

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 16 (1961)  
**Heft:** 1

**Artikel:** Lineare Programmierung  
**Autor:** Künzi, H.P.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-21283>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 12.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires — Rivista di matematica elementare

*Zeitschrift zur Pflege der Mathematik  
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts  
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrer*

Publiziert mit Unterstützung des Schweizerischen Nationalfonds  
zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung

---

El. Math.      Band XVI      Nr. 1      Seiten 1–24      Basel, 10. Januar 1961

---

## Lineare Programmierung<sup>1)</sup>

### 1. Einleitung

Die Lineare Programmierung ist eine Theorie, die sich nicht ohne weiteres einem bestimmten Forschungsgebiet unterordnen lässt. Gehört sie zur angewandten Mathematik oder zur Unternehmensforschung? Sicher befassen sich Vertreter beider Richtungen sehr intensiv damit, und deshalb ist es nicht abwegig, einen Kompromiss zu schliessen, indem man behauptet: Die Theorie der Linearen Programmierung gehört den angewandten Mathematikern und die praktische Verwendung ist Sache der Unternehmensforscher.

In meinen Ausführungen möchte ich in erster Linie vom Standpunkt der angewandten Mathematik aus sprechen und mich mit einigen Hinweisen auf die Praxis begnügen. Erlauben Sie mir, an dieser Stelle noch eine kleine persönliche Bemerkung einzuflechten in bezug auf die Lineare Programmierung und die Mittelschulmathematik. Ich habe den Eindruck, dass einige Überlegungen, mit denen ich mich hier auseinander setzen möchte, sich unter Umständen gar nicht schlecht eignen würden, an gewissen Stellen in den Mathematikunterricht eingeflochten zu werden. Einerseits würde dadurch in den oberen Klassen auf der Gymnasialstufe die Theorie der Ungleichungen wieder in etwas vermehrtem Masse zu Ehren kommen, und andererseits hätte dadurch der Schüler die Gelegenheit, schon relativ früh mathematische Überlegungen an praktischen und realen Beispielen anzuwenden.

### 2. Die Problemstellung der Linearen Programmierung

#### a) Das Maximumproblem:

Gesucht werden die Grössen  $x_1, x_2, \dots, x_g$ , für die der lineare Ausdruck

$$Q = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_g x_g \quad (1)$$

maximal wird unter den Nebenbedingungen

$$\left. \begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1g} x_g &\leq s_1, \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2g} x_g &\leq s_2, \\ &\vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mg} x_g &\leq s_g, \\ x_i &\geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, g). \end{aligned} \right\} \quad (2) \quad \text{I}$$

und

$$x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, g). \quad (3)$$

---

<sup>1)</sup> Vortrag, gehalten am 13. Oktober 1960 an der Tagung des Vereins Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrer in Zürich.

Die  $a_{ij}$ ,  $p_i$  und  $s_j$  sind gegebene Grössen.

Die oben formulierte Aufgabe wird im folgenden als Problem I bezeichnet.

Bevor wir in der theoretischen Betrachtung weiterfahren, möchte ich bereits die Formulierung des Problems I in ein ökonomisches Beispiel einkleiden, nämlich in die Produktionsplanung eines Betriebes:

Angenommen eine Firma kann  $g$  Produkte mit den noch unbekannten Mengen  $x_1, x_2, \dots, x_g$  herstellen, für die sie nach Abzug der Stückkosten die Nettopreise  $p_1, \dots, p_g$  je Stück lösen will. Für die Produktion benötigt man  $m$  nicht in beliebiger Menge vorhandene Produktionsfaktoren wie Arbeitskräfte, Maschinen, Rohstoffe usw., und zwar pro Stück des Produktes  $i$  die Menge  $a_{ji}$  des Produktionsfaktors  $j$  ( $i = 1, \dots, g$ ;  $j = 1, \dots, m$ ). Die Produktionsfaktoren stehen bis zu den Höchstmengen  $s_1, s_2, \dots, s_m$  zur Verfügung, gefragt wird nach dem optimalen Produktionsplan.

Man erkennt sofort, dass hier das Problem I zu lösen ist, in welchem der Gewinn durch (1) ausgedrückt wird und die Kapazitätsbeschränkungen durch das System (2). Die Bedingung (3) sagt aus, dass alle Produktionsgrössen nicht-negativ sein dürfen.

