Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 15 (1960)

Heft: 2

Rubrik: Aufgaben

so erkennt man zunächst aus der konstanten Gesamtablenkung $2\sigma + 2\tau = 2\omega$, dass zusammengehörige Spiegeltangenten den festen Winkel $\sphericalangle\, s\, t = \sigma + \tau = \omega$ einschliessen müssen und weiterhin, dass τ den Neigungswinkel von s und $-\sigma$ jenen von t gegen die x-Achse darstellt (Figur 2). Die Spiegelkurve k kann daher als gemeinsame Einhüllende eines geeignet bewegten starren Winkels erzeugt werden. Sucht man für diese Bewegung das Momentanzentrum M auf, das sich im Schnitt der beiden Berührungsnormalen von S und T ergibt, und bestimmt man anschliessend die Fortschreitrichtung des Winkelscheitels R, so findet man hierfür aus einfachen Winkelbeziehungen die Abszissenrichtung x. Nimmt man daher an, dass R die x-Achse durchläuft, und beschreibt man die Bewegung des Winkels $s\, t$ durch Angabe der Scheitelabszisse $X(\tau)$ in Abhängigkeit vom Winkelparameter τ, so hat man nur zu fordern, dass zu $\tau - \omega$ jeweils derselbe Wert gehört: $X(\tau)$ muss daher eine periodische analytische Funktion mit der Periode ω sein, was auch hinreicht. Für die gesuchte Spiegelkurve k erhält man auf diese Weise als Hüllbahn der Tangente s ($x \sin\tau - y \cos\tau = X \sin\tau$) die Parameterdarstellung $x = X(\tau) + X'(\tau) \sin\tau \cos\tau$, $y = X'(\tau) \sin^2\tau$.

Einfache und interessante Spiegelkurven gehören beispielsweise zur Annahme $X = -\operatorname{ctg} m\,\tau$, wobei $m\,\omega = \pi$. Figur 2 illustriert den Fall $m = 4$ $(\omega = \pi/4)$; die betreffende Spiegelkurve 4. Klasse und 6. Ordnung belegt gleichzeitig die Existenz algebraischer Lösungen.

Eine Erweiterung der eingangs erhobenen Fragestellung auf n-malige Reflexion oder auf den Raum liegt auf der Hand. Als Beitrag hierzu sei auf jene kaum bekannte Eigenschaft des elliptischen Paraboloides hingewiesen, derzufolge parallel zur Achse ins Innere einfallende Lichtstrahlen nach dreimaliger Reflexion wieder achsenparallel austreten[4]).

W. Wunderlich, Wien

[4]) W. Wunderlich, *Spiegelung am elliptischen Paraboloid*, Mh. Math. *52*, 13–37 (1948).

Aufgaben

Aufgabe 339. Démontrer que pour tout entier $n > 1$ on a les inégalités

$$2 \leqq \frac{\sigma_k(n) + \varphi_k(n)}{n^k} \leqq \vartheta(n)\,,$$

où $\varphi_k(n)$ désigne le nombre des suites de nombres naturels $\leqq n$, tels que

$$(a_1, a_2, \ldots, a_k, n) = 1,$$

et

$$\sigma_k(n) = \sum_{d/n} d^k, \qquad \vartheta(n) = \sum_{d/n} 1\,.$$

Démontrer que pour les nombres n composés chacune des égalités est exclue.

A. Makowski, Varsovie

Solution: On a

$$\varphi_k(n) = \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) d^k\,,$$

d'où, puisque $1 + \mu(d) \geqq 0$,

$$\frac{\sigma_k(n) + \varphi_k(n)}{n^k} = \sum_{d/n} \left(1 + \mu\left(\frac{n}{d}\right)\right) \left(\frac{d}{n}\right)^k = \sum_{d/n} (1 + \mu(d))\, \frac{1}{d^k} \geqq 1 + \mu(1) = 2\,.$$

D'autre part

$$\sum_{d|n} (1 + \mu(d)) \frac{1}{d^k} \leqq \sum_{d|n} (1 + \mu(d)) = \sum_{d|n} 1 = \vartheta(n) .$$

A. SCHINZEL, Varsovie

Dieselbe Lösung sandte L. CARLITZ (Durham, N. C., USA). Eine weitere Lösung legte H. MEILI (Winterthur) vor.

