Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 15 (1960)

Heft: 3

Artikel: Elementare Kombinatorik und Topologie

Autor: Hadwiger, H.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-20711

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrer

Publiziert mit Unterstützung des Schweizerischen Nationalfonds
zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung

El. Math. Band XV Nr. 3 Seiten 49–72 Basel, 10. Mai 1960

Elementare Kombinatorik und Topologie

Es gibt eine Gruppe von Abbildungs- und Überdeckungssätzen, die sich wie beispielsweise das Theorem von BORSUK-ULAM – um einen charakteristischen Satz der erwähnten Gruppe zu nennen – auf Sphären und euklidische Räume beziehen, die durch ihre bestechend einfache Formulierbarkeit und durch die elementaren stetigkeitsgeometrischen Verwendungsmöglichkeiten einen besonderen Anreiz auszuüben vermögen. Im Rahmen der Topologie ergeben sich alle diese Aussagen einheitlich als einfachste, sich auf die erwähnten speziellen Räume beziehenden Korollarien allgemeiner Sätze, die den dort üblichen algebraisch-topologischen Methoden verpflichtet sind.

Sicher verdient aber auch die Frage einiges Interesse, inwieweit es möglich ist, direkte und möglichst elementare Zugänge zu diesen Sätzen zu gewinnen. Es handelt sich hierbei nur darum, eine einzige passierbare Stelle zu finden, da man aus jedem Satz der speziell in Betracht gezogenen Gruppe jeden andern auf routinemässige Weise herleiten kann, wobei lediglich die üblichen Schlüsse mit kompakten Punktmengen und stetigen Funktionen ausreichen und keine spezifisch topologischen Betrachtungen mehr erforderlich sind. In diesem Sinne enthalten alle diese Sätze den gleichen «topologischen Kern», und Versuche mögen lohnend sein, diesen gemeinsamen wesentlichen Gehalt zu isolieren und auf die einfachste noch mögliche Form zu bringen. Dieses Ziel hat unseres Erachtens TUCKER [1]*) erreicht. Er zeigte nämlich, dass ein sich auf das Punktgitter beziehendes rein kombinatorisches Lemma bereits alles enthält, was für eine schulmässige Herleitung der hier einschlägigen Tatsachen erforderlich ist.

Anschliessend haben später KY FAN [2] und in jüngster Zeit auch DEBRUNNER [3] kombinatorische Ziffernsätze dieser Art bewiesen, die sich auf Eckpunktsmengen von Simplizialzerlegungen beziehen.

Nun hat kürzlich TUCKER [4] diese Studien neu aufgegriffen und sein Lemma, das sich ursprünglich lediglich auf den ebenen Sonderfall bezog, in etwas erweiterter Form und n-dimensional bewiesen. Damit ist eine Zurückführbarkeit topologischer Sachverhalte auf rein kombinatorische Tatbestände im Bereiche der ganzen Zahlen aufgedeckt.

Der Verfasser will mit dem vorliegenden Aufsatz die Leser unserer Zeitschrift mit dem Tuckerschen Lemma bekannt machen, das in seiner neusten Fassung als Aus-

*) Die Ziffern in den eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 60.

gangspunkt für die elementare Herleitung einiger ausgewählter Sätze der von uns ins Auge gefassten Gruppe dienen soll. Die erzielten Ergebnisse sind zwar grösstenteils bekannt und auch mit solchen verwandt, die KY FAN aus seinem Ziffernsatz gewonnen hat. Dagegen ist vielleicht die in unserem Zusammenhang erreichte Variante zum Satz von BORSUK-ULAM neu; sie berührt sich mit neueren Resultaten von SONNEBORN [5].

I. Erklärungen und Bezeichnungen

Es sei n eine natürliche Zahl, und E^{n+1} bezeichne den $(n+1)$-dimensionalen euklidischen *Raum*. Bezogen auf ein orthogonales cartesisches Koordinatensystem mit dem Ursprung O werden *Punkte* $p \in E^{n+1}$ mit

$$p = p(x_0, \dots, x_n) \tag{1}$$

durch die $n+1$ Koordinaten x_ν $(\nu = 0, 1, \dots, n)$ charakterisiert. Die n-dimensionale *Sphäre* S^n ist die Randfläche der Einheitskugel im E^{n+1} um den Ursprung O, also die durch

$$S^n = \{p;\ x_0^2 + \cdots + x_n^2 = 1\} \tag{2}$$

gekennzeichnete Punktmenge. Das *Punktgitter* G^{n+1} im E^{n+1} ist die Menge der Punkte mit ganzzahligen Koordinaten, also

$$G^{n+1} = \{p;\ x_\nu \text{ ganz } (\nu = 0, 1, \dots, n)\}\,. \tag{3}$$

Ist s eine natürliche Zahl, so werde unter dem *Gitterwürfel* W_s^{n+1} die Teilmenge des Punktgitters

$$W_s^{n+1} = \{p;\ x_\nu \text{ ganz},\ -s \leq x_\nu \leq s\ (\nu = 0, 1, \dots, n)\} \tag{4}$$

verstanden, also die Menge derjenigen Gitterpunkte von G^{n+1}, die dem achsenparallel liegenden abgeschlossenen Würfel V_s^{n+1} der Seitenlänge $2s$ mit Mittelpunkt O angehören.