Im weiteren wollen wir nun eine kleine theoretische Diskussion über die Ungleichungssysteme (2) und (3) anbringen. Beschränken wir uns der Anschaulichkeit wegen auf 2 Variable ( $g = 2$ ), so existiert der

*Satz A: Die Menge der Punkte  $(x_1, x_2)$ , welche dem System (2) genügen (bzw. den Systemen (2) und (3)), bilden ein konvexes Polyeder.*

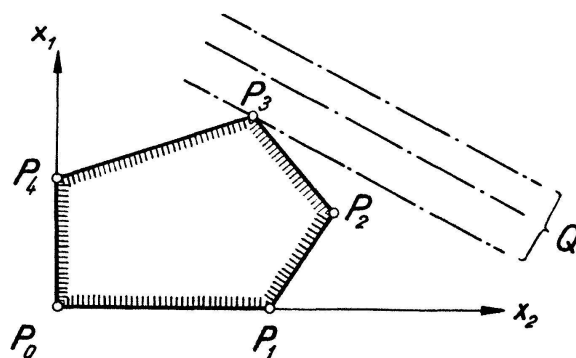
Es gilt jetzt, über diesem konvexen Polyeder die lineare Funktion (1) zu maximieren; dafür benützen wir den

*Satz B: Eine lineare Funktion  $p_1 x_1 + p_2 x_2$ , die über einem konvexen Polyeder definiert ist, nimmt ihr Maximum in einem Eckpunkt dieses Polyeders an.*

definiert ist, nimmt ihr Maximum in einem Eckpunkt dieses Polyeders an.

Die beiden Sätze A und B lassen sich mit elementaren Mitteln der Algebra und der analytischen Geometrie beweisen. Man vergleiche hierzu das sehr gute Werk: *Finite Mathematics* von KEMENY, SNELL und THOMSON [6]<sup>2)</sup>.

Die Richtigkeit der beiden Sätze können wir durch eine Plausibilitätsbetrachtung geometrisch führen.



Figur 1

Maximierung nach der Simplex-Methode

Für  $m = 3$  bestimmen die 3 Ungleichungen je eine Halbebene, welche zusammen mit der Bedingung (3) das konvexe Polyeder  $P_0P_1P_2P_3P_4$  begrenzen. Der lineare

<sup>2)</sup> Die Zahlen in eckigen Klammern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Schluss der Arbeit.

Ausdruck (1):  $Q = p_1 x_1 + p_2 x_2$  liefert eine Schar paralleler Hyperebenen (Geraden). Das Optimum für  $Q$  wird erreicht, wenn eine der parallelen Geraden die «äusserste Ecke» trifft (in unserem Falle  $P_3$ ).

**b) Das Minimumproblem:**

Neben der oben formulierten Maximumaufgabe ist es sinnvoll, auch von einer Minimumaufgabe zu sprechen, indem man zum Beispiel verlangt, dass der lineare Ausdruck

$$K = s_1 y_1 + s_2 y_2 + \cdots + s_m y_m \quad (4)$$

zum Minimum wird, unter den Restriktionen

$$\left. \begin{aligned} a_{11} y_1 + a_{21} y_2 + \cdots + a_{m1} y_m &\geq p_1, \\ a_{12} y_1 + a_{22} y_2 + \cdots + a_{m2} y_m &\geq p_2, \\ &\vdots \\ a_{1g} y_1 + a_{2g} y_2 + \cdots + a_{mg} y_m &\geq p_g, \end{aligned} \right\} \quad \text{II} \quad (5)$$

und

$$y_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (6)$$

Man könnte für das so formulierte Minimumproblem II entsprechende analytische und geometrische Überlegungen anstellen wie beim Maximumproblem.

Mit voller Absicht habe ich das Problem II in einer gewissen Symmetrie zum Problem I geschrieben. Die beiden so aufgestellten Probleme I und II heissen dual zueinander, und für sie gilt das zentrale

*Dualitätstheorem: Am Optimalpunkt stimmen die Werte  $Q$  und  $K$  der beiden Dualaufgaben I und II überein.*

Für diesen Beweis, der nicht mehr ganz elementar verläuft, muss ich Sie auf die entsprechende Fachliteratur verweisen [7].

**c) Die Überführung der Ungleichungen in Gleichungen:**

Im folgenden beschränken wir uns wieder auf das Maximumproblem, für das wir nun nach expliziten Lösungen suchen wollen. Die entsprechenden Überlegungen für die Minimumaufgabe sind analog zu denjenigen der Maximumaufgabe.

Der erste Schritt im Lösungsverfahren besteht darin, dass die Ungleichungen des Systems (2) in Gleichungen überführt werden, denn es ist im allgemeinen angenehmer, mit Gleichungen als mit Ungleichungen zu rechnen.