Aufgabe 340. Gegeben sei eine feste Gerade g. Gesucht werden alle analytischen Kurven C mit folgender Eigenschaft: Sind P_1 und P_2 die Schnittpunkte von C mit irgendeinem aus zwei zu g parallelen Geraden p_1 und p_2 bestehenden «Streifen», so ist die Fläche des vom Kurvenbogen $P_1 P_2$ und der Sehne $P_1 P_2$ begrenzten Segments nur von der «Breite» des Streifens (Abstand von p_1 und p_2) abhängig, aber nicht von seiner Lage.

E. TROST, Zürich

Lösung: Es sei $y = f(x)$ die Gleichung der Kurve C in einem Cartesischen Koordinatensystem mit g als y-Achse. In dem von x bis $x + h$ reichenden Streifen hat das von Bogen und Sehne der Kurve C begrenzte Segment den Flächeninhalt

$$F(x, h) = \int\limits_{x}^{x+h} f(\xi)\, d\xi - \frac{h}{2} [f(x) + f(x + h)] .$$

Dieser Flächeninhalt soll nur von h abhängen, also muss

$$\frac{\partial}{\partial x} F(x, h) = f(x + h) - f(x) - \frac{h}{2} [f'(x) + f'(x + h)] = 0 \qquad (1)$$

sein. Da $f(x)$ als analytisch vorausgesetzt wurde, darf man schreiben

$$f(x + h) = f(x) + h\, f'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + \sum_{i=3}^{\infty} \frac{h^i}{i!} f^{(i)}(x) ,$$

$$f'(x + h) = f'(x) + h\, f''(x) + \sum_{i=3}^{\infty} \frac{h^{i-1}}{(i-1)!} f^{(i)}(x) .$$

Damit geht (1) über in

$$\sum_{i=3}^{\infty} h^i \left(\frac{1}{i!} - \frac{1}{2\,(i-1)!}\right) f^{(i)}(x) = 0 .$$

Weil diese Beziehung bei beliebigem festem x für alle reellen h gelten soll, muss die linke Seite identisch verschwinden. Dafür ist notwendig und hinreichend, dass $f^{(i)}(x) = 0$ für $i \geqq 3$, also ist

$$f(x) = a\, x^2 + b\, x + c .$$

Die gesuchten Kurven sind demnach die Parabeln, deren Achsen zu g parallel sind, und die Geraden, welche g schneiden. R. STEUERWALD, Alzing (Deutschland)

Weitere Lösungen sandten C. BINDSCHEDLER (Küsnacht), E. HERRMANN (Porz am Rhein), R. LAUFFER (Graz), F. LEUENBERGER (Zuoz), J. SCHAER (Bern) und H. MEILI (Winterthur).

Aufgabe 341. Man beweise die folgende Variante zum Hellyschen Satz:

Lassen sich in jeder unendlichen Teilmenge einer abzählbar unendlichen Eikörpermenge M des k-dimensionalen euklidischen Raumes $k + 1$ Eikörper mit nichtleerem Durchschnitt aufweisen, so enthält die Menge M unendlich viele Eikörper mit nichtleerem gemeinsamem Durchschnitt.