Diejenigen Gitterpunkte von W_s^{n+1}, für die in der Kennzeichnung (4) in wenigstens einer der für die $n+1$ Koordinaten x_ν gültigen Ungleichungen Gleichheit besteht, bilden den *Gitterwürfelrand* H_s^n. Es handelt sich um die Menge der Gitterpunkte von G^{n+1}, die auf der Randfläche des Würfels V_s^{n+1} liegen. Es sei weiter $(a_0, \dots, a_n)$ ein Gitterpunkt. Diejenigen Gitterpunkte, die der Charakterisierung

$$I^{n+1} = \{p;\ a_\nu \leq x_\nu \leq a_\nu + 1\,,\ x_\nu \text{ ganz } (\nu = 0, \dots, n)\} \tag{5}$$

entsprechen, bilden einen *Fundamentalgitterwürfel* I^{n+1}. Er besteht aus den 2^{n+1} Eckpunkten des dem Gitterpunkt $(a_0, \dots, a_n)$ assoziierten Einheitswürfels. – Zwei Punkte $p = (x_0, \dots, x_n)$ und $p^* = (-x_0, \dots, -x_n)$ heissen *antipodisch*. Zwei Punktmengen A und A^* *entsprechen sich antipodisch*, wenn $p \in A$ genau dann gilt, wenn auch $p^* \in A^*$ gilt; die eine Menge ist das antipodische Bild der andern. Eine Punktmenge A, die sich selbst antipodisch entspricht, so dass also $A = A^*$ ist, nennen wir kurz *antipodisch*.

Der Antipodismus wird nachfolgend in erster Linie für Gitterpunkte des Würfelrandes H_s^n und für Punktmengen der Sphäre S^n in Anspruch genommen.

Es sei k eine natürliche Zahl. Unter einer $(k+1)$-*Bezifferung* φ des Gitterwürfels W_s^{n+1} wollen wir hier eine eindeutige Abbildung der Gitterpunktsmenge W_s^{n+1} in die Menge Z_{k+1} der $2k+2$ Ziffern $\pm 1, \pm 2, \ldots, \pm (k+1)$ verstehen; jedem $p \in W_s^{n+1}$ ist also eine Ziffer $\varphi(p) \in Z_{k+1}$ zugeordnet.

Die vorstehend erklärten Begriffe werden für die Formulierung der Satzaussagen benötigt. Für die Beweisführungen stellen wir noch die folgenden Hilfsbegriffe bereit: Es bezeichne $d(p, q)$ die euklidische *Distanz* zweier Punkte $p, q \in E^{n+1}$, die wir auch für Punktepaare der Sphäre $S^n \subset E^{n+1}$ in Anspruch nehmen wollen. Ist $C \subset E^{n+1}$ eine beschränkte Punktmenge, so ist der *Durchmesser* $D(C)$ von C durch

$$D(C) = \sup d(p, q) \quad [p, q \in C] \tag{6}$$

definiert. Wir benötigen noch die äussere sphärische *Parallelmenge* A_σ einer Punktmenge $A \subset S^n$ der Spanne $\sigma > 0$, die wir hier durch

$$A_\sigma = \{p \in S^n;\, d(p, q) < \sigma,\ q \in A\} \tag{7}$$

definieren. Die *Distanz* $d(A, B)$ zweier Punktmengen $A, B \subset S^n$ wird durch

$$d(A, B) = \inf \sigma \,[A \subset B_\sigma, B \subset A_\sigma] \tag{8}$$

eingeführt. Es gilt der bekannte *Auswahlsatz*, wonach sich aus jeder nichtendlichen Menge von kompakten Teilmengen der S^n eine Teilfolge von Mengen auswählen lässt, die bezüglich der oben gegebenen Metrik gegen eine nichtleere kompakte Grenzmenge von S^n konvergieren.

Wir benötigen noch den *Komplementäroperator* K, der eine Punktmenge $U \subset S^n$ in die komplementäre Menge $KU = S^n - U$ überführt, und der den beiden Regeln $K(U \cup V) = KU \cap KV$ und $K(U \cap V) = KU \cup KV$ genügt.

II. Tuckers Lemma

Nachfolgend formulieren wir nun einen rein kombinatorischen Satz, der sich auf besondere Bezifferungen von Gitterwürfeln bezieht und der, wie einleitend vermerkt, den wesentlichen topologischen Gehalt einer Gruppe von Sätzen auf elementar kombinatorische Weise zu interpretieren vermag. Es handelt sich um das von TUCKER entdeckte

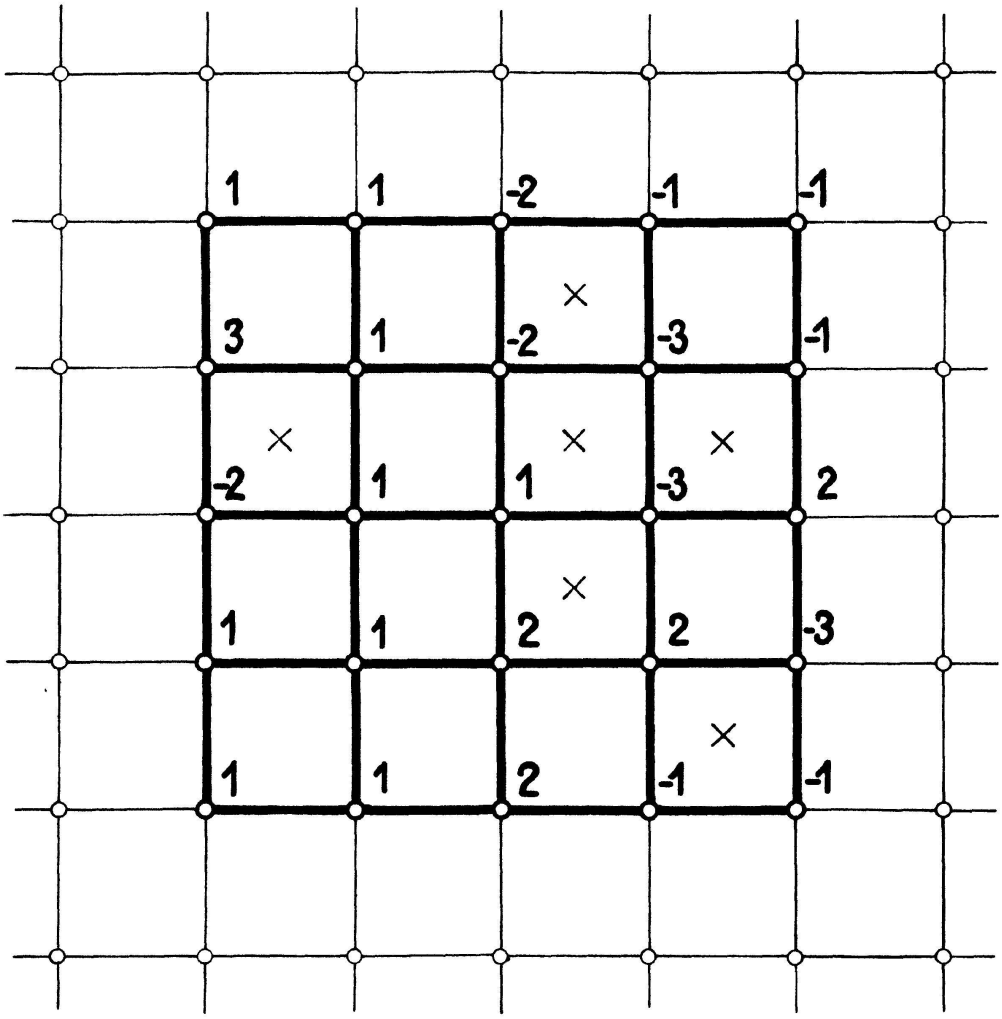
Lemma. Voraussetzung: *Es sei φ eine $(k+1)$-Bezifferung des $(n+1)$-dimensionalen Gitterwürfels W_s^{n+1} mit den beiden Eigenschaften:*