Um dies auszuführen, addieren wir zu jeder Ungleichung auf der linken Seite der Reihe nach die nicht-negativen Schlupfvariablen

$$x_{g+1}, x_{g+2}, \dots, x_{g+m} = x_n \quad (7)$$

hinzu und schreiben das Problem I nochmals in etwas modifizierter Form:

Man maximiere den Ausdruck

$$Q = p_1 x_1 + \cdots + p_g x_g + p_{g+1} x_{g+1} + \cdots + p_{g+m} x_{g+m} \quad (8)$$

unter den linearen Restriktionen

$$\left. \begin{aligned} a_{11} x_1 + \cdots + a_{1g} x_g + x_{g+1} &= s_1, \\ a_{21} x_1 + \cdots + a_{2g} x_g + x_{g+2} &= s_2, \\ &\vdots \\ a_{m1} x_1 + \cdots + a_{mg} x_g + x_{g+m} &= s_m \end{aligned} \right\} \quad \text{III} \quad (9)$$

und

$$x_1, x_2, \dots, x_{g+m} \geq 0. \quad (10)$$



An dieser Stelle ist es zweckmässig (nicht aber unbedingt nötig), die Matrix- und die Vektorschreibweise zu benutzen, denn dadurch lässt sich das Problem III kürzer und eleganter darstellen.

Dazu definieren wir  $p'$  als einen Zeilenvektor mit  $n = m + g$  Elementen:

$$p' = (p_1, p_2, \dots, p_g, p_{g+1}, \dots, p_{g+m}).$$

Unter  $x$  bzw.  $s$  verstehen wir Kolonnenvektoren von  $n$  bzw.  $m$  Elementen:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{g+m} \end{pmatrix}, \quad s = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_m \end{pmatrix}.$$

Mit  $A$  bezeichnen wir eine  $(m \ n)$ -Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1g} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2g} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mg} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Unter Benützung dieser Schreibweise lässt sich Problem III in Problem IV überführen:

Man maximiere den linearen Ausdruck

$$Q = p' x \quad (11)$$

unter den Nebenbedingungen

$$A x = s \quad (12)$$

und

$$x \geq 0. \quad (13)$$

(9) bzw. (12) ist jetzt ein Gleichungssystem mit  $m$  Gleichungen und  $n$  Unbekannten ( $n = g + m$ ), wobei natürlich  $n > m$ .

Somit können  $g = n - m$  Unbekannte beliebig vorbestimmt und das System (9) bzw. (12) für die restlichen  $m$  Unbekannten aufgelöst werden.

In Anlehnung an unsere heuristisch geführten Überlegungen im Zusammenhang mit den Sätzen A und B formulieren wir nun das für die lineare Programmierung geltende

*Haupttheorem: An der Stelle, an der  $Q$  gemäss (8) ein Maximum annimmt, müssen die  $n - m$  vorbestimmten Variablen 0 sein.*

Für einen allgemeinen Beweis müssen wir wiederum auf die Fachliteratur verweisen [7].

### 3. Das Simplexverfahren

Man kennt heute verschiedene Methoden, um ein allgemeines lineares Programm zu lösen. Die meistverwendete ist wohl die Simplex-Methode, die vor etwas mehr als 10 Jahren von DANTZIG [3] entwickelt wurde. Diese Technik ist auch deshalb sehr verbreitet, weil man heute für sie ausführliche Programme für die elektronische Computerberechnung besitzt.

An dieser Stelle möchte ich Ihnen die berühmte Simplex-Methode an einem einfachen Beispiel erläutern, das auch noch eine elementare geometrische Interpretation erlaubt (Vgl. hierzu auch [9]).

*Aufgabe:* Man maximiere die lineare Form

$$Q = 3x + 5y + 4z \quad (14)$$

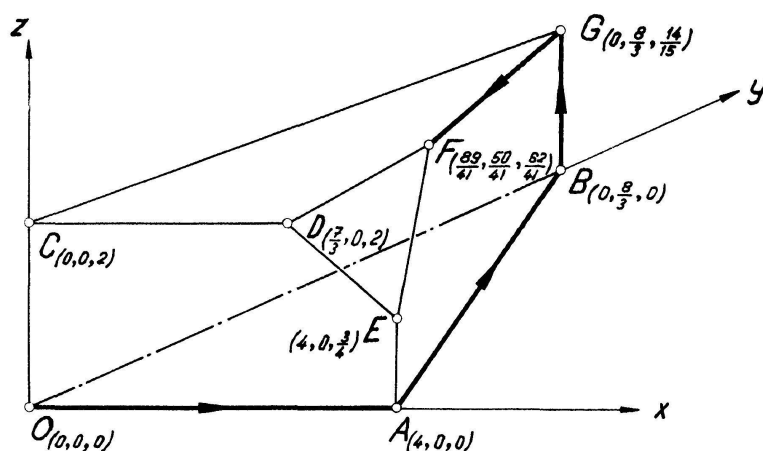
unter den drei Restriktionen

$$\left. \begin{aligned} 2x + 3y &\leq 8, \\ 2y + 5z &\leq 10, \\ 3x + 2y + 4z &\leq 15, \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0. \quad (16)$$

In dieser Aufgabe sind:  $g = 3$ ,  $m = 3$ ,  $n = m + g = 6$ .