H. HADWIGER, Bern

Lösung des Aufgabenstellers: Es bezeichne C eine aus $k+1$ Eikörpern von M gebildete Teilmenge von M. Die Gesamtheit aller Teilmengen C verteilen wir nach der folgenden Regel in zwei Klassen: C soll der Klasse K angehören, wenn die $k+1$ Eikörper von C einen nichtleeren Durchschnitt haben; im gegenteiligen Fall soll C der zu K komplementären Klasse K^* zugehören. Nach einem bekannten kombinatorischen Lehrsatz von RAMSEY[1]) lässt sich eine unendliche Teilmenge N von M aufweisen, derart, dass alle aus $k+1$ Eikörpern gebildeten Teilmengen C von N entweder (a) zur Klasse K oder (b) zur Klasse K^* gehören. Da aber nach Voraussetzung auch in N sich $k+1$ Eikörper finden, die einen gemeinsamen Durchschnitt besitzen, kommt von den beiden Aussagen (a) und (b) sicher nur (a) in Betracht. Also haben je $k+1$ Eikörper von N einen nichtleeren Durchschnitt, und nach dem Hellyschen Theorem weisen alle Körper von N einen nichtleeren Durchschnitt auf. Damit ist unsere Behauptung bewiesen.

Aufgabe 342. Die Kanten eines rechtwinkligen Dreikantes haben gemeinsame Punkte mit einer gegebenen Kreislinie K vom Radius r. Bestimme den geometrischen Ort der Dreikantspitze M. J. ERDÖSI, Budapest

Lösung: Das Dreikant treffe K in A, B, C. Die Normalprojektion $M' \equiv H$ von M auf die Ebene von K ist der Höhenschnittpunkt des Dreiecks ABC. Die Vektoren aus dem Kreiszentrum O nach A, B, C seien respektive $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Ist S der Schwerpunkt des Dreiecks, so ist

$$\overrightarrow{OS} = \frac{1}{3}\,(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$$

und

$$\overrightarrow{OH} = 3 \cdot \overrightarrow{OS}$$

(Eulersche Gerade!). Hieraus folgt

$$\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OH} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c},$$

ferner

$$\overrightarrow{AM'} = \overrightarrow{OM'} - \vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$$

und

$$\overrightarrow{BM'} = \vec{a} + \vec{c}.$$

Die Gleichung

$$\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 = \overline{AB}^2$$

lautet dann mit $\overline{MM'} = z$

$$2\,z^2 + (\vec{b} + \vec{c})^2 + (\vec{a} + \vec{c})^2 = (\vec{a} - \vec{b})^2$$

oder

$$2\,z^2 + 2\,r^2 + 2\,(\vec{a}\,\vec{b} + \vec{b}\,\vec{c} + \vec{c}\,\vec{a}) = 0\,.$$

Wegen

$$2\,(\vec{a}\,\vec{b} + \vec{b}\,\vec{c} + \vec{c}\,\vec{a}) = (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2 - 3\,r^2$$

wird dies mit

$$(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2 = \overline{OM'}^2 = x^2 + y^2$$

zu

$$x^2 + y^2 + 2\,z^2 = r^2.$$

Der gesuchte geometrische Ort ist also ein abgeplattetes Rotationsellipsoid.

C. BINDSCHEDLER, Küsnacht

Weitere Lösungen sandten C. BINDSCHEDLER (2. Lösung), L. KIEFFER (Luxemburg), R. LAUFFER (Graz), I. PAASCHE (München), F. PROWAZNIK (Wien), O. REUTTER (Ochsenhausen), J. SCHAER (Bern), R. STEUERWALD (Alzing, Deutschland), H. VOGLER (Wien), I. ZANA (Budapest).

Aufgabe 343. Gegeben ist eine Kreislinie k mit dem Radius r. Gesucht wird der geometrische Ort der vierten Ecke derjenigen gleichflächigen Tetraeder, deren drei andere Ecken auf k liegen. J. SCHOPP, Budapest

---

[1]) F. P. RAMSEY, *On a Problem of Formal Logic*, Proc. London math. Soc. *30* (2), 264–286 (1930).

Lösung: Aus der Flächengleichheit der Begrenzungsdreiecke eines Tetraeders folgt bekanntlich die Kongruenz dieser Dreiecke. Es handelt sich also um sogenannte Schwarzsche Tetraeder.