a) *Je zwei antipodische Gitterpunkte des Gitterwürfelrandes H_s^n sind gegengleich beziffert, so dass $\varphi(p^*) = -\varphi(p)$ für je zwei Punkte $p, p^* \in H_s^n$ gilt;*

b) *kein Fundamentalwürfel des Gitterwürfels weist zwei gegengleich bezifferte Gitterpunkte auf, so dass also für je zwei Punkte $p, q \in I^{n+1} \subset W_s^{n+1}$ stets $\varphi(p) \neq -\varphi(q)$ gilt.*

Behauptung: *Es lassen sich Fundamentalwürfel finden, die wenigstens $n+2$ verschieden bezifferte Gitterpunkte enthalten, so dass also mit passend gewählten Gitterpunkten $p_i \in I^{n+1} \subset W_s^{n+1}$ $(i = 0, 1, \ldots, n+1)$ stets $\varphi(p_i) \neq \varphi(p_j)$ $(i \neq j)$ gilt. Insbesondere muss $k \geqslant n+1$ sein.*

Figur 1 illustriert eine Bezifferung eines Gitterquadrates von der verlangten Art im ebenen Fall. Es ist $n = 1$, $s = 2$ und $k = 2$ gewählt. Es lassen sich sechs Fundamentalgitterquadrate (im Bild angekreuzt) finden, welche die mit dem Lemma behauptete Eigenschaft aufweisen.



Figur 1

III. Zwei Sätze über antipodische Überdeckung der Sphäre

Es soll nun mit einem besonders charakteristischen Beispiel dargetan werden, wie aus dem oben erklärten kombinatorischen Lemma auf lediglich schulmässige Weise Sätze topologischer Art über abgeschlossene Überdeckungen der Sphäre hergeleitet werden können.

Wir wählen zwei sich in einem gewissen Sinn dual entsprechende Aussagen aus der Gruppe der Antipodensätze, die bekannte hier einschlägige Tatsachen etwas verallgemeinern und in einer passenden äusseren Form ausdrücken, die den angedeuteten Dualismus deutlich hervortreten lässt.

Satz I. Voraussetzung: *Es liegen k abgeschlossene Punktmengen der n-dimensionalen Sphäre vor, also*

$$A_\nu \subset S^n \quad (\nu = 1, \dots, k) \tag{a}$$

abgeschlossen, wo jede mit ihrem antipodischen Bild disjunkt ist,

$$A_\nu \cap A_\nu^* = \varnothing \quad (\nu = 1, \dots, k), \tag{b}$$

und wobei alle insgesamt die Sphäre überdecken, so dass

$$(A_1 \cup A_1^*) \cup \ldots \cup (A_k \cup A_k^*) = S^n \tag{c}$$

gilt. Behauptung: *Es ist $k \geqslant n+1$, und es gibt $n+1$ Indizes ν_i $(1 \leqslant \nu_0 < \nu_1 < \ldots < \nu_n \leqslant k)$ derart, dass*

$$(A_{\nu_0} \cup A_{\nu_0}^*) \cap \ldots \cap (A_{\nu_n} \cup A_{\nu_n}^*) \neq \varnothing \tag{z}$$

ausfällt.

Setzen wir insbesondere $k = n$, so sind die Voraussetzungen (a), (b) und (c) nicht miteinander verträglich, da die Behauptung (z) mit $k \geqslant n+1$ andernfalls einen Widerspruch darstellen müsste. Es gilt demnach

Korollar I. Voraussetzung:

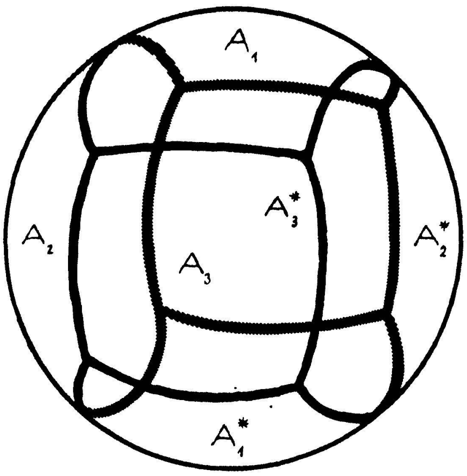
$$A_\nu \subset S^n \quad (\nu = 1, \ldots, n) \text{ } \textit{abgeschlossen,} \tag{a}$$

$$A_\nu \cap A_\nu^* = \varnothing \quad (\nu = 1, \ldots, n)\,. \tag{b}$$

Behauptung:

$$(A_1 \cup A_1^*) \cup \ldots \cup (A_n \cup A_n^*) \neq S^n. \tag{z}$$

Der mit Satz I ausgedrückte Sachverhalt ist in einem noch etwas allgemeineren Resultat von KY FAN [6] enthalten. Dem Korollar I lässt sich folgende bekannte Tatsache entnehmen: Ist die Sphäre S^n von n abgeschlossenen Punktmengen überdeckt, so enthält wenigstens eine dieser Mengen ein antipodisches Punktepaar. Dies ist der Antipodensatz von LUSTERNIK und SCHNIRELMANN [7].