Wie man leicht erkennt, bestimmen die Restriktionen (15) und (16) einen Polyeder, der im ersten Oktanten mit lauter positiven Koordinaten liegt (Figur 2).



Figur 2  
Restriktionspolyeder

Dieser Polyeder wird begrenzt durch die 6 folgenden Hyperebenen:

$$\left. \begin{aligned} 2x + 3y &= 8, & x &= 0, \\ 2y + 5z &= 10, & y &= 0, \\ 3x + 2y + 4z &= 15, & z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Von der früheren Theorie her wissen wir, dass das Maximum von  $Q$  an einer der 8 Ecken des Polyeders angenommen wird. Man könnte also diese 8 Ecken berechnen und die erhaltenen Werte einzeln in  $Q$  einsetzen. Die Ecke, die das grösste  $Q$  liefern würde, müsste als Lösung der gestellten Aufgabe betrachtet werden. Ein solches Verfahren wäre aber viel zu umständlich, vor allem dann, wenn  $g$  und  $m$  grössere Werte aufweisen, wie dies in der Praxis häufig der Fall ist.

DANTZIG schlägt nun den folgenden Lösungsweg vor:

1. Man bestimme oder suche eine Ecke als Anfangspunkt.
2. Man untersuche jede Kante, die durch diese Ecke verläuft, um zu sehen, ob eine Verschiebung längs dieser Kante eine Vergrösserung von  $Q$  herbeiführen würde. Falls keine Vergrösserung entsteht, so ist das Problem gelöst. Im anderen Fall fahre man fort mit Stufe 3.
3. Man wähle diejenige Kante, der entlang eine Verschiebung  $Q$  am meisten vergrössert, und verfolge sie bis zur nächsten Ecke.

4. Man wiederhole die Stufen 1, 2 und 3 solange, bis  $Q$  nicht mehr weiter vergrößert werden kann.

Um diese 4 Stufen durchzuführen, bedienen wir uns der 3 nicht-negativen Schlupfvariablen  $u$ ,  $v$  und  $w$ , die die 3 Ungleichungen aus (15) in Gleichungen verwandeln:

$$\left. \begin{aligned} 2x + 3y + u &= 8, \\ 2y + 5z + v &= 10, \\ 3x + 2y + 4z + w &= 15. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Nun suchen wir einen Startpunkt, der also in einer Ecke des Polyeders liegt. Dabei beachten wir, dass sich in jedem Eckpunkt drei der 6 Ebenen

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0$$

treffen, also sind in jedem Eckpunkt 3 Koordinatenwerte gleich 0 (entsprechend auch dem Haupttheorem).

Es ist zweckmässig, im Nullpunkt 0 (000) des Polyeders zu starten; das heisst, wir setzen  $x = y = z = 0$  und suchen die Werte der 3 übrigen Schlupfvariablen.

Dazu lösen wir das System (18) nach den 3 Variablen  $u$ ,  $v$  und  $w$  auf, welche die erste Basis bilden:

$$\left. \begin{aligned} u &= 8 - 2x - 3y, \\ v &= 10 - 2y - 5z, \\ w &= 15 - 3x - 2y - 4z. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Daraus schliessen wir für die

1. *Basislösung*:  $u = 8$ ,  $v = 10$ ,  $w = 15$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$  und  $Q = 0$ .

Wir wollen nun diese Lösung, die sicher noch nicht optimal ist, verbessern. Dazu betrachtet man die drei Kanten durch den Nullpunkt, dargestellt durch die drei Gleichungspaare:

$$\begin{aligned} x &= 0, & y &= 0, \\ x &= 0, & z &= 0, \\ y &= 0, & z &= 0. \end{aligned}$$

Wenn wir diesen Schnittgeraden entlanggehen, so vergrössern wir  $z$ , resp.  $y$ , resp.  $x$ . Jede Vergrösserung um eine Einheit von  $x$ ,  $y$ ,  $z$  vergrössert  $Q$  um 3, resp. 5, resp. 4; somit entschliessen wir uns,  $y$ , dem der grösste Zuwachs entspricht, zu vergrössern und die andern beiden Komponenten, nämlich  $x$  und  $z$  vorläufig 0 zu belassen. Durch die Variation von  $y$  werden aber auch die drei alten Basisvariablen  $u$ ,  $v$  und  $w$  variiert. Keine davon darf aber negativ werden.

Wir beziehen uns auf das System (19) und stellen fest, dass wir  $y$  um  $8/3$  vergrössern können, ohne  $u$  negativ zu machen;  $y$  um 5, ohne  $v$  negativ zu machen und schliesslich um  $15/2$ , ohne  $w$  negativ zu machen. Somit ist die maximale Vergrösserung von  $y = 8/3$ , und wir bewegen uns vom Nullpunkt zum 2. Simplexpunkt  $B(0, \frac{8}{3}, 0)$ .