Die Abwicklung eines solchen Tetraeders in die Ebene des notwendig spitzwinkligen Grunddreiecks Δ_0, das dem Kreis k einbeschrieben sein soll, liefert ein Dreieck Δ; es kann aus Δ_0 erzeugt werden durch die Wendestreckung (Antithetie) mit dem Faktor -2 und dem Schwerpunkt von Δ_0 als Zentrum. Für Δ ist k der Feuerbach-Kreis.

Die vierte Tetraederecke liegt senkrecht über dem Höhenschnittpunkt H von Δ, ihr Abstand z von der Δ_0-Ebene ist das geometrische Mittel der beiden Abschnitte auf einer der Höhen von Δ. Da k die Höhenfusspunkte und die Mittelpunkte der «oberen» Höhenabschnitte enthält, wird z^2 bis auf den Faktor -2 die Potenz von H bezüglich k. Der gesuchte geometrische Ort ist dasjenige Drehellipsoid, das k als grössten Breitenkreis besitzt und dessen Dreh-Hauptachse die Länge $r\sqrt{8}$ hat. R. WAGNER, Karlsruhe

Weitere Lösungen sandten C. BINDSCHEDLER (Küsnacht), R. LAUFFER (Graz), O. REUTTER (Ochsenhausen), J. SCHAER (Bern), A. SCHWARZ (Seuzach), R. STEUERWALD (Alzing, Deutschland), H. VOGLER (Wien).

Aufgabe 344. Sind

$$N \geqq 4, \qquad a \leqq [N^{1/2}] - 1, \qquad n = \left[\frac{N}{a+1}\right]$$

natürliche Zahlen, so gelten die n Kongruenzen

$$\binom{N - a\,i}{i} \equiv 0 \qquad (\operatorname{mod} N - a\,i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

dann und nur dann, wenn N eine Primzahl ist. G. BERGER, Zürich

Solution: 1. Let N be prime. Then since $(N - a\,i, i) = 1$ it follows immediately that

$$\binom{N - a\,i}{i} = \frac{N - a\,i}{i}\binom{N - a\,i - 1}{i-1} \equiv 0 \quad (\operatorname{mod} N - a\,i)\,.$$

2. To prove the sufficiency we note first that $N \neq k^2$. For if $N = k^2$, take $a = k - 1$, $i = k$ and we get

$$\binom{k^2 - k\,(k-1)}{k} = \binom{k}{k} = 1 \equiv 0 \quad (\operatorname{mod} k)\,,$$

which is obviously impossible.

Now assume $p \mid N$, p prime $< N^{1/2}$.

Since $n > N^{1/2}$, we may take $i = p$. Then if

$$\binom{N - a\,p}{p} \equiv 0 \quad (\operatorname{mod} N - a\,p)\,,$$

it follows that

$$\binom{N - a\,p - 1}{p-1} \equiv 0 \quad (\operatorname{mod} p)\,,$$

which is impossible. L. CARLITZ, Durham (N.C., USA)

Aufgabe 345. Man zeige, dass für zwei natürliche Zahlen m und n die Beziehung

$$\sum_{\substack{\mu=0\\ \nu=0}}^{n,\,m} (-1)^{\mu+\nu}\binom{n}{n-\nu}\binom{m}{m-\mu}\binom{\mu+\nu}{\nu} = \delta_{n\,m}$$

gilt, wo

$$\delta_{n\,m} = \begin{cases} 1 \text{ für } n = m\,, \\ 0 \text{ für } n \neq m\,. \end{cases}$$

H. MEILI, Winterthur

Lösung: Wegen der Gleichberechtigung von m und n darf man $m \leqq n$ annehmen. Mit

$$(-1)^{\nu}\binom{\mu+\nu}{\nu} = \binom{-\mu-1}{\nu}$$

und der bekannten Summenformel für Binomialkoeffizienten findet man

$$\sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \binom{n}{n-\nu} \binom{\mu+\nu}{\nu} = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{n-\nu} \binom{-\mu-1}{\nu} = \binom{n-\mu-1}{n} = (-1)^n \binom{\mu}{n} .$$