Figur 2

Figur 2 gibt zu Satz I im Sonderfall $n = 2$, $k = 3$ eine Illustration. Wie das Bild anzeigen soll, weisen die drei Mengenpaare A_ν, A_ν^* $(\nu = 1, 2, 3)$ einen nichtleeren aus vier antipodischen Punktepaaren bestehenden gemeinsamen Durchschnitt auf.

Satz II. Voraussetzung: *Es liegen k abgeschlossene Punktmengen der n-dimensionalen Sphäre vor, also*

$$B_\nu \subset S^n \quad (\nu = 1, \ldots, k) \text{ } \textit{abgeschlossen,} \tag{a}$$

wo jede zusammen mit ihrem antipodischen Bild die Sphäre überdeckt, so dass

$$B_\nu \cup B_\nu^* = S^n \quad (\nu = 1, \ldots, k) \tag{b}$$

gilt, und wobei alle Mengen und ihre antipodischen Bilder einen leeren gemeinsamen Durchschnitt aufweisen, so dass

$$(B_1 \cap B_1^*) \cap \ldots \cap (B_k \cap B_k^*) = \varnothing \tag{c}$$

gilt. Behauptung: *Es ist $k \geqslant n + 1$, und es gibt $n + 1$ Indizes ν_i $(1 \leq \nu_0 < \nu_1 < \cdots < \nu_n \leqslant k)$ derart, dass*

$$(B_{\nu_0} \cap B_{\nu_0}^*) \cup \ldots \cup (B_{\nu_n} \cap B_{\nu_n}^*) \neq S^n \tag{z}$$

ausfällt.

In analoger Weise wie oben bemerken wir, dass mit $k = n$ auch die Voraussetzungen (a), (b) und (c) dieses Satzes nicht miteinander verträglich sind. Demnach gilt analog

Korollar II. Voraussetzung:

$$B_\nu \subset S^n \quad (\nu = 1, \ldots, n) \textit{ abgeschlossen,} \tag{a}$$

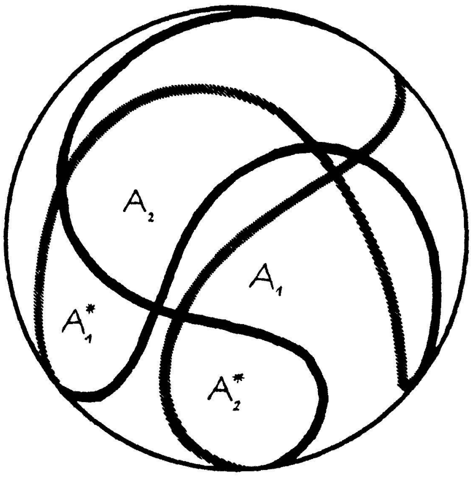
$$B_\nu \cup B_\nu^* = S^n \quad (\nu = 1, \ldots, n). \tag{b}$$

Behauptung:

$$(B_1 \cap B_1^*) \cap \ldots \cap (B_n \cap B_n^*) \neq \varnothing. \tag{z}$$

Hier ist es dem Verfasser nicht bekannt, ob die mit Satz II und Korollar II ausgedrückten Tatsachen im zuständigen Fachschrifttum schon festgestellt und formuliert worden sind.

Figur 3 gibt eine Illustration zu Korollar II im Sonderfall $n = 2$. Die vier Mengen A_ν, A_ν^* $(\nu = 1, 2)$ haben einen nichtleeren, aus einem antipodischen Punktepaar bestehenden Durchschnitt.



Figur 3

Beweis I: Die Gegenannahme besagt, dass für jede Indizeskombination

$$1 \leq \nu_0 < \nu_1 < \cdots < \nu_n \leq k$$

stets

$$(A_{\nu_0} \cup A_{\nu_0}^*) \cap \cdots \cap (A_{\nu_n} \cup A_{\nu_n}^*) = \varnothing \tag{9}$$

ist. Man kann $\varrho > 0$ so klein wählen, dass die folgenden Tatbestände erfüllt werden: Ist für eine Punktmenge $C \subset S^n$ eine der n Bedingungen

$$C \cap A_\nu \neq \varnothing, \quad C \cap A_\nu^* \neq \varnothing \quad (\nu = 1, \ldots, n) \tag{10}$$

oder eine der $k!/(k-n-1)!\ (n+1)!$ Bedingungen

$$C \cap (A_{\nu_i} \cup A^*_{\nu_i}) \neq \varnothing \quad (i=0,\ldots,n) \quad [1 \leq \nu_0 < \nu_1 < \cdots < \nu_n \leq k] \tag{11}$$

erfüllt, so kann in jedem einzelnen Fall auf

$$D(C) > \varrho \tag{12}$$

geschlossen werden. Dies folgt aus den Voraussetzungen (a) und (b) und aus der Gegenannahme (9). Wir ziehen nun den mit der Sphäre S^n konzentrischen Gitterwürfel W^{n+1}_s [vgl. (4)] und den Gitterwürfelrand H^n_s in Betracht und wählen $s \geqslant 1$ so gross, dass für jeden Fundamentalgitterwürfel I^{n+1} [vgl. (5)] die Bedingung

$$D(\zeta\,[I^{n+1} \cap H^n_s]) \leq \varrho \tag{13}$$

erfüllt wird, wo ζ die Zentralprojektion im E^{n+1} bezüglich O auf S^n bedeutet und D den Durchmesser anzeigt [vgl. (6)]; die Durchmesserbedingung sei auch erfüllt, wenn die fragliche Punktmenge leer ist. – Nun konstruieren wir eine $(k+1)$-Bezifferung φ von W^{n+1}_s in der folgenden Weise: Für einen im Innern liegenden Gitterpunkt setze man