Wir haben jetzt eine neue Basis, bestehend aus den nicht-negativen Variablen  $y$ ,  $v$  und  $w$ . Um ihre Werte am 2. Simplexpunkt  $B$  zu bestimmen, lösen wir das System (18) nach diesen drei Variablen auf und erhalten

$$\left. \begin{aligned} y &= \frac{8}{3} - \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}u, \\ v &= -\frac{14}{3} + \frac{4}{3}x - 5z + \frac{2}{3}u, \\ w &= \frac{29}{3} - \frac{5}{3}x - 4z + \frac{2}{3}u. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Daraus schliessen wir für die

2. Basislösung:  $y = 8/3$ ,  $v = 14/3$ ,  $w = 29/3$ ,  $x = 0$ ,  $z = 0$ ,  $u = 0$ ,

$$Q = \frac{40}{3} = 13 \frac{1}{3}.$$

Wir versuchen, diese Lösung weiter zu verbessern. Die Kanten durch  $B$  werden gegeben durch:

$$\left. \begin{aligned} x &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned} \right\} BO, \quad \left. \begin{aligned} x &= 0 \\ u &= 0 \end{aligned} \right\} BG, \quad \left. \begin{aligned} z &= 0 \\ u &= 0 \end{aligned} \right\} BA.$$

Eine Bewegung längs  $BO$  kommt sicher nicht in Frage, da wir uns im letzten Schritt von  $O$  nach  $B$  bewegten.

Bewegung längs  $BA$ :  $z$  bleibt unverändert. Vergrössern wir  $x$  um eine Einheit, so verkleinern wir laut (20)  $y$  um  $2/3$  Einheiten. Deshalb ändern wir  $Q$  für jede Einheitsvergrösserung von  $x$  um  $3 \cdot 1 - 5 \cdot 2/3 = -1/3$ . Eine Verschiebung längs  $BA$  würde somit  $Q$  wieder verkleinern.

Bewegung längs  $BG$ : Hier bleibt  $x$  unverändert, nämlich 0 und ebenfalls  $y$ . Also vergrössert sich  $Q$  um 4 je Einheit von  $z$ . Gemäss der zweiten Gleichung in (20) können wir  $z$  um  $14/15$  vergrössern, ohne  $v$  negativ zu machen, und gemäss der dritten Gleichung um  $29/12$ , ohne  $w$  negativ zu machen. Damit ist die maximal erlaubte Vergrösserung von  $z$  gegeben durch  $14/15$ , wodurch die Bewegung von  $B$  nach  $G$  bestimmt wird. Wieder drücken wir die neuen Basisvariablen (Nicht-Null-Variablen) durch die übrigen aus und erhalten:

$$\left. \begin{aligned} y &= \frac{8}{3} - \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}u, \\ z &= \frac{14}{15} + \frac{4}{15}x + \frac{2}{15}u - \frac{1}{5}v, \\ w &= \frac{89}{15} - \frac{41}{15}x + \frac{2}{15}u + \frac{4}{5}v. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Daraus schliessen wir für die

3. Basislösung:  $y = 8/3$ ,  $z = 14/15$ ,  $w = 89/15$ ,  $x = 0$ ,  $u = 0$ ,  $v = 0$ .

$$Q = \frac{256}{15} = 17 \frac{1}{15}.$$

Wiederholen wir die oben ausgeführten Schritte, so führt uns die nächste Lösung zum Punkt  $F$  mit den Koordinaten

$$F\left(\frac{89}{41}, \frac{50}{41}, \frac{62}{41}\right).$$

An diesem Punkt angelangt stellt man fest, dass jede Bewegung längs einer Kante von  $F$  aus die Grösse  $Q$  verringern würde. Somit ist man am Optimalpunkt und es gilt für die

#### 4. Basislösung: oder Optimallösung:

$$x = \frac{89}{41}, \quad y = \frac{50}{41}, \quad z = \frac{62}{41}, \quad u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0,$$

$$Q = \frac{765}{41} = 18 \frac{27}{41}.$$

Dass hier die Schlusslösung nur aus eigentlichen Variablen besteht, ist ein Zufall. Öfters treten auch in der Optimallösung noch positive Schlupfvariable auf.

In der Praxis bedient man sich natürlich auch nicht der hier skizzierten geometrischen Methode, sondern man kleidet die gemachten Überlegungen rein analytisch ein und stellt für jeden Iterationsschritt ein sogenanntes Simplex-Tableau auf. Aus diesem Tableau entnimmt man auf Grund bestimmter Vorschriften sämtliche Angaben, die einem interessieren, nämlich die Grössen der Variablen, die Grösse von  $Q$  sowie die Strategie für den nächsten Iterationsschritt.

Die Theorie der Linearen Programmierung ist in verschiedenen Werken dargestellt worden. Aus der deutschsprachigen Literatur sei auf die Darstellung von KRELLE und KÜNZI verwiesen: *Lineare Programmierung* [7].