Die fragliche Summe hat also den Wert

$$\sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^{\mu+\nu} \binom{m}{m-\mu} \binom{n}{n-\nu} \binom{\mu+\nu}{\nu} = \sum_{\mu=0}^{m} (-1)^{\mu+n} \binom{m}{\mu} \binom{\mu}{n} = \delta_{mn} .$$

R. Wagner, Karlsruhe

Weitere Lösungen sandten J. Binz (Bern), L. Carlitz (Durham, N.C., USA), F. Erwe (Bonn), R. Lauffer (Graz), I. Paasche (München), O. Reutter (Ochsenhausen), R. Steuerwald (Alzing, Bayern), H. Vogler (Wien), H. Zeitler (Weiden, Oberpfalz).

Neue Aufgaben

374. Es bedeute $d(m)$ die Anzahl der Teiler der natürlichen Zahl m. Man beweise, dass, abgesehen von einigen wenigen Ausnahmen, $d(n!)$ ein Teiler von $n!$ ist. Welches sind die Ausnahmewerte für n? P. Erdös

375. Ist p eine Primzahl der Gestalt $4n+3$ und N die Anzahl der quadratischen Nichtreste von p unter den Zahlen

$$1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2} ,$$

so besteht die Kongruenz

$$\left(\frac{p-1}{2}\right)! \equiv (-1)^N \pmod{p} .$$

R. Steuerwald, Alzing (Bayern)

376. Zwei Rotationsellipsoide liegen spiegelbildlich in bezug auf eine Tangentialebene. Welchen Winkel müssen die Rotationsachsen bilden, damit der kleinste konvexe Bereich, der die beiden Ellipsoide umfasst, maximales Volumen hat?

C. Bindschedler, Küsnacht

377. Man beweise: Sind die Eckpunkte eines Dreiecks Gitterpunkte und enthalten die Seiten sonst keine Gitterpunkte und liegt im Innern des Dreiecks genau ein Gitterpunkt S, so ist S der Schwerpunkt des Dreiecks. J. Surányi, Budapest

378. Seien $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ Unbestimmte. Man zeige, dass die beiden formalen Potenzreihen

$$v(t) = 1 - \sigma_1 t + \sum_{\nu=2}^{\infty} \begin{vmatrix} \sigma_1 & 1 & & & \\ \sigma_2 & \sigma_1 & 2 & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \nu-1 \\ \sigma_\nu & \sigma_{\nu-1} & \cdot & \cdot & \sigma_1 \end{vmatrix} \frac{(-t)^\nu}{\nu!} ,$$

$$w(t) = 1 + \sigma_1 t + \sum_{\nu=2}^{\infty} \begin{vmatrix} \sigma_1 & -1 & & & \\ \sigma_2 & \sigma_1 & -2 & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -\nu+1 \\ \sigma_\nu & \sigma_{\nu-1} & \cdot & \cdot & \sigma_1 \end{vmatrix} \frac{t^\nu}{\nu!}$$

für alle t reziprok zueinander sind: $v(t)\, w(t) = 1$. I. Paasche, München

Aufgaben für die Schule

Es wird kein Anspruch auf Originalität der Aufgaben erhoben; Autoren und Quellen werden im allgemeinen nicht genannt. Die Daten für Aufgaben aus der Darstellenden Geometrie sind durchwegs so festgelegt, dass der Ursprung des Koordinatensystems in der Mitte des linken Randes eines Blattes vom Format A4 gewählt werden soll, x-Achse nach rechts, y-Achse nach vorn, z-Achse nach oben, Einheit 1 cm. Anregungen und Beiträge sind zu senden an Prof. Dr. WILLI LÜSSY, Büelrainstrasse 51, Winterthur.