$$\varphi(p) = k+1 \quad [p \in W^{n+1}_s,\ p \notin H^n_s]\,. \tag{14}$$

Für je zwei auf dem Rand antipodisch liegende Punkte kann man den den Antipodismus anzeigenden Stern so anbringen, dass für ein passendes μ die Beziehung

$$\zeta\, p \in A_\mu,\ \zeta\, p^* \in A^*_\mu \tag{15}$$

besteht. Dass wenigstens ein solches μ zur Verfügung steht, folgt aus Voraussetzung (c). Für die auf dem Rand liegenden Gitterpunkte gelte nun die Bezifferungsvorschrift

$$\varphi(p) = \mu,\ \varphi(p^*) = -\mu \quad [p, p^* \in H^n_s,\ \zeta\, p \in A_\mu,\ \zeta\, p^* \in A^*_\mu]. \tag{16}$$

Die Bezifferung φ besitzt nun die im Lemma vorausgesetzten Eigenschaften (a) und (b). In der Tat: Voraussetzung (a) resultiert mit (16). Wäre weiter (b) nicht erfüllt, gäbe es also einen $I^{n+1} \subset W^{n+1}_s$ derart, dass für $p, q \in I^{n+1}$ $\varphi(p) = -\varphi(q)$ wäre, so müsste wegen (14) offensichtlich $p, q \in I^{n+1} \cap W^{n+1}_s$ und $\varphi(p) = \mu$, $\varphi(q) = -\mu$ $(1 \leq \mu \leq k)$ gelten.

Nach (15) ergäbe sich weiter

$$C \cap A_\mu \neq \varnothing\,, \quad C \cap A^*_\mu \neq \varnothing\,, \tag{17}$$

wobei $C = \zeta\,[I^{n+1} \cap H^n_s]$ gesetzt ist. Nach (10)/(12) folgt einerseits $D(C) > \varrho$, nach (13) aber andererseits $D(C) \leq \varrho$, was nicht angeht. Es gilt also die Behauptung des Lemmas, wonach wenigstens ein $I^{n+1} \subset W^{n+1}_s$ $n+2$ verschieden bezifferte Gitterpunkte enthalten muss. Mit Berücksichtigung von (14) folgt, dass $I^{n+1} \cap H^n_s$ $n+1$ verschieden bezifferte Gitterpunkte aufweist, so dass also für $p_i \in I^{n+1} \cap W^{n+1}_s$ $(i=0,\ldots,n)$ $\varphi(p_i) = \pm \nu_i$ gilt, wobei $1 \leq \nu_0 < \nu_1 < \cdots < \nu_n \leq k$ ist. Nach (16) folgt $\zeta\, p_i \in A_{\nu_i} \cup A^*_{\nu_i}$ $(i=0,\ldots,n)$ und mit $C = \zeta\,[I^{n+1} \cap W^{n+1}_s]$ resultiert

$$C \cap (A_{\nu_i} \cup A^*_{\nu_i}) \neq \varnothing \quad (i=0,\ldots,n)\,. \tag{18}$$

Hieraus folgt nach (11)/(12) einerseits $D(C) > \varrho$, aber nach (13) andererseits $D(C) \leq \varrho$. Damit ist die Gegenannahme auf einen Widerspruch geführt und Satz I bewiesen.

Beweis II. Man wähle $\sigma > 0$ so klein, dass die Voraussetzung (c) auch noch für die Parallelmengen $C_\nu = (B_\nu)_\sigma$ $(\nu = 1, \ldots, k)$ an Stelle der B_ν gültig bleibt. Bezeichnet K den Komplementäroperator, so erfüllen die Punktmengen $A_\nu = KC_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, k)$ die Voraussetzungen (a), (b) und (c) von Satz I. Man beachte insbesondere, dass C_ν bezüglich S^n offen, A_ν aber wieder abgeschlossen ist. Im übrigen verwende man die in Abschnitt I für K notierten Operationsregeln. Überträgt man sodann die sich auf die A_ν beziehende Behauptung (z) von Satz I wieder auf die $B_\nu \subset C_\nu = KA_\nu$, so resultiert die Behauptung (z) von Satz II, womit dieser bewiesen ist.

IV. Zwei Sätze über stetige Funktionen auf der Sphäre

Aus den beiden im vorstehenden Abschnitt bewiesenen Sätzen über abgeschlossene antipodische Überdeckungen der Sphäre lassen sich beispielsweise weitere Aussagen über stetige Funktionen gewinnen. Dies soll nachfolgend für zwei besonders charakteristische Fälle gezeigt werden.

Satz III. Voraussetzung: (a) *Es liegen k auf der n-dimensionalen Sphäre S^n definierte stetige Funktionen $f_\nu(p)$ $(\nu = 1, \ldots, k)$ vor.* (b) *Zu jedem Punkt $q \in S^n$ lassen sich $k - n$ Indices ν_i $(1 \leq \nu_1 < \cdots < \nu_{k-n} \leq k)$ so finden, dass $f_\nu(q) = f_\nu(q^*)$ für $\nu = \nu_1, \ldots, \nu_{k-n}$ ausfällt; ist $k \leq n$, so fällt diese Voraussetzung dahin.*

Behauptung: *Es existiert ein Punkt $p \in S^n$ so, dass $f_\nu(p) = f_\nu(p^*)$ für alle $\nu = 1. \ldots, k$ gilt.*

Setzen wir insbesondere $k = n$, so fällt die Voraussetzung (b) weg, und es wird ausgesagt, dass n stetige Funktionen auf S^n für zwei passend gewählte antipodische Punkte simultan gleiche Werte annehmen. Diesen wohlbekannten Sachverhalt kann man auf eine sehr übliche abbildungsmässige Weise ausdrücken, wenn man die n Funktionswerte als cartesische Koordinaten in einem E^n deutet. Es ergibt sich dann

Korollar III. Ist *Φ eine stetige Abbildung der S^n in den E^n, so gibt es ein antipodisches Punktepaar p, $p^* \in S^n$, das in den nämlichen Punkt $q \in E^n$ abgebildet wird, so dass also $\Phi(p) = \Phi(p^*) = q$ ist.*

Dies ist der bekannte Satz von BORSUK-ULAM [8].