Die praktische Anwendung der Linearen Programmierung wird weitgehend in dem Buch von VAJDA behandelt, das in deutscher Übersetzung vor kurzem erschien [10].

Zu den wichtigsten Anwendungsgebieten, die auch von VAJDA behandelt werden, gehören unter anderem:

Ernährungsprobleme,  
Investierungsprobleme,  
Lufttransportprobleme,  
Mischen von Benzin,  
Produktionsplanungen,  
Reduktion der Abfallverluste,  
Einteilung von Dienstzeiten,  
Lagerhaltungsprobleme,  
usw.

#### 4. Die Ganzzahlige Programmierung

Eine Zusatzbedingung für die Lösung eines Linearen Problems kann darin bestehen, dass man ganzzahlige Werte fordert. Dadurch wird man auf die ganzzahlige Programmierung geführt. Diese relativ einfache Zusatzbedingung erschwert die mathematische Behandlung ganz wesentlich. Am einfachen zweidimensionalen Fall erkennt man bereits die neue und tiefere Problematik. Es handelt sich jetzt um ein Gitterpunktproblem, das sich mit elementaren Mitteln nicht mehr lösen lässt. Statt der Auffindung der «äussersten Ecke» ist man jetzt auf das Ermitteln des «äussersten Gitterpunktes» angewiesen.

Eine leichte Überlegung zeigt, dass man die Aufgabe nicht einfach dadurch lösen kann, dass man sie zuerst allgemein, das heisst nicht-ganzzahlig löst und dann auf die ganzzahligen Werte auf- oder abrundet.

Beispiel:

Man maximiere

$$Q = -10 x_1 + 111 x_2$$

unter den Restriktionen:

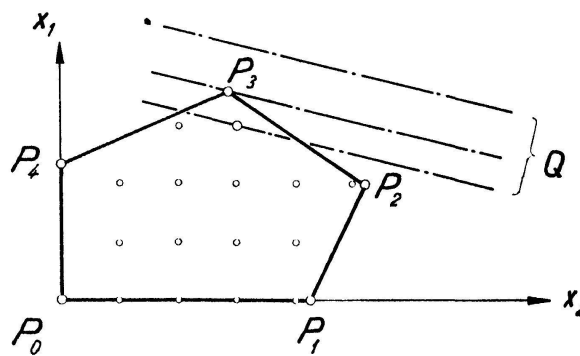
$$-x_1 + 10x_2 \leq 40,5, \quad x_1 + x_2 \leq 20, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Im gewöhnlichen Falle erhält man die Werte

$$x_1 = 14,5, \quad x_2 = 5,5 \quad \text{und} \quad Q = 465,5.$$

Wendet man die sogenannte Gomory-Methode [5] an zum Auffinden ganzzahliger Lösungen, so findet man:

$$x_1 = 10, \quad x_2 = 5 \quad \text{und} \quad Q = 455.$$



Figur 3

Maximierung bei der ganzzahligen Programmierung

### 5. Das Transportproblem

In einem speziellen Fall ist es immer möglich, die optimale Lösung ganzzahlig zu erhalten, nämlich beim sogenannten Transporttypus. Mathematisch handelt es sich dabei um einen Sonderfall der Linearen Programmierung [10].

Als Prototyp einer Transportproblem-Aufgabe, an der auch die Leitgedanken zur Lösung skizziert werden sollen, diene das

*Beispiel:* Von den Garagen  $G_1$ ,  $G_2$  und  $G_3$  (den sogenannten Ausgangsorten), in denen sich 2, 6 und 7 Taxi befinden, werden in den Hotels (den sogenannten Bestimmungsorten)  $A$ ,  $B$ ,  $C$  und  $D$  je 3, 3, 4 und 5 Wagen angefordert. Die Entfernungen von den Garagen zu den Hotels werden durch die Tabelle (22) angegeben. Gefragt wird nach der Zuordnung der Taxi zu den 4 Hotels, so dass die Anfahrtswege minimal werden.

Zu	$A$	$B$	$C$	$D$
Von $G_1$	13	11	15	20
$G_2$	17	14	12	13
$G_3$	18	18	15	12

(22)

Die Anzahl der Taxi, die von den Garagen  $G_1$ ,  $G_2$  und  $G_3$  zu den Plätzen  $A$ ,  $B$ ,  $C$  und  $D$  geschickt werden, sei

$$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, \quad x_{21} \dots, \quad x_{31} \dots$$

Für die Taxi, die die Garagen verlassen, gelten die Restriktionen:

$$\left. \begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} &= 2, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} &= 6, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} &= 7. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Die Taxi, welche zu den Hotels fahren, werden den Restriktionen unterworfen:

$$\left. \begin{aligned} x_{11} + x_{21} + x_{31} &= 3, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} &= 3, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} &= 4, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} &= 5. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Die zu minimierende Distanz beträgt:

$$K = 13 x_{11} + 11 x_{12} + 15 x_{13} + 20 x_{14} + \cdots + 12 x_{34}. \quad (25)$$