1. Konstruiere ein rechtwinkliges Dreieck aus der Hypotenuse c und dem Inkreisradius ϱ.

▶ 1. Lösung: Gemeinsame Tangente an den Inkreis und den Ankreis an c. Die Berührungspunkte auf den Schenkeln des rechten Winkels haben den Abstand c.

2. Lösung: $a + b = c + 2\varrho$, also rechtwinkliges Dreieck aus der Hypotenuse und der Summe der Katheten.

3. Lösung: Ein geometrischer Ort für den Inkreismittelpunkt ist der Kreisbogen über der Sehne c, der den Peripheriewinkel 135° fasst.

4. Lösung: $f = \varrho \cdot s = \varrho\,(\varrho + c)$, also Verwandlung eines Rechtecks in ein rechtwinkliges Dreieck mit gegebener Hypotenuse.

5. Lösung:

$$f = c\,\frac{h}{2} = \varrho\,(\varrho + c),$$

woraus

$$\frac{h}{2\varrho} = \frac{\varrho + c}{c}$$

und Konstruktion von h.

Diskussion: Die Aufgabe hat zwei kongruente Lösungen, wenn

$$\varrho < \frac{c}{2}\left(\sqrt{2} - 1\right).$$

2. Das Polynom

$$P_4(x) = x^4 - 5{,}9\,x^3 + 8{,}97\,x^2 + 3{,}703\,x - 12{,}167$$

besitzt eine dreifache Nullstelle $x = a$. Die Koeffizienten sind genaue Zahlen. Bestimme a.

▶ 1. Lösung: Die zweite Ableitung von $P_4(x)$ besitzt die Nullstellen 2,3 und 0,65. Nur $a = 2{,}3$ ist auch Nullstelle des Polynoms.

2. Lösung durch Entwickeln von $P_4(x) = (x - a)^3\,(x - b)$ und Vergleichen der Koeffizienten von x^3 und von x^2.

3. Lösung: $a^3\,b = -12{,}167 = -2{,}3^3$, hieraus

$$a = \pm 2{,}3; \quad b = \pm 1.$$

Die Probe stimmt nur für die oberen Zeichen.

3. Bestimme die Ableitung der Funktion

$$\frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2} = 12\,a.$$

▶ 1. Die Ableitung in der vorgelegten Form liefert $y' = y/x$.

2. Macht man nennerfrei und leitet dann ab, so ergibt sich

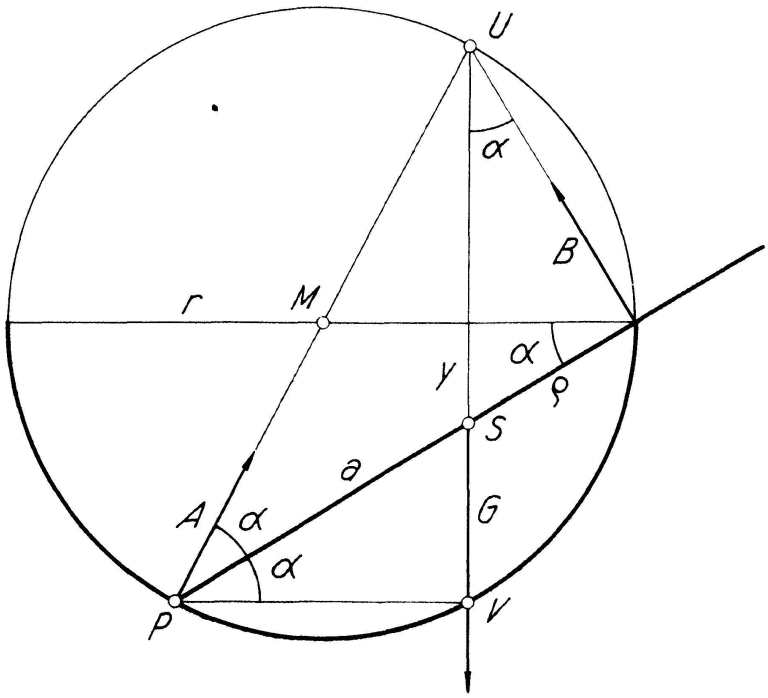
$$y' = \frac{x}{y} \cdot \frac{12\,a - 1}{12\,a + 1}.$$