Eine Variante hierzu wird sich aus dem nachstehend formulierten zweiten Satz über stetige Funktionen auf der Sphäre ergeben.

Satz IV. Voraussetzung: (a) *Es liegen $n - 1$ auf der n-dimensionalen Sphäre S^n definierte stetige Funktionen $f_\nu(p)$ $(\nu = 1, \ldots, n - 1)$ vor.* (b) *Für jeden Punkt $p \in S^n$ soll $f_\nu(p) = f_\nu(p^*)$ $(\nu = 1, \ldots, n - 1)$ gelten.*

Behauptung: *Es existiert ein antipodisches Kontinuum $C \subset S^n$, über dem alle Funktionen simultan konstant ausfallen, indem sich $n - 1$ Funktionswerte ξ_ν angeben lassen, so dass für alle Punkte $p \in C$ die Beziehungen $f_\nu(p) = f_\nu(p^*) = \xi_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, n - 1)$ gelten.*

Nennen wir eine Abbildung Φ der Sphäre in einen euklidischen Raum *gerade*, wenn je zwei antipodische Punkte p und p^* das gleiche Bild $\Phi(p) = \Phi(p^*)$ aufweisen, so resultiert aus unserem Satz

Korollar IV. *Ist Φ eine stetige und gerade Abbildung der S^n in den E^{n-1}, so existiert ein antipodisches Kontinuum $C \subset S^n$, das in den nämlichen Punkt $q \in E^{n-1}$ abgebildet wird, so dass also $\Phi(C) = \Phi(C^*) = q$ ist.*

Unser Korollar ist für $n = 1$ trivial. Im Fall $n = 2$ folgt die Aussage auch aus einem Ergebnis von SONNEBORN [9], der zeigte, dass sich bei einer stetigen, nicht notwendig geraden Abbildung Φ der S^2 in den E^1 ein Kontinuum $C \subset S^2$ finden lässt, das in einen Punkt abgebildet wird, und das zwei antipodische Punkte $p, p^* \in S^2$ enthält. Ist Φ gerade, so muss offenbar C antipodisch sein. Dieser Sonnebornsche Satz lässt sich aber für $n > 3$ sicher nicht auf stetige Abbildungen der S^n auf den E^{n-1} ausdehnen. In der Tat konstruierte SONNEBORN [10] stetige Abbildungen der S^n in den E^m ($n \leq 2m - 1$, $m \geq 1$), wobei kein antipodische Punkte enthaltendes Teilkontinuum von S^n in einen Punkt des E^m abgebildet ist. Das für gerade Abbildungen erwiesene Korollar IV ist also nicht eine Folgerung eines sinngemäss für beliebige Abbildungen gültigen allgemeineren Satzes der oben ins Auge gefassten Art.

Beweis III. Wird

$$B_\nu = \{p \in S^n;\ f_\nu(p) \geqslant f_\nu(p^*)\} \quad (\nu = 1, \ldots, k) \tag{18}$$

gesetzt, so ist die Gegenannahme mit

$$(B_1 \cap B_1^*) \cap \cdots \cap (B_k \cap B_k^*) = \varnothing \tag{19}$$

gleichbedeutend, so dass die Voraussetzung (c) von Satz II erfüllt wird. Da das gleiche auch für (a) und (b) zutrifft, gilt die Behauptung (z) dieses Satzes, wonach für $n + 1$ passend gewählte Indizes ν_i $[1 \leq \nu_0 < \cdots < \nu_n \leq k]$ ein Punkt $q \in S^n$ derart existiert, dass die $n + 1$ Bedingungen

$$q \notin B_{\nu_i} \cap B_{\nu_i}^* \quad (i = 0, \ldots, n) \tag{20}$$

simultan erfüllt sind. Nach Voraussetzung (b) des zu beweisenden Satzes III gibt es zu diesem Punkt q auch $k - n$ andere Indizes μ_j $[1 \leq \mu_1 < \cdots < \mu_{k-n} \leq k]$ so, dass die $k - n$ Bedingungen

$$q \in B_{\mu_j} \cap B_{\mu_j}^* \quad (j = 1, \ldots, k - n) \tag{21}$$

simultan gelten. Nach (20) und (21) müssen aber insgesamt $k + 1$ verschiedene Indizes aufweisbar sein, was nicht der Fall ist. Also ist die getroffene Gegenannahme falsch, und Satz III ist bewiesen.

Beweis IV. Werden die $n - 1$ Funktionswerte auf S^n als cartesische Koordinaten in einem E^{n-1} interpretiert, also

$$q = q(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1});\ \xi_\nu = f_\nu(p) \quad (\nu = 1, \ldots, n - 1)\,, \tag{22}$$

so wird damit durch

$$q = \Phi(p) \quad [p \in S^n, q \in E^{n-1}] \tag{23}$$

eine stetige Abbildung Φ der S^n in den E^{n-1} definiert. Es sei $U \subset E^{n-1}$ die kompakte Bildmenge von S^n. Für eine kompakte Teilmenge $V \subset U$ bezeichne $\Phi^{-1}(V) \subset S^n$ die wegen der Stetigkeit von Φ ebenfalls kompakte Urbildmenge von V, also

$$\Phi^{-1}(V) = \{p \in S^n;\ \Phi(p) \in V\}\,. \tag{24}$$

Die Behauptung besagt nun, dass ein Punkt $q \in U$ so existiert, dass $\Phi^{-1}(q)$ ein antipodisches Kontinuum C als Teilmenge enthält. Wir treffen nun die Gegenannahme, wonach sich also kein solcher Punkt aufweisen lässt. Es kann dann ein $\varrho > 0$ so klein gewählt werden, dass sich die folgenden Tatbestände einstellen: Es gibt eine Überdeckung