Dieses spezielle Beispiel gibt uns die Anhaltspunkte für das allgemeine Transportproblem. Hat man  $m$  Ausgangsorte und  $n$  Bestimmungsorte, so ergeben sich  $m + n$  Restriktionen in Form von Gleichungen (nicht Ungleichungen). Diese  $m + n$  Gleichungen sind dadurch charakterisiert, dass sämtliche Koeffizienten der  $x_{ij}$  den Wert 1 haben. Eine nähere Überprüfung zeigt auch, dass von den  $m + n$  Gleichungen nur deren  $m + n - 1$  linear unabhängig sind, das heisst, man kann stets eine der Gleichungen durch Linearkombination der andern ausdrücken.

Wegen diesen Vereinfachungen gegenüber einem gewöhnlichen Linearen Programm ist es auch möglich, die Lösung auf einfachere Weise zu finden als mittels der Simplextableaus.

Der Lösungsweg kann folgendermassen skizziert werden: Man stellt ein entsprechendes Tableau zu (22) auf. Hier ersetzt man in der Kopfzeile die Buchstaben  $A$ ,  $B$ ,  $C$  und  $D$  durch die Zahlenwerte 3, 3, 4 und 5, die uns die Erfordernisse angeben. Die Kopfspalte ersetzt man durch die Zahlenwerte 2, 6 und 7, wodurch die Kapazitäten der Garagen festgehalten werden. Die noch leeren Innenfelder besetzt man mit  $m + n - 1 = 4 + 3 - 1 = 6$  Einträgen so, dass die Zeilen- und die Kolonnentotale jeweils den entsprechenden Einträgen in Kopfzeile und Spalte entsprechen.

Um eine gute erste Lösung zu erhalten, setzen wir die Zahlen vorwiegend in solche Felder, denen in (22) kurze Distanzen entsprechen. Eine erste Versuchslösung wird gegeben durch Tabelle (26):

	3	3	4	5
2	.	2	.	.
6	1	1	4	.
7	2	.	.	5

(26)

Diese erste Lösung weist eine Gesamtdistanz von 197 auf. Es ist nun unsere Aufgabe, diese erste Lösung wenn möglich zu verbessern, dies kann man unter Umständen durch Verschiebungen der Einträge in (26) erreichen. Man geht hier folgendermassen vor:

Man betrachtet in der Tabelle (26) irgend eine leere Zelle, zum Beispiel diejenige von  $x_{11}$ . Setzt man dort eine 1 ein, dann muss man zum Ausgleich von  $x_{12}$  eine 1 wegnehmen, dafür wieder eine 1 bei  $x_{22}$  zufügen und zuletzt nochmals eine 1 subtrahieren von  $x_{21}$ . Durch diese Zyklusverschiebung bleiben die geforderten Kolonnen- und Zeilentotale erhalten.

Auf Grund dieser Transformation wird nun die Totalzeit nach der Tabelle (22) um

$$13 - 11 + 14 - 17 = -1$$

geändert, das heisst reduziert.

Wird andererseits eine 1 in das leere Feld von  $x_{14}$  gesetzt, so entsteht dadurch eine Gesamtänderung von

$$20 - 12 + 18 - 17 + 14 - 11 = 12,$$

was also auf eine Verlängerung der Distanzen hinauslaufen würde.

Nach diesen Überlegungen wird nun jedes leere Feld behandelt und nachgeprüft, ob eine Verschiebung die Distanz verkürzen würde oder nicht. Die optimale Lösung heisst in unserem Beispiel:

	3	3	4	5
2	1	1	.	.
6	.	2	4	.
7	2	.	.	5

Wiederum ist zu betonen, dass das hier eingeschlagene Verfahren für praktische Beispiele zu umständlich ist. Aber auch hier haben sich abgekürzte Tabellenverfahren entwickelt, die den Anforderungen aus der Praxis gewachsen sind. Besonders hervorzuheben wäre die bekannte «Stepping-Stone Method» von CHARNES und COOPER, für die man wiederum vollständige Maschinen-Programme besitzt [2].

Weil das Transportmodell gegenüber dem Simplex-Verfahren einfacher und rascher arbeitet, hat man versucht, auch etwas allgemeinere Probleme auf den Transportmodell-Typus zu überführen. Dies gelang in verschiedenen Fällen, und ich verweise Sie wiederum auf die Beispielsammlung von VAJDA, wo unter anderen die folgenden praktischen Probleme erläutert werden:

Allgemeine Transportaufgaben,  
 Verpflegungsprobleme,  
 Produktionsplanungen,  
 Umladungsprobleme,  
 Angebotsbewertung,  
 Netzwerk- und Verkehrsprobleme,  
 Eisenbahnverladungen,  
 usw.