3. Stellt man die explizite Form her, so heisst die Ableitung

$$y' = \sqrt{\frac{12\,a - 1}{12\,a + 1}}.$$

Die drei Resultate sind identisch.

4. In einer halbkugeligen Schale mit horizontalem Randkreis vom Radius r liegt ein Stab der Länge $2\,a$ und verschwindender Dicke. Die Reibung wird vernachlässigt. Für welchen Winkel α herrscht Gleichgewicht?



▶ 1. Lösung: $y = (2\,r\cos\alpha - a)\sin\alpha$ muss ein Maximum werden. Es ergibt sich die Bestimmungsgleichung

$$4\,r\cos^2\alpha - a\cos\alpha - 2\,r = 0, \qquad (*)$$

und

$$\cos\alpha = \frac{a + \sqrt{a^2 + 32\,r^2}}{8\,r}; \qquad \sqrt{\frac{2}{3}}\,r \leqq a \leqq 2\,r.$$

2. Lösung: Die Momentengleichungen bezüglich der Punkte P und M lauten

$$B \cdot 2\,r\cos\alpha - G \cdot a\cos\alpha = 0,$$

$$B \cdot r\cos\alpha - G\,[r - (2\,r\cos\alpha - a)\cos\alpha] = 0.$$

Durch Elimination von B ergibt sich hieraus wieder die Gleichung (*).
3. Lösung: Graphisch lautet die Gleichgewichtsbedingung, dass die Wirkungslinien der Kräfte A, B und G durch den Punkt U gehen müssen. Demnach ist

$$\varrho = 2\,r\cos\alpha - a = 2\,r\sin\alpha \cdot \mathrm{tg}\,\alpha,$$

woraus wieder die Gleichung (*) resultiert.

5. Von einer Parabel kennt man drei Tangenten und die Richtung der Achse. Man konstruiere Brennpunkt und Scheiteltangente.
▶ 1. Lösung: Die unendlich ferne Gerade ist eine vierte Tangente mit bekanntem Berührungspunkt. Wendet man den Satz von BRIANCHON auf das Sechsseit $t_1\,t_2\,t_3\,t_\infty\,t_\infty\,t_0$ an, so erhält man direkt die Scheiteltangente t_0.
2. Lösung: Die drei bekannten Sätze über Parabeltangenten:
a) Der Höhenschnittpunkt jedes Tangentendreiecks liegt auf der Leitlinie;
b) Die Leitlinie ist der geometrische Ort des Schnittpunkts senkrecht aufeinanderstehender Tangenten;
c) Der Brennpunkt liegt auf dem Umkreis jedes Tangentendreiecks;
liefern der Reihe nach die Leitlinie, drei weitere Tangenten und den Brennpunkt.
3. Lösung (mitgeteilt von Herrn LOTHAR PROFKE, Oberprimaner, Stuttgart): Schneidet man eine Schar von Parallelen zur Scheiteltangente mit den gegebenen Tangenten

und errichtet die Senkrechten in den Schnittpunkten zu den entsprechenden Tangenten, so erhält man eine Schar von perspektiv-ähnlichen Dreiecken, deren Ähnlichkeitszentrum der Brennpunkt ist.

Da die Scheiteltangente Simsonsche Gerade jedes Tangentendreiecks ist, wird mit obenstehender Aufgabe auch die andere gelöst, zu einem gegebenen Dreieck die Simsonsche Gerade vorgeschriebener Richtung zu konstruieren. Sie wurde von STEINER gestellt (*Gesammelte Werke*, Band I, S. 128). Welche Lösungsmethode STEINER im Auge hatte, ist aus dem Text nicht ersichtlich.

