spitz oder stumpf ist. Was folgt aus der Bedingung

$$\frac{c_1 + c_2 + c_3}{3} = 1$$

über die Gestalt des Dreiecks?

F. LEUENBERGER, Zuoz

398. Man ermittle den geometrischen Ort der Punkte eines Punktpaares, die in bezug auf jede von vier gegebenen Kugeln konjugiert sind. C. BINDSCHEDLER, Küsnacht

### Aufgaben für die Schule

Es wird kein Anspruch auf Originalität der Aufgaben erhoben; Autoren und Quellen werden im allgemeinen nicht genannt. Die Daten für Aufgaben aus der Darstellenden Geometrie sind durchweg so festgelegt, dass der Ursprung des Koordinatensystems in der Mitte des linken Randes eines Blattes vom Format A4 gewählt werden soll,  $x$ -Achse nach rechts,  $y$ -Achse nach vorn,  $z$ -Achse nach oben, Einheit 1 cm. Anregungen und Beiträge sind zu senden an Prof. Dr. WILLI LÜSSY, Bülrainstrasse 51, Winterthur.

1. Einer Ellipse wird ein Dreieck  $ABC$  einbeschrieben, bei dem der Ellipsenmittelpunkt im Inneren liegt. Die zweiten Endpunkte der Durchmesser durch die Ecken seien  $A'$ ,  $B'$  und  $C'$ . Die Fläche des Sechsecks  $AC'BA'CB'$  ist das Doppelte der Fläche des Dreiecks.

► Jeder Durchmesser halbiert das Sechseck, und jedes Teildreieck einer solchen Hälfte ist gleich einem Teildreieck von  $ABC$ .

2. Ein Dreieck mit der Fläche  $D$  ist dem einen von zwei perspektivähnlichen Dreiecken einbeschrieben, dem anderen umschrieben.  $D$  ist das geometrische Mittel der Flächen der beiden ähnlichen Dreiecke.  
 ► Zieht man die Ähnlichkeitssstrahlen durch alle Ecken, so werden die drei Dreiecke in Teile zerlegt, für die die Behauptung einzeln gilt.
3. Man teilt alle Seiten eines Dreiecks in drei gleiche Teile und zieht aus jeder Ecke im gleichen Sinne eine Transversale durch einen der Teilpunkte. Die drei Transversalen bestimmen ein Dreieck, dessen Fläche gleich dem siebenten Teil der Fläche des ursprünglichen Dreiecks ist.  
 ► Beweise den Satz für das gleichseitige Dreieck, die Eigenschaft bleibt bei affiner Abbildung erhalten.
4. Jede Diagonale eines Sehnenvierecks teilt dieses in zwei Dreiecke. Die Inkreiszentren dieser vier Dreiecke sind die Ecken eines Rechtecks.  
 ► Die Mitten der Bögen  $AB, BC, CD, DA$  seien  $M_1, M_2, M_3, M_4$ . Folgende bekannte Tatsachen genügen, um den schönen Satz zu beweisen: a)  $M_1M_3$  steht senkrecht auf  $M_2M_4$ . b) Der Inkreismittelpunkt des Dreiecks  $ABC$  liegt auf dem Kreis durch  $A$  und  $B$  mit dem Zentrum  $M_1$ .
5. Über der Strecke  $A(1; 7; 0) B(5; 5; 4)$  ist das Dreieck zu konstruieren, dessen Spitze  $C$  auf der  $y$ -Achse liegt und das die Fläche 12 hat (Ursprung in der Blattmitte).  
 ►  $C_1(0; 11,42; 0), C_2(0; 3,07; 0)$ .

## Bericht

### V. Österreichischer Mathematikerkongress

Vom 12. bis 17. September 1960 fand auf Einladung der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft unter dem Vorsitz von H. HORNICH (Wien) zum fünften Mal das schon zur Tradition gewordene Internationale Mathematikertreffen statt, das nun die vierjährige Zeitspanne zwischen zwei «grossen» Kongressen halbiert. Tagungsort war Innsbruck, das schon vor elf Jahren die erste Veranstaltung dieser Art in Österreich beherbergt hatte.

Der feierlichen Eröffnung des Kongresses im Madonnensaal der alten Universität folgte ein Empfang durch die Regierung des Landes Tirol und den Bürgermeister von Innsbruck im Kaiser-Leopold-Saal.

Das wissenschaftliche Programm wickelte sich in der neuen Universität am Innrain ab. Es bestand aus Kurzvorträgen von je 20 Minuten Dauer, die an acht Halbtagen in den Sektionen *Algebra* und *Zahlentheorie*, *Analysis*, *Geometrie* und *Topologie*, *Angewandte Mathematik*, *Philosophie* und *Geschichte der Mathematik* gehalten wurden. Im Gegensatz zu den heute für die Forschung notwendigen Symposien über spezielle Gebiete geben die allgemeinen Kongresse die Möglichkeit, Mathematiker und mathematische Methoden aus den dem eigenen Arbeitsgebiet ferner liegenden Disziplinen kennenzulernen, und sie fördern so die so wichtigen Querverbindungen. So sieht man häufig reine Mathematiker in der Sektion für Angewandte Mathematik, die auch in Innsbruck sehr gut dotiert war. Besonders erwähnt sei – weil es sich hier um ein besonders aktuelles Thema handelt – der glänzende Vortrag von O. BAIER (München) über die von ihm entwickelte Kinematik des NSU-Wankel-Motors.

War es in Salzburg (1952) und in Wien (1956) der Genius loci, der viel zum Gelingen der dortigen Kongresse beitrug; so sorgten in Innsbruck die herrliche Alpenlandschaft und das meistens gute Wetter dafür, dass von Anfang an eine Art Ferienstimmung herrschte. Wohl die meisten Teilnehmer werden die Zeit gefunden haben, um an einem der schönen Tage schnell eine der umliegenden Bergstationen zu besuchen.

Leider war der Kongressausflug nach Seefeld und auf das Seefelderjoch durch Nebel beeinträchtigt. Dafür hatte die grosse Mathematikerfamilie vor dem Besteigen des Extra-