$$U = U_1 \cup \cdots \cup U_r \tag{25}$$

von U durch r kompakte Teilmengen $U_\nu \subset U$ $(\nu = 1, \ldots, r)$, deren Durchmesser der Feinheitsbedingung

$$D(U_\nu) < \varrho \quad (\nu = 1, \ldots, r) \tag{26}$$

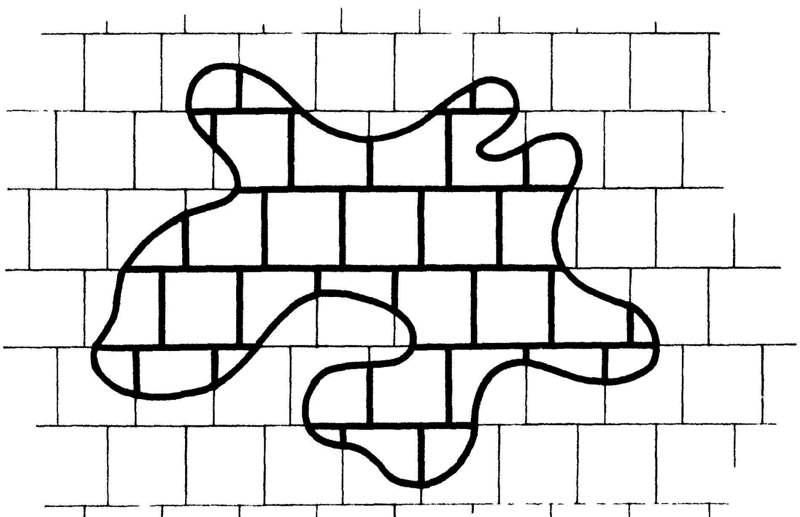
genügen, wobei die Überdeckungsordnung im E^{n-1} höchstens n ist, so dass für je $n+1$ verschiedene Indizes ν_i die Bedingung

$$U_{\nu_0} \cap \cdots \cap U_{\nu_n} = \varnothing \quad [1 \leq \nu_0 < \cdots < \nu_n \leqslant r] \tag{27}$$

erfüllt ist und wo schliesslich noch verlangt ist, dass keine der r Urbildmengen

$$C_\nu = \Phi^{-1}(U_\nu) \quad (\nu = 1, \ldots, r) \tag{28}$$

ein antipodisches Teilkontinuum enthält.



Figur 4

Dass für jedes $\varrho > 0$ eine Überdeckung (25), die den Forderungen (26) und (27) genügt, gefunden werden kann, ist ziemlich trivial; im Falle $n - 1 = 2$ wird mit Figur 4 gezeigt, wie eine naheliegende Quadratparkettierung der Ebene eine Überdeckung einer kompakten ebenen Punktmenge induziert, die den gestellten Forderungen entspricht. Es muss noch eingesehen werden, dass insbesondere ϱ so klein wählbar ist, dass auch Forderung (28) erfüllt wird. In der Tat: Wäre dies für kein $\varrho > 0$ der Fall, so könnte man wegen der Kompaktheit von U in der üblichen Weise auf die Existenz eines Punktes $q \in U$ schliessen, dem eine Folge kompakter Teilmengen $W_\lambda \subset U$ $(\lambda = 1, 2, \ldots)$ derart zugehört, dass die Konvergenz $W_\lambda \to q$ $(\lambda \to \infty)$ bezüglich der in Abschnitt I erörterten Mengenmetrik besteht, und wobei $D(W_\lambda) \to 0$ $(\lambda \to \infty)$ gilt und endlich noch die Sachlage besteht, dass jede Urbildmenge $M_\lambda = \Phi^{-1}(W_\lambda)$ ein antipodisches Teilkontinuum $N_\lambda \subset M_\lambda$ enthält. Nach dem für kompakte Teilmengen der S^n gültigen Auswahlsatz darf man ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $N_\lambda \to N$ $(\lambda \to \infty)$ gilt, wo N eine kompakte Limesmenge ist, da man sich andernfalls auf eine passende Teilfolge beziehen könnte. Nun ist aber offenbar N wieder ein antipodisches Kontinuum, da sich sowohl antipodische Symmetrie als auch Zusammenhang von den N_λ auf die Limesmenge N übertragen lassen. Aus unserer Konstruktion folgt mit Rücksicht auf die Stetigkeit von Φ leicht $\Phi(N) = q$, also $N \subset \Phi^{-1}(q)$, im Widerspruch zur getroffenen Gegenannahme. Damit ist die simultane Erfüllbarkeit von (26) bis (28) dargetan.

Wir bemerken noch, dass C_ν kompakt ist, und da nach Voraussetzung (b) $\Phi(p) = \Phi(p^*)$ ist, auch antipodisch ausfällt, so dass also

$$C_\nu = C_\nu^* \quad (\nu = 1, \ldots, r) \tag{29}$$

gilt. Ferner wird wegen (25) auch

$$C_1 \cup \cdots \cup C_r = S^n \tag{30}$$

sein. Es lässt sich weiter ein $\sigma > 0$ so klein wählen, dass die

$$B_\nu = H(C_\nu)_\sigma \subset S^n \quad (\nu = 1, \ldots, r) \tag{31}$$

immer noch keine antipodischen Teilkontinua enthalten; hier bezeichnet C_σ die Parallelmenge von C (Vgl. Abschnitt I), und der Operator H soll die Punktmenge D in ihre abgeschlossene Hülle HD überführen. Ferner soll die weitergehende Forderung erfüllt werden, dass für je $n+1$ verschiedene Indizes ν_i stets noch

$$\Phi(B_{\nu_0}) \cap \cdots \cap \Phi(B_{\nu_n}) = \varnothing \quad [1 \leqslant \nu_0 < \cdots < \nu_n \leqslant r] \tag{32}$$