Literaturüberschau

P. CRANTZ: *Sphärische Trigonometrie*

Vierte Auflage, bearbeitet von M. HAUPTMANN. 112 Seiten. B. G. Teubner, Verlagsgesellschaft, Leipzig 1950

Die zuerst in der Sammlung «Aus Natur und Geisteswelt» erschienenen Büchlein von CRANTZ brauchen weder bekanntgemacht noch empfohlen zu werden. Neu ist in der vorliegenden Auflage ein überraschend einfaches Nomogramm zur Auflösung jedes sphärischen Dreiecks. Es besteht aus einer Abbildung der Himmelskugel mit Gradnetz und einem kongruenten, nur anders beschrifteten, transparenten Deckblatt. W. LÜSSY

E. LEUTENEGGER und H. SURBECK: *Aufgabensammlung der Trigonometrie*

110 Seiten. Verlag Orell Füssli, Zürich 1958

Die vorliegende zweite Auflage ist gegenüber der ersten um 30 Seiten gekürzt. Eine Reihe der geopferten Aufgaben wird man nur ungern vermissen. Hingegen werte ich es entschieden als Fortschritt, dass bei etwa der Hälfte der Aufgaben die Ergebnisse mitgegeben sind. Es ist ferner erfreulich, dass auf eine sachgemässe Genauigkeit der Lösungen sorgfältig geachtet wurde. W. LÜSSY

A. VOGEL: *Vierstellige Funktionentafeln*

157 Seiten. Verlag K. Wittwer, Stuttgart 1958

Auf engem Raum sind Tafeln der gebräuchlichen elementaren Funktionen einschliesslich der Hyperbelfunktionen und ihrer Inversen übersichtlich zusammengestellt. Besonders hervorzuheben ist die sorgfältige Angabe der vorgenommenen Rundungen, die es gestattet, auch kompliziertere Ausdrücke vierziffrig verlässlich zu berechnen. Wie es wohl erstmals in der Tafel von VOELLMY geschah, wird auch hier die lineare Interpolation durch ein besonderes Zeichen verboten. Differenzentafeln sowie eine zuverlässige und reichhaltige Formelsammlung sind separat beigelegt. Dem Rechner, der sich mit einer verhältnismässig geringen Genauigkeit seiner Resultate begnügen kann, steht hier ein vorzügliches Zahlenmaterial zur Verfügung. W. LÜSSY

N. G. PARKE III: *Guide to the Literature of Mathematics and Physics*

436 Seiten. Dover Publications, New York 1958

Der Verfasser gibt in einem ersten Teil eine sehr lesenswerte Anleitung zur Verarbeitung mathematischer Lektüre. Der zweite Teil ist eine Übersicht über die mathematische und einen Teil der physikalischen Literatur bis 1956, er ist leider weniger zu loben. Die folgenden Beispiele liessen sich fast beliebig vermehren: als einziges Werk unter dem Titel *Geometrie der Zahlen* steht die *Synthetische Zahlentheorie* von FUETER (Seite 290), während das klassische einschlägige Buch von MINKOWSKI wieder allein unter *Minkowskische Geometrie und andere Verallgemeinerungen* zu finden ist (Seite 231). Unter *Projektive Geometrie* steht das Buch von MAROGER, *Le problème de Pappus et ses cent premières solutions* (Seite 230). Wenn irgendein Buch, so hat dieses nichts mit projektiver Geometrie zu tun. – Ausserdem ist die Orthographie höchst mangelhaft, dass es im Deutschen Umlautzeichen, im Französischen Akzente gibt, wird konsequent missachtet, und der Leser erfährt mit Staunen (Seite 164), dass BLASCHKE ein Buch *Kreis und Krigel* geschrieben hat!

W. LÜSSY