## 6. Rückblick und Ausblick

Werfen wir nochmals einen Blick zurück auf die verschiedenen Problemstellungen innerhalb der Theorie der Linearen Programmierung, so muss besonders darauf hingewiesen werden, dass es sich bei dieser Theorie um eine sehr junge Entwicklung handelt. In den letzten 10 Jahren wurde aber gerade in diesem Gebiet gewaltig gearbeitet, besonders in den Vereinigten Staaten, so dass wir heute schon über eine beachtliche Literatur verfügen. Trotzdem ist zu betonen, dass noch sehr viele Probleme auf Lösungen oder zweckmässigere Verfahren harren. Dies gilt vor allem auch für die erwähnte ganzzahlige Programmierung.



Das mathematische Programmieren ist aber bei weitem durch die Lineare Programmierung noch nicht erschöpft. Ein ebenfalls weites und umfassendes Gebiet befasst sich mit dem allgemeineren Problem der Nichtlinearen Programmierung [8], wo die zu optimierende Funktion sowie die Restriktionen nicht mehr linear sind. Dieses Problem tritt natürlich sehr häufig in praktischen Problemen der Unternehmensforschung auf. Ja, man kann sagen, die Lineare Programmierung sei lediglich ein Spezialfall der soeben erwähnten Programmierung.

Leider ist man heute noch sehr weit von der allgemeinen Lösung des oben formulierten Programms entfernt. Über einigermaßen befriedigende Verfahren verfügt man erst für das quadratische Programmieren mit linearen Nebenbedingungen. Aber auch in diesem Fall muss man von der quadratischen Funktion die starke Einschränkung verlangen, dass sie konvex sei. Man vergleiche hierzu das Verfahren von WOLFE [11].

Ausblickend sei auch noch die Dynamische Programmierung erwähnt, bei der die zeitliche Variation gegebener Grössen hineinspielt. In dieser Richtung hat sich BELLMAN [1] grosse Verdienste erworben. Seine Theorie ist aufs engste mit der Variationsrechnung und den Integralgleichungen verbunden. Auch hier haben die Mathematiker noch gewaltige Arbeit zu leisten, bis sich die Theorie sinnvoll der Praxis zur Verfügung stellen kann.

Auch für die sogenannte Programmierung mit Unsicherheiten [4] ist man noch nicht weit über einige Ansätze hinausgekommen. Dieser interessante Fall, wo die Konstanten innerhalb der Programme nur mit einer gewissen Sicherheit oder mit einer Wahrscheinlichkeitsverteilung angegeben werden können, wäre aber gerade für die Praxis der allerwichtigste.

Hoffen wir, dass es der Mathematik gelingen werde, innerhalb dieses neuen und grossen Zweiges des Programmierens weitere Fortschritte zu erzielen, die sich für die Praxis, besonders in wirtschaftswissenschaftlicher Richtung in fruchtbarer Weise anwenden liessen.

H. P. KÜNZI (Zürich)

#### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] BELLMAN, R., *Dynamic Programming*, A Rand Corporation Research Study (Princeton University Press 1957).
- [2] CHARNES, A., and COOPER, W. W.: *The Stepping Stone Method of Explaining Linear Programming Calculations in Transportation Problems*, Man. Sci. 1 (1954–55).
- [3] DANTZIG, G. B.: *Maximization of a Linear Function of Variables Subject to Linear Inequalities*. In: KOOPMANS, T. C., *Activity Analysis of Production and Allocation*, chap. 20 (Wiley, New York 1951).
- [4] DANTZIG, G. B., *Linear Programming Under Uncertainty*, Man. Sci. 1 (1954–55).
- [5] GOMORY, R., *An Algorithm for Integer Solutions to Linear Programming*, Bull. Amer. Math. Soc. 64 (1958).
- [6] KEMENY, J. G., SNELL, J. L., and THOMSON, G. L., *Introduction to Finite mathematics* (Prentice-Hall, Inc. 1957).
- [7] KRELLE, W., und KÜNZI, H., *Lineare Programmierung* (Verlag Industrielle Organisation, Zürich 1959).
- [8] KÜNZI, H., P. und KRELLE, W., *Nichtlineare Programmierung* (erscheint bei Springer 1961).
- [9] SASIENI, M., YASPER, A., FRIEDMAN, L., *Operations Research, Methods and Problems* (John Wiley & Sons, Inc., Publishers).
- [10] VAJDA, S., *Lineare Programmierung (Beispiele)*. Aus dem Englischen übertragen von H. P. KÜNZI (Verlag Industrielle Organisation, Zürich 1960).
- [11] WOLFE, PH., *The Simplex Method for Quadratic Programming*, Econometrica 27 (1959).