gilt. Die simultane Erfüllbarkeit beider Bedingungen (31) und (32) bei ausreichend kleinem σ ergibt sich mit (27) und (28) in Verbindung mit der Stetigkeit von Φ. Aus (29) und (31) folgt, dass

$$B_\nu = B_\nu^* \ (\nu = 1, \ldots, r) \tag{33}$$

ausfällt. Ferner weist jede kompakte Punktmenge B_ν als abgeschlossene Hülle einer Parallelmenge positiver Spanne σ lediglich endlich viele Komponenten, das heisst grösste abgeschlossene und zusammenhängende Teilmengen, auf. Da keine dieser Komponenten antipodisch ist – eine solche wäre ein antipodisches Teilkontinuum – zerfällt B_ν und $2\,s_\nu$ sich paarweise antipodisch entsprechende Komponenten, so dass

$$B_\nu = (A_{\nu 1} \cup A_{\nu 1}^*) \cup \cdots \cup (A_{\nu s_\nu} \cup A_{\nu s_\nu}^*) \tag{34}$$

geschrieben werden kann. Für die $k = s_1 + \cdots + s_r$ auftretenden Komponenten

$$A_{\nu\mu} \ (\nu = 1, \ldots, r; \ \mu = 1, \ldots, s_\nu) \tag{35}$$

gelten die folgenden Beziehungen:

$$A_{\nu\mu} \cap A_{\nu\mu}^* = \varnothing; \ A_{\nu\mu} \cap A_{\nu\lambda} = \varnothing, \ A_{\nu\mu} \cap A_{\nu\lambda}^* = \varnothing \ [\mu \neq \lambda]. \tag{36}$$

Wegen $B_\nu \supset C_\nu$ und (30) resultiert mit der Zerlegung (34) die antipodische Überdeckung

$$(A_{11} \cup A_{11}^*) \cup \cdots \cup (A_{rs_r} \cup A_{rs_r}^*) = S^n. \tag{37}$$

Mit (35), (36) (erste Relation) und (37) sind die Voraussetzungen (a), (b) und (c) von Satz I für die k Mengen $A_{\nu\mu}$ erfüllt. Es gibt nach der Behauptung (z) dieses Satzes also $n+1$ paarweise verschiedene Indizespaare $(\nu_0, \mu_0), \ldots, (\nu_n, \mu_n)$ derart, dass

$$(A_{\nu_0 \mu_0} \cup A^*_{\nu_0 \mu_0}) \cap \cdots \cap (A_{\nu_n \mu_n} \cup A^*_{\nu_n \mu_n}) \neq \emptyset \tag{38}$$

ausfällt. Mit (36) (zweite und dritte Relation) schliesst man leicht, dass bereits die Indizes ν_i paarweise verschieden sein müssen, so dass auf

$$B_{\nu_0} \cap \cdots \cap B_{\nu_n} \neq \emptyset \quad [1 \leq \nu_0 < \cdots < \nu_n \leq r] \tag{39}$$

geschlossen werden kann, was aber mit (32) einen Widerspruch darstellt. Unsere Gegenannahme ist falsch und Satz IV damit bewiesen. H. HADWIGER, Bern

LITERATURVERZEICHNIS

[1] A. W. TUCKER, *Some topological properties of disk and sphere*, Proc. First Canadian Math. Congress (Montreal 1945), 285–309.
[2] KY FAN, *A generalization of Tucker's Combinatorial Lemma with topological applications*. Ann. Math. *56*, 431–437 (1952).
[3] H. DEBRUNNER, Manuskript vom April 1959; unveröffentlicht.
[4] A. W. TUCKER, *A Combinatorial Lemma*. Ankündigung vom September 1959; noch unveröffentlicht.
[5] L. M. SONNEBORN, *Level Sets on Spheres*. Zur Zeit im Druck.
[6] KY FAN, *A generalization of Tucker's Combinatorial Lemma with topological applications*, Ann. Math. *56*. Theorem 1, S. 435 (1952).
[7] Über die hier einschlägige Gruppe der Antipodensätze und ihre Begründung im Rahmen der Topologie vgl. P. ALEXANDROFF–H. HOPF, Topologie I (Julius Springer, Berlin 1935), insbesondere S. 487.
[8] P. ALEXANDROFF–H. HOPF, *Topologie I* (Julius Springer, Berlin 1935, S. 486.
[9] L. M. SONNEBORN, *Level Sets on Spheres*. Ph. D. thesis, California Institute of Technology (1956).
[10] L. M. SONNEBORN. *Level Sets on Spheres*; zur Zeit im Druck.

Geometrische Betrachtungen um eine Apfelschale

An einem langen Winterabend mag es vorkommen, dass man sich in fröhlicher Tafelrunde des «Apfelschalenorakels» erinnert: Geschickte Hände bemühen sich, einen Apfel durch einen schraubenartig herumgeführten Schnitt in einem Zuge zu schälen, worauf das lange Schalenband aufgeworfen wird; aus der Figur, die es nach dem Zurückfallen bildet, wissen dann Kundige den Anfangsbuchstaben des oder der Zukünftigen herauszulesen. Schaltet man jedoch den Zufall aus, indem man den Schalenstreifen flach auf der Tischplatte ausbreitet, so gelangt man stets zu einem «S» in Gestalt einer schönen Doppelspirale. Was kann nun der Geometer hierzu sagen?

1. Dass man den Apfel durch eine *Kugel* idealisieren wird, liegt wohl auf der Hand. Wird ferner die Schneidkante des Messers *gerade* angenommen, so entsteht als Schnittfläche auf jeden Fall eine *Strahlfläche* (Regelfläche); wird überdies die Klingenfläche als *eben* (oder in der Umgebung der Schneidkante wenigstens abwickelbar) vorausgesetzt, dann wird die genannte Strahlfläche im Zuge ihrer Entstehung längs jeder Erzeugenden von einer Ebene berührt, so dass es sich um eine *Torse* handeln